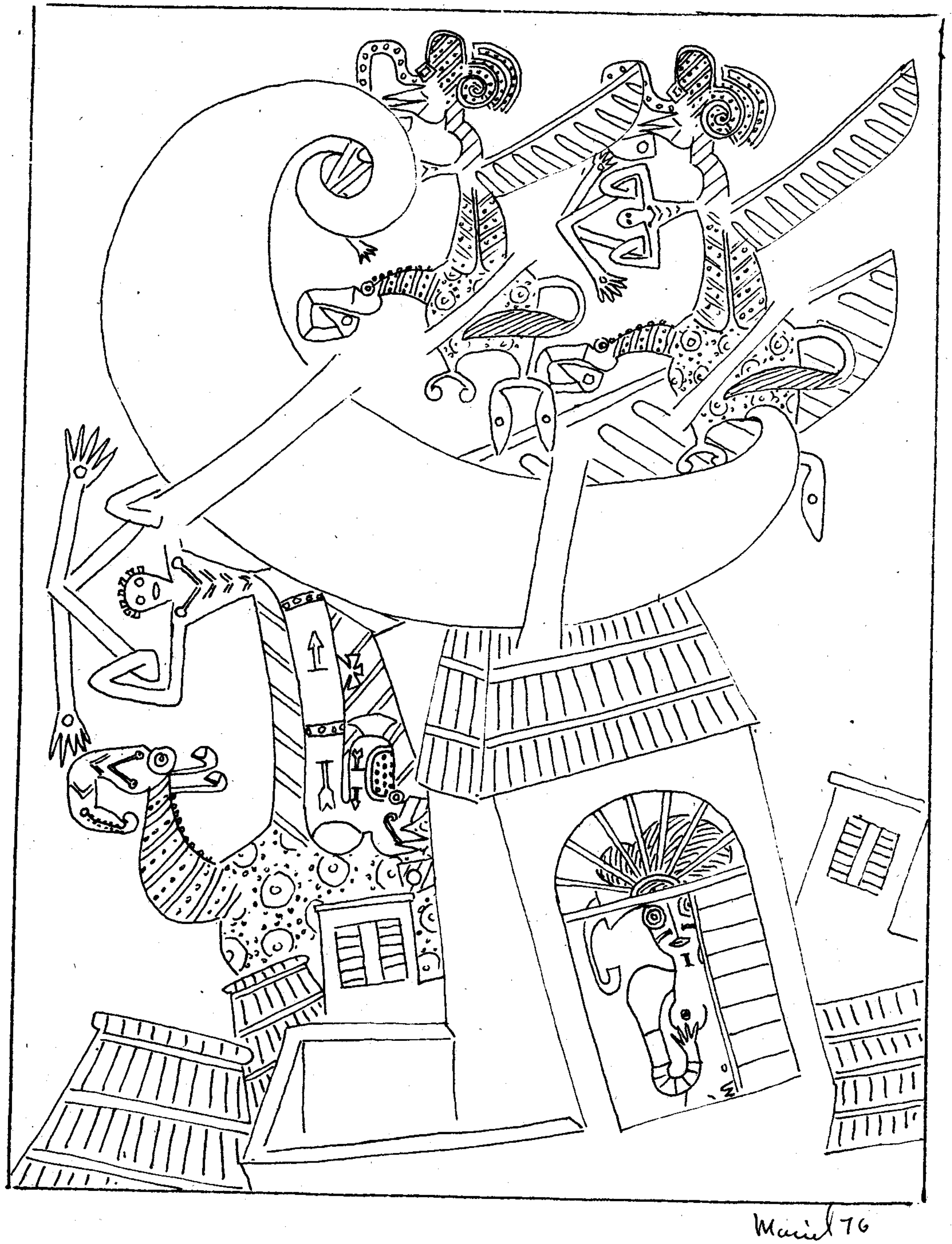


AVANCES EN MATEMATICAS EN LA ULTIMA DECADA*

Carlos Bosch Giral**
Francisco J. González Acuña**

Toda investigación en matemáticas supone que lo esencial de los resultados que la precedieron sea bien conocido. Además las consecuencias o aplicaciones de un nuevo teorema no son en general entendidas mas que por un público ya muy adentrado en el tema, lo cual hace bastante difícil responder, de manera entendible, cuáles son las investigaciones más relevantes en matemáticas durante esta década.

Por otro lado, es prematuro decidir cuáles han sido los descubrimientos más importantes de esta década, ya que hace falta una decantación para poder dar una respuesta adecuada. Por ejemplo, cuando aparecieron las geometrías no Euclidianas mucha gente, inclusive matemáticos, tachó de "locos" a los investigadores que hicieron estos trabajos. Sin embargo, años después Einstein sin estas bases matemáticas, no hubiera podido llevar a cabo sus trabajos. Vemos en este ejemplo también que las aplicaciones de tal o cual teorema tampoco se ven inmediatamente, ni se sabe si tendrán o no aplicaciones.

Sin embargo, podemos decir que los resultados o avances más importantes en los últimos años en matemáticas, son los siguientes:

La clasificación de los grupos simples.
La solución del décimo problema de Hilbert.
La demostración de la conjetura de los 4 colores.
La teoría de las catástrofes.
El trabajo de Enflo en análisis funcional, en particular en espacios de Banach.

* Este texto proviene de una entrevista hecha a los autores sobre el avance de las matemáticas en los últimos diez años. La entrevista estaba dirigida a un público muy amplio y su duración máxima era de quince minutos. Esto dió como resultado que sólo se enumerara una lista de resultados importantes, y de ésta se escogieran algunos para hablar de forma un poco más extensa pero teniendo cuidado de no usar un lenguaje muy especializado.

** Instituto de Matemáticas de la UNAM

Los trabajos de Fefferman en análisis clásico.
El análisis no estándar.
Los resultados de Thurston sobre foliaciones y estructuras hiperbólicas en variedades tridimensionales.
Los trabajos de Hironaka, Mumford y Quillen en geometría algebraica.
Los resultados de Novikov, Kirby, Siebenman y Sullivan sobre variedades topológicas, poliédricas y diferenciables.
La demostración de Deligne de la conjetura de Wil, análogo de la conjetura de Riemman para características distintas de 0.
Los trabajos de Baker, sobre números trascendentes y de Bombieri, sobre distribución de primos.
El estudio de haces algebraicos sobre el proyectivo complejo tridimensional, los cuales corresponden a instantones, concepto que surge en la física de partículas elementales.
El método elipsoidal, de eficiencia polinomial en cualquier caso, para resolver problemas de programación lineal.

Trataremos ahora de explicar de manera más detallada, algunos de los puntos enumerados anteriormente.

1. Análisis matemático clásico. Trataremos de resumir los trabajos de Charles Fefferman de la Universidad de Princeton. Su primer trabajo es la descripción del dual del espacio de funciones holomorfas de variable compleja definidas en el disco unitario y cuya integral es acotada. Siguieron un gran número de resultados en series de Fourier, teoría de operadores pseudodiferenciales y la clasificación analítica de ciertos tipos de abiertos.
2. Análisis funcional, donde son dignos de mención los trabajos de Per Enflo y del ruso Lomonosov. Este último es un matemático muy joven que enunció y demostró un teorema que lleva su nombre y que ha permitido grandes avances para la resolución del problema de subespacios invariantes, problema que fue planteado hace unos cincuenta años.
3. El análisis no estándar es más una técnica que un tema o una teoría. Todos los resultados que se prueban con análisis no estándar se pueden probar con análisis estándar y todas las nociones de análisis estándar corresponden a nociones de análisis no estándar.

El análisis no estándar utiliza elementos ideales que son infinitamente cercanos al objeto que queremos estudiar y también elementos ideales que son infinitamente lejanos.

Leibniz fue el primero que utilizó estas ideas al desarrollar el cálculo diferencial e integral. Parecía entonces imposible dar unas bases matemáticas a esta teoría, llamada de los infinitesimales; sin embargo, en esta década se han dado estas bases utilizando la teoría de modelos.
4. Quizá la estructura más básica estudiada en las matemáticas contemporáneas es la de grupo. Una de las técnicas más importantes en la ciencia moderna es la investigación de un objeto desde el punto de vista de su grupo de simetrías, punto de vista que nació con Galois y su demostración de la insolubilidad de las ecuaciones de 5o. grado.

Los grupos simples son en cierto sentido los átomos: no se pueden descomponer y a partir de ellos se construyen todos los grupos finitos; esto, entre otras razones, subraya la importancia de su clasificación, la cual se completó recientemente.

Los grupos simples finitos son:

Los de orden primo, las alternantes, los grupos de tipo Lie y los 26 grupos, llamados esporádicos, que aparecen en la siguiente tabla junto con el número de sus elementos y sus descubridores.

M_{11}	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$	Mathieu
M_{12}	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$	Mathieu
M_{22}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	Mathieu
M_{23}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	Mathieu
M_{24}	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	Mathieu
J_2	$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$	Hall, Janko
Sz	$2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	Suzuki
$H\text{–}S$	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$	Higman, Sims
McL	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$	McLaughlin
Co_3	$2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	Conway
Co_2	$2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	Conway
Co_1	$2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$	Conway
He	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 17$	Held/Higman, McKay
Fi_{22}	$2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	Fischer
Fi_{23}	$2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$	Fischer
Fi_{24}	$2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$	Fischer
$H\text{–}N$	$2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$	Harada, Norton/Smith
T	$2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$	Thompson/Smith
B	$2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$	Fischer/Sims, Leon
M	$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 27 \cdot 59 \cdot 71$	Fischer, Griess
J_1	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$	Janko
$O'Nan$	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 7^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$	O'Nan/Sims
J_3	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$	Janko/Higman, McKay
Ly	$2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$	Lyons/Sims
Rv	$2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$	Rudvalis/Conway, Wales
J_4	$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$	Janko/Norton, Parker, Benson, Conway, Thackray

En la construcción de muchos esporádicos ha habido asistencia de la computadora, cosa comprensible si consideramos, por ejemplo, que el número de elementos del monstruo de Fischer-Griess es aproximadamente 10^{54}.

5. El décimo problema de Hilbert, enunciado en 1900, es el siguiente:

¿Existe un algoritmo general, un método, para decidir si una ecuación diofantina tiene soluciones enteras?

Una ecuación diofantina es de la forma $P(x, y, \ldots) = 0$ donde P es un polinomio con coeficientes enteros. Por ejemplo $2x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$ es es una ecuación diofantina y $x = 2$ $y = 3$ es una solución de ella.

Matiyasevic, un matemático ruso, probó en 1970 que la respuesta es negativa: no existe tal algoritmo general.

Sin embargo, relacionados con la solución se tienen resultados positivos. Leeré por ejemplo, un párrafo de "Paradojas Matemáticas", escrito hace 80 años:

". . . Durante siglos se ha intentado encontrar una fórmula que dé únicamente números primos. Por ejemplo, el que se encontró por primera vez con la fórmula $n^2 + n + 41$, debió creer que había dado con algo bueno, ya que esta expresión da como resultado un número primo al dar a n los valores 1, 2, 3, . . . hasta 39 inclusive. Así si n es 1 la fórmula da 43; si n es 2, da 47; si n es 3 da 53; si n es 4 da 61, etcétera. Pero si n es 40 la fórmula da 1681, que no es primo. . .".

Puede preguntarse uno ¿existe tal fórmula? Sorprendentemente, la respuesta es afirmativa y puede darse explícitamente una fórmula que es esencialmente un polinomio. La expresión escrita da primos, todos los primos y nada más que primos cuando se dan a las variables valores enteros no positivos.

$$\begin{aligned} \text{Max } 2, (k+2) \quad & 1 - ([wz+h+j-q]^2 + [(gh+2g+k+1)\cdot(h+j)+h-z]^2 + [(16(k+1)^3\cdot(k+2)(n+1)^2 \\ & + 1-f^2]^2 + [2n+p+q+z-e]^2 + [e^3\cdot(e \nleq 2)\cdot(a+1)^2+1-o^2]^2 + [(a^2-1)y^2+1-x^2]^2 \\ & + [16r^2y^4\cdot(a^2-1)+1-u^2]^2 + [((a+u^2\cdot(u^2-a))^2-1)\cdot(n+4dy)^2+1-(x+cu)^2]^2 \\ & + [(a^2-1)\ell^2+1-m^2]^2 + [ai+k+l-\ell-i]^2 + [n+\ell+v-y]^2 + [p+\ell(a-n-1) \\ & + b(2an+2a-n^2-2n-2)-m]^2 + [q+y(a-p-1)+s\cdot(2ap+2a-p^2-2p-2)-x]^2 \\ & + [z+p\ell(-p)+t(2ap-p^2-1)-pm[^2) \end{aligned}$$

6. Hablemos del problema de los 4 colores.

¿Puede colorearse un mapa de la República Mexicana con 3 colores, de tal manera que estados adyacentes tengan distintos colores?

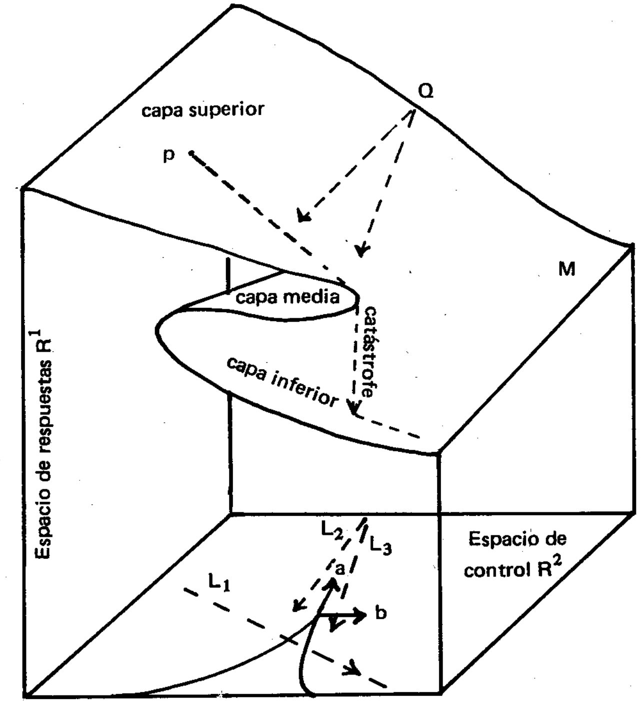
No; porque los estados de México, Puebla, Tlaxcala e Hidalgo son mutuamente adyacentes y, por tanto, requieren 4 colores distintos. Sin embargo 4 colores bastan para colorear la República. ¿Bastarán 4 colores para colorear cualquier mapa plano? Esta pregunta, planteada hace 130 años y los intentos por contestarla, contribuyeron el desarrollo de la teoría de gráficas, rama de las matemáticas utilizada, por ejemplo, en teoría de optimización y en computación.

Hace cinco años Appel y Haken probaron que la respuesta a la pregunta es afirmativa. Demostraron que todo mapa contiene una de 1 937 configuraciones inevitables y que cualquier mapa que contuviera una de éstas podía reducirse a uno con menos regiones, de tal manera que el mapa original era 4-coloreable si el reducido lo era.

La demostración que requirió más de 1 000 horas de cálculos con máquina electrónica, es el primer ejemplo de un problema matemático de importacia resuelto con la asistencia significativa de la computadora.

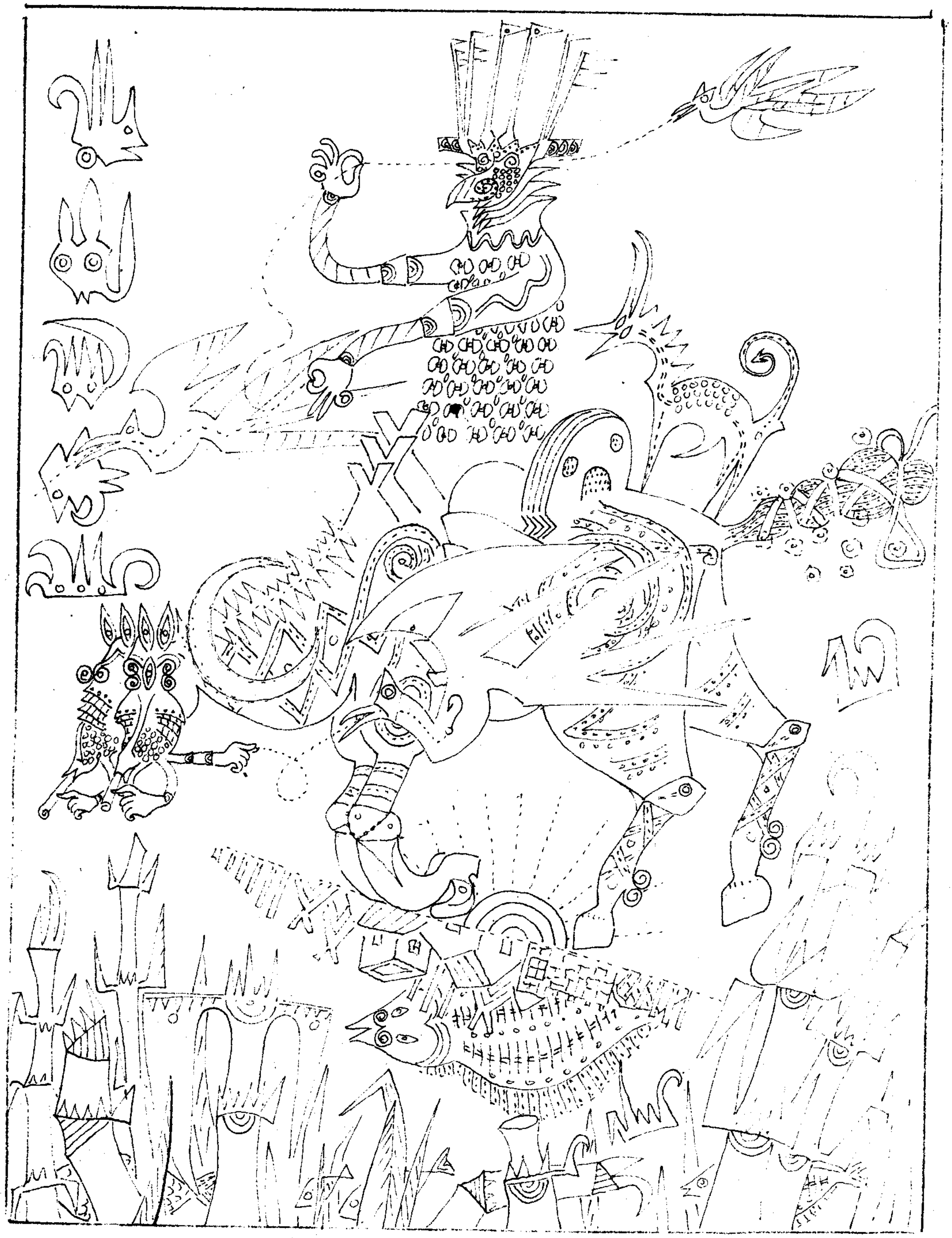
7. La teoría de catástrofes, de Thom y Zeeman, es una teoría topológica que estudia procesos en los que causas continuas producen efectos discontinuos. Se ha aplicado con distintos grados de éxito en física, ingeniería, biología, economía, psicología, lingüística y sociología.

Un modelo típico para explicar comportamiento discontinuo es la catástrofe cuspidal ilustrada en la figura.



Se tiene un espacio de control, en donde en este caso, se tienen dos variables de control a y b y un espacio de respuestas, en donde se tiene una variable de estado x. Pensamos en a y b como causa y en x como efecto. Por ejemplo a y b pueden ser la presión y temperatura de un líquido o gas y x su densidad. Se tiene también una superficie M, de ecuación $x^3 + ax + b = 0$, que consta de una capa superior, una parte media y una capa inferior. Un punto (a, b, x) se mueve en M, pero debido a cierta hipótesis de minimización permanece en las capas superior o inferior que corresponden a mínimos, mas no en la media que corresponde a máximos. Esto causa que si estamos en un punto P de la capa superior y variamos (a, b) a lo largo de la recta L_1 llega un momento en que P repentinamente cae de la capa superior a la inferior; (ocurre una "catástrofe") si ahora, estando en la capa inferior variamos (a, b) por L_1 pero en el sentido inverso, el punto P en cierto momento saltará bruscamente a la capa superior.

Otra característica de modelo es la divergencia: Si estando en el punto variamos (a, b) por la recta L_2 el efecto será "muy positivo", mas si variamos (a, b) por L_3, recta muy cercana a L_2, el efecto será "muy negativo". Algo análogo a lo que pasó con el DC-10: aterrizar en la pista 23 derecha hubiera tenido consecuencias normales; aterrizar en la 23 izquierda tuvo consecuencias catastróficas.



π Y SUS PROBLEMAS: respuesta al número anterior

Juan José Rivaud*

Muchas personas a las que les planteé este problema(**) me han comentado que evidentemente la falacia radica en suponer que los números

$$\frac{3\pi}{8\pi - 6\sqrt{3}} \text{ y } \frac{\pi - 2}{2}$$

son iguales,pero que no pudieron determinar cuál de los dos números estaba mal calculado. Otros fueron más lejos y se dieron cuenta que la geometría usada en los cálculos es correcta y que el asunto es que ambas soluciones resuelven problemas relacionados al propuesto, pero que éste no está bien planteado, pues no se especifica cómo se llevará a cabo la elección al azar de un triángulo de la familia. En efecto, aquí radica la falacia. En las líneas que siguen explicamos este asunto.

Cuando queremos elegir un número del 1 al 20 al azar, una forma usual de hacerlo es tomar 20 bolas iguales, numerarlas, ponerlas en una ánfora, revolverlas y después tomar una de ellas a ciegas. Aquí podemos decir que los 20 números están presentes en el experimento en la misma forma, los 20 tienen la misma oportunidad de ser elegidos, la misma probabilidad (precisamente un veinteavo). Calcular cuál es la probabilidad de que al tomar un número de ellos al azar, éste resulte par, es inmediato: Como de 20 resultados posibles y equiprobables, 10 son favorables, la probabilidad es un medio.

No hace falta detenerse a pensar mucho para ver que, en este caso, el cálculo de la probabilidad de que ocurra cualquier otro evento se reduce a contar los casos favorables y multiplicar por un veinteavo.

* Departamento de Matemáticas y Estudios Avanzados del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

** Véase "π y sus problemas" en el número 16 (vol. V núm. 4) de esta revista.