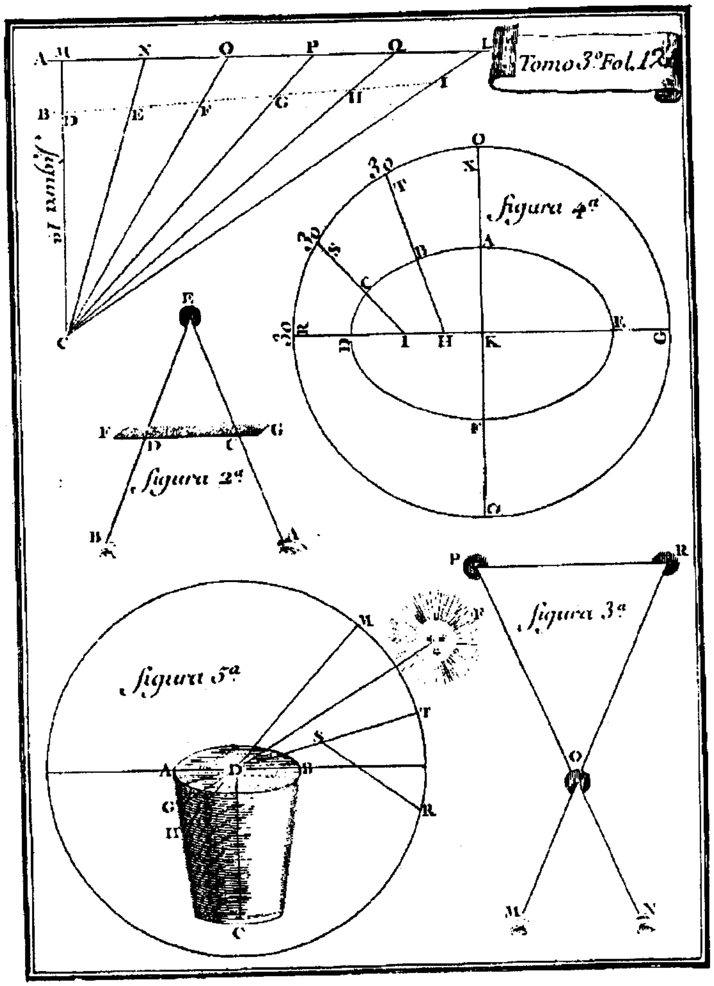
poſitura no la verá. Lléneſe deſpués de agua la caldera, ſin variar poſitura, ó diſtancia: verá la moneda el que antes no la veía; porque en virtud de la refraccion que hace el rayo viſible, ſaliendo de la agua al aire, ſe repreſenta la moneda en otro lugar mas adelante, que no oculta el borde de la caldera. Eſto, ni mas, ni menos, es lo que paſa eſtando el Sol en alguna depreſion debaxo del Horizonte.



Mathesis II 1₁ (2001) 153-164.

La epistemología matemática de Jacques Herbrand (análisis de dos escritos filosóficos)

Carlos Torres Alcaraz

A la memoria de Santiago Ramírez, artífice de muchas de las ideas que aquí se exponen.

Presentación

Este trabajo tiene como antecedente una conferencia —redactada originalmente en inglés— que Santiago Ramírez y yo elaboráramos para su lectura en el Departamento de Historia de la Universidad de Harvard en 1984 durante una corta estancia del Dr. Ramírez en dicha institución. La conferencia fue el resultado de las reflexiones que a la sazón hiciéramos sobre el pensamiento de Jacques Herbrand, y la redacción final quedó a cargo de Santiago. El resultado final no lo tuve entre mis manos y a su regreso no volvimos a tocar el punto. No obstante, poco antes de su fallecimiento, Santiago y yo nos propusimos retomar el tema de la obra de Herbrand con miras en un trabajo más extenso que habríamos de elaborar para su publicación. En febrero de 1997 Santiago me entregó una copia de trabajo que leyera en Harvard en 1984. Desafortunadamente, y por diversos motivos, nunca tuvimos tiempo de revisarlo juntos.

En 1998 y como un homenaje a su memoria, decidí retomar el trabajo con motivo del congreso nacional de la *Sociedad Matemática Mexicana* a realizarse en la ciudad de Hermosillo, Sonora (México). Al analizarlo, descubrí que con el paso del tiempo mi punto de vista había cambiado, sobre todo en torno al lugar y la importancia que Herbrand otorga a la noción de verdad, e introduje algunas modificaciones, algunas de ellas de fondo.

Como resultado he decidido firmar como único autor, sobre todo considerando que Santiago ya no se encuentra entre nosotros para aceptar los cambios o hacer frente a las críticas. Aun así, su presencia se deja sentir en toda la obra, en sus ideas y sus conceptos, que no habría alcanzado por mí mismo, amén de que he conservado el estilo y modos de expresión originales. Estoy convencido de que si el texto de 1984 lo hubiésemos reescrito entre los dos, el resultado habría sido algo muy parecido a lo que aquí se dice.

Resulta paradójico que un trabajo conjunto lo termináramos por exponer Santiago y yo por separado y sin haber alcanzado un acuerdo final. No obstante, las ideas capitales sí son compartidas, siendo las diferencias sólo de matiz y en puntos en los que, finalmente, habríamos llegado a un compromiso.

Introducción

Jacques Herbrand nació en febrero de 1908. En 1925, a los 17 años, ingresó en la *Ecole Normale* (al igual que Jean Cavaillés dos años antes); en 1928 fue primero en la *Agregation* y en 1930 recibió el doctorado al presentar una tesis sobre la teoría de la demostración.

El 27 de Julio de 1931 falleció, a los 23 años, en un accidente de montaña.

Aunque su principal área de trabajo fue la lógica matemática, sus contribuciones a la teoría de Galois y a la teoría algebraica de los números cuentan con un amplio reconocimiento.

Sus trabajos en lógica fueron publicados por Jean Van Heijenoort en francés y traducidos por Warren Goldfarb para *Harvard University Press*. Estos incluyen:

Sur la théorie de la démonstration, 1928.
Non-Contradiction des axiomes arithmétiques, 1929.
Sur quelques propietés des propositions vraies et leur applications,1929.
Sur le probléme fondamental des mathèmatiques, 1929.
Recherchés sur la théorie de la démonstration, 1930.
Les bases de la logique hilbertienne, 1930a.
Una nota sobre *Recherchés sur la théorie de la démonstration*, 1931b.
Una nota a Jacques Hadamard, 1931.
Sur la non-contraction de l'arithmétique, 1931.

En 1929 escribió *Recherchés des solutions bornées de certain équations fonctionnelles; en 1930, Détermination des groupes de ramification d'un corps a partir de ceux d'un sous-corps*; en 1931, *Sur la théorie des groupes de descomposition, d'inerte et de ramification.* En 1930-31, *Nouvelle démostration d'un theoreme de Minkowski.*

Finalmente, después de su muerte fueron publicados los siguientes trabajos, todos ellos en colaboración con Claude Chevalley: *Groupes Topologiques, groupes fuchsiens, groupes libres* y *Nouvelle demonstration du theoreme d'existence en theorie du corps de classes.*

De la parte filosófica de su obra hemos seleccionado dos artículos dirigidos al gran público o, al menos, a los filósofos: 1930a y 1931b. El primero fue publicado en el número 37 de la *Revue de Méthaphysique et de Morale*; el segundo, en el N° 6 de los *Annales de l'Université de Paris.* Ambos figuran en la antología *Jacques Herbrand Logical Writings* editada por Warren Goldfarb.

El Programa de Hilbert

Herbrand fue un defensor del llamado *Programa de Hilbert*, aunque no compartía con él sus ideas filosóficas. Según Herbrand [1930a, 243], el programa de Hilbert consiste básicamente en estudiar ''no los objetos de los que se ocupan habitualmente los matemáticos, sino las frases que sobre tales objetos pueden pronunciar'' [Herbrand 1930a, 243]. Tal estudio, según él, constituye la metamatemática, que abarcaría ''todas las cuestiones de principio'' [*Ibid.*]. Es más, en una nota sin firmar (1931b), dice que la metamatemática ''es un intento por resolver problemas planteados por la filosofía de las matemáticas, no mediante la discusión verbal, sino resolviendo cuestiones precisas'' [Goldfarb 1971, 272].

La base sobre la que se apoya la metamatemática es *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead, donde el número de signos necesarios para hacer matemáticas se reduce a un mínimo. Es más, Russell mostró que todas las demostraciones matemáticas podían reducirse a un pequeño número de reglas que él establece.

En estos términos una teoría matemática particular comienza con un conjunto de proposiciones que se consideran verdaderas[1] (los axiomas de la teoría) y en ella todas las demostraciones que se pueden llevar a cabo se reducen a la aplicación reiterada de dichas reglas. Todo

1. El hecho de que Herbrand utilice el vocablo 'verdaderas' es, desde nuestro punto de vista, representativo de su postura filosófica ante las nociones semánticas, que él considera como vagas e imprecisas, y tiene cómo propósito tratar a la demostrabilidad como el sustituto exacto de la noción de verdad.

ello se puede traducir a 'una especie de taquigrafía' a la que se puede traducir toda la matemática [Goldfarb 1971, 272].

En este contexto, el problema fundamental, 'el problema más general de las matemáticas', se puede expresar como sigue: '¿Es tal o cuál proposición demostrable en una teoría que tiene tales o cuales axiomas?' [*Ibid*].

A este problema se le conoce como el problema de la decisión (*Entschendungsproblem*). Según Herbrand, el mérito de Hilbert fue mostrar que el problema de la decisión es un problema matemático bien definido. Es más, el programa de Hilbert sería capaz de enfrentar la crítica de Brouwer, para quien sólo eran permisibles argumentos que tratasen con los números enteros, postura que resume el punto de vista intuicionista en torno al problema del fundamento de las matemáticas. Para hacer frente a las críticas de Brouwer, Hilbert sólo admite en la metamatemática argumentos de un tipo especial que él denomina *finitistas* y que Herbrand identifica con el intuicionismo:

> Hilbert planteó el problema de resolver las dificultades ya señaladas mediante el uso exclusivo de argumentos intuicionistas. Pero, como un resultado de ello, desde el comienzo se vio forzado a plantear problemas como el siguiente: Consideremos los axiomas de la aritmética. A partir de estos axiomas y utilizando las reglas de inferencia de Russell podemos formular argumentos que Brouwer rechaza; no obstante, si pudiésemos demostrar con rigor absoluto, utilizando procedimientos intuicionistas, que no hay peligro de llegar a ninguna contradicción, entonces la crítica de Brouwer perdería su fuerza.

El propósito de Herbrand [1930a] es presentar los principios del programa de Hilbert evitando a la vez las objeciones a las que se le ha sometido. Tales objeciones se reducirían básicamente a tres:

1. La objeción relativa a el uso de elementos ideales tales como el infinito.
2. La objeción relativa a la validez de una prueba de consistencia.
3. La objeción relativa a la naturaleza de los objetos matemáticos.

De acuerdo con Herbrand, el programa de Hilbert permite simplificar los problemas y las dificultades que derivan del uso del lenguaje ordinario. Este lenguaje, a decir de Herbrand [1930b, 243], 'es inapropiado para las matemáticas.'.

El lenguaje introducido por Russell y Whitehead sólo requiere de un reducido número de signos especiales, tales como '$\vee$', '$\neg$' y '$\exists x$' (que significan 'o', 'es falso que' y 'existe un objeto x tal que'), para

'traducir todas las proposiciones [matemáticas] posibles' [Herbrand 1930b, 245]. Es más, toda proposición significativa de las matemáticas se puede expresar en este sencillo lenguaje. Herbrand llega al punto de declarar que 'en adelante supondremos implícitamente que todas las proposiciones matemáticas que consideremos están escritas en este lenguaje' [*Ibid.*].

Una vez en posesión de este instrumento que es el lenguaje de Russell y Whitehead, nos podemos preguntar bajo qué condiciones una proposición es verdadera en una teoría matemática determinada, es decir, analizar las reglas de razonamiento.[2] La mayor parte de este trabajo fue también obra de Russell y Whitehead y completada por Hilbert. El resultado al que se llegó es el siguiente: En una teoría matemática todos los razonamientos se pueden efectuar suponiendo verdaderas ciertas proposiciones predeterminadas (los axiomas) y deduciendo las demás proposiciones (los teoremas) con métodos puramente lógicos, mediante reglas de inferencia universales que no dependen de la teoría ni del significado que les podamos dar a los signos.

Así, los signos y las expresiones del lenguaje creado por Russell y Whitehead los podemos manipular sin tener que volver cada vez a su significado en el lenguaje ordinario, sin preocuparnos por su origen: 'Llegándose a una especie de álgebra en la que se pueden hacer todas las matemáticas' [Herbrand 1930b, 247].

Al seno de esta teoría, dos problemas son esenciales: el problema de la consistencia y el problema de la saturación (completud). Las nociones de consistencia y saturación se pueden precisar como sigue: Una teoría es *inconsistente* cuando en ella es posible probar un teorema y su negación. Una teoría es *completa* o *saturada* si, dada una proposición P y su negación $\neg P$, alguna de las dos se puede probar. Por último, según Herbrand, el programa de Hilbert modifica la relación entre matemáticas y filosofía.[3]

Herbrand, con apego a la tradición, establece la distinción entre el matemático y el filósofo en los siguientes términos: '(el matemático) se debe limitar a desarrollar las consecuencias de dichas hipótesis y

2. Herbrand no establece diferencia alguna entre las nociones de *verdad* y *demostrabilidad*, que más adelante se habrían de diferenciar con base en la obra de Gödel y Tarski. Al identificarlas, Herbrand no hace sino profesión de fe en la tesis formalista según la cual la verdad de las proposiciones matemáticas no es otra cosa que su demostrabilidad al seno de una teoría.

3. El meollo del programa de Hilbert consistía en demostrar que las principales teoría matemáticas (básicamente la teoría de los números y la teoría de los conjuntos) son consistentes, sin recurrir a nada más que argumentos de corte finitista que no irían más allá de la matemática intuicionista.

a presentarlas de la manera más sugerente; lo demás es tarea del físico o del filósofo' [Herbrand 1930b, 253-254].

Más adelante, en [1931a], afirma que la metamatemática no se ocupa en forma alguna de problemas relacionados con la teoría del conocimiento. Sin embargo, de la misma manera en que las ciencias han planteado problemas matemáticos, "por primera vez, debido a la metamatemática, la filosofía ha desempeñado dicho papel" [Goldfarb 1971; 272]. Nuevamente, afirma que la metamatemática de Hilbert da lugar a una filosofía de las matemáticas en la que, por ejemplo, la consistencia implica la existencia matemática.

La epistemología matemática de Herbrand

La forma en que Herbrand plantea el programa de Hilbert da lugar a diversos problemas epistemológicos sumamente complejos:

1. El primer problema se halla en la explicación que da de la aparición de los lenguajes formales.

Según Herbrand, el lenguaje ordinario no es lo suficientemente simple como para permitirnos plantear ciertos problemas en forma adecuada. Así, pareciera haber una necesidad de un nuevo lenguaje, una necesidad *subjetiva* de conveniencia y simplicidad. Por tanto, fue el deseo de la simplicidad lo que llevó a los lenguajes formales, que fueron creado de esa manera por los logicistas para satisfacer dicho deseo. Si tomamos al pie de la letra lo que Herbrand dice, los lenguajes formales son el resultado de un vago y poco claro deseo. Podríamos decir, entonces, siguiendo a Herbrand, que los lenguajes formales surgen del lenguaje ordinario como resultado de un acto subjetivo que tiene como propósito la simplificación.

2. Se podría estar fácilmente de acuerdo con lo anterior. Más complicado parece el problema planteado por de la suposición subjetiva de que todas las proposiciones matemáticas de interés se pueden traducir utilizando el simbolismo de Russell. Desde este punto de vista, la percepción de los lenguajes formales como traducción o taquigrafía del lenguaje ordinario sería adecuada. Se podría estar incluso de acuerdo en que el simbolismo de Russell es, de hecho, lo que Herbrand proclama. El problema aparece cuando junto con ello afirma que las proposiciones verdaderas de las matemáticas clásicas se traducen en fórmulas demostrables de las matemáticas formalizadas.

Este problema no es el resultado de una convicción filosófica peculiar de Herbrand; más bien, es el resultado de las condiciones y el desarrollo del pensamiento matemático en aquellos tiempos, en que las nociones de verdad y demostrabilidad tendían a ser consideradas como equivalentes. En 1931 Gödel demostró que la traducción anhelada no se puede lograr.[4]

Las matemáticas clásicas se formulan dentro del lenguaje ordinario. No obstante, los enunciados de, digamos, la aritmética se identifican con fórmulas en las que todas las variables figuran cuantificadas. Ahora bien, cada una de estas fórmulas es o verdadera o falsa, es decir, cada enunciado de la aritmética se considera verdadero o falso: el conjunto de los enunciados de la aritmética es la unión ajena de sus enunciados verdaderos y falsos.

Ahora, si tomamos un sistema axiomático formal para la aritmética y consideramos el conjunto T de sus teoremas, se puede demostrar que si T es completo, entonces T coincide con el conjunto de todos los enunciados, y el sistema es inconsistente. Por el contrario, si el sistema es consistente, T no contiene todas las traducciones de enunciados aritméticos verdaderos de la aritmética clásica y, por consiguiente, el conjunto de axiomas no es completo. De este modo, el conjunto de axiomas es o inconsistente o incompleto, y el conjunto de teoremas es o demasiado grande o demasiado pequeño como para coincidir con el conjunto de enunciado verdaderos. Con lo anterior, Gödel descalificó el deseo subjetivo de Herbrand.

En resumen: Herbrand está convencido de que toda proposición matemática se puede traducir en una proposición simbólica perteneciente a un sistema formal que preserva la noción de verdad de las matemáticas clásicas. Esto le permite identificar la nociones de *demostrabilidad* y *verdad* y afirmar, implícitamente, que la primera es el sucedáneo constructivo de la segunda, un tanto más imprecisa y subjetiva. De ahí que denomine 'verdaderas' a las fórmulas demostrables. No obstante, el trabajo matemático mostraría con tiempo que esto es imposible, pues los problemas de consistencia y completud no se pueden resolver simultáneamente.

3. El tercer problema surge del hecho de que aún aceptando su punto de vista, no todo acto encaminado a la simplificación tiene un sentido matemático. Es por ello que Herbrand [1930b, 243] declara que, no

4. Si bien la noción de «verdad» no fue elaborada como un concepto matemático sino hasta 1935 a manos de Tarski, Gödel ya se vale de ella de manera implícita en sus teoremas de 1931.

siendo suficiente con la simplicidad, el lenguaje descrito debería ser capaz también de expresar 'todos los enunciados que tienen sentido en matemáticas'. [Herbrand 1930b, 243]

Los problemas del sentido serían de este modo propuestos por los objetos matemáticos mismos, y deberían ser atribuidos a una cierta objetividad matemática que él desea superar. El sentido, a su vez, no era en aquél entonces un concepto matemático.

Hasta aquí, entonces, podemos decir que en la perspectiva de Herbrand, los lenguajes formales expresan a las matemáticas y se apoyan, por una parte, en la necesidad subjetiva de la simplificación, y, por la otra, en la necesidad de superar una supuesta objetividad que determina el sentido matemático, para así alcanzar la verdadera objetividad, que se realiza en el plano de lo simbólico. Este problema, entre los actos matemáticos y las intenciones subjetivas, será de gran importancia en el pensamiento epistemológico de Lautman y Cavaillès.

4. El problema del sentido sería una cuestión filosófica ajena a las matemáticas mismas y, por ende, inaccesible a ellas. ¿Cuál es, entonces, el lugar de la metamatemática en el pensamiento de Herbrand?

En primer lugar, la relación entre matemáticas y filosofía es reconsiderada: los problemas filosóficos que plantean las matemáticas pueden ser tratados matemáticamente a través de la metamatemática [Goldfarb 1971, 272]. En segundo lugar, y en el mismo sentido, la filosofía desempeña un verdadero papel como fuente de problemas matemáticos debido a la metamatemática [*Ibid.*]. Si consideramos que los problemas filosóficos se plantean necesariamente en el lenguaje ordinario, cuando se plantean para las matemáticas, pueden ser traducidos matemáticamente.

En este sentido, la metamatemática es una ''matemática del lenguaje'' [Herbrand 1930b, 243]. Así, la metamatemática sirve de vínculo entre la filosofía y las matemáticas, como un intermediario a través del cual un problema filosófico se puede plantear matemáticamente para ser resuelto ahí, ''no mediante la discusión verbal, sino resolviendo una cuestión precisa'' [Goldfarb 1971b, 272].

Es en este sentido que la filosofía matemática se debe entender, no como una autonomía fuerte respecto a las matemáticas, sino como un camino matemático para resolver los problemas planteados por la filosofía de las matemáticas. Los trabajos de Lautman y Cavaillès pueden ser considerados desde esta perspectiva, como el mismo Herbrand establece cuando hace referencia a una dialéctica filosófica (*dialectique philosophique*).

Sería entonces a través de la metamatemática que determinados problemas filosóficos hallarían solución, sentándose con ello las bases para atacar el problema del posible acuerdo (o desacuerdo) entre los mundos físico y matemático.

5. Lo anterior nos conduce al problema de la semántica.[5]

5.1. El lenguaje ordinario es una representación del mundo real. Esto significa que, en principio, deberíamos ser capaces de volver a cualquier cosa que sea significada por una palabra. (Aquí hacemos referencia a la teoría de Saussure, según la cual una palabra consta de dos elementos: el *significante*, el elemento perceptible, y el *significado*, aquello a lo que se hace referencia).

5.2. El lenguaje matemático (el lenguaje de las matemáticas clásicas) es parte del lenguaje ordinario. Así, en toda 'palabra' matemática encontramos aquello que se significa (una idea o un objeto 'real') y el símbolo perceptible mismo (aquello mediante lo que significamos algo).

5.3. El lenguaje matemático casi siempre está referido a algo que ya es en sí una representación. Por ejemplo, el cálculo trabaja con la representación de ciertos fenómenos. Puede proceder así porque dichas representaciones ya son matemáticas (están colocadas, parafraseando a Kant, en el *horizonte* matemático).

Lo anterior sirve como prueba de que hay un proceso mediante el cual un objeto se coloca en una región particular en la que el tratamiento matemático es posible y relevante. Afirmamos que este posicionamiento es la tarea de las matemáticas (este es, en griego, el sentido de *mathesis*).

También podríamos afirmar (si consideramos que toda representación es un acto de abstracción) que las matemáticas son una abstracción hecha sobre otra abstracción.

5.4. Desde un punto de vista ingenuo, la semántica matemática sería, entonces, el proceso mediante el cual podríamos hallar al objeto (o la representación) que da origen a nuestro 'mundo' matemático, lo cual para Herbrand es un sinsentido. Lo que procede, según él, es suplantar dichas nociones por otras de carácter formal.

5. La actitud de Herbrand es, en cierto sentido, una reacción frente al trabajo de Löwenheim, quien ignora toda consideración sintáctica y se sirve de una noción de 'verdad' intuitiva e imprecisa. En este sentido, el trabajo de Herbrand se debe interpretar como la búsqueda de un sustituto constructivista de la noción de verdad.

5.5. Así, la metamatemática no se ocupa de tales objetos, que no puede caracterizar, sino de lo que se dice de ellos [Herbrand 1930b, 243]. En este sentido, la metamatemática sería un tercer nivel de abstracción, pese a tener un significado inmediato: el signo. En otras palabras, la metamatemática es capaz de encontrar su objeto 'real' sin tener que recorrer los distintos niveles de abstracción, por lo que no requiere de ninguna teoría de la representación.

Al respecto, Herbrand afirma que la suya es una posición agnóstica:[6] "Esta posición agnóstica disgustará a muchos; pero no deberíamos ocultar que el papel de las matemáticas es quizá tan sólo el de proveernos de razonamientos y de formas, y no el de investigar cuales de ellas se aplican a qué objetos." [Herbrand 1930b, 253]. Y añade 'En ningún momento la metamatemática buscará saber si una teoría dada describe convenientemente las propiedades de tal o cual objeto, o si corresponde o no a algo real; por lo demás, ella no lo podrá hacer' [*Ibid*].

5.6. La 'realidad' de la metamatemática está provista entonces por la intuición del signo, como lo establece Hilbert, y no requiere de ninguna teoría acerca de la representación.

5.7. La categoría epistemológica 'verdadero' pertenece al ámbito de la representación. Tratar de regresar desde la metamatemática a la verdad sería algo para lo que esta última no está preparada. Es por ello que Herbrand, al identificar una noción con la otra, no hace otra cosa que sustituir la noción de verdad con su supuesto equivalente sintáctico: la noción de demostrabilidad.[7]

En este sentido, las sujeción a los métodos finitistas de Hilbert obedece, en Herbrand, al deseo de satisfacer los requisitos del más alto rigor, y la noción intuitiva de 'verdad' se presenta, por decir lo menos, sospechosa, pues envuelve circunstancias que no satisfacen dicho rigor.[8]

6. Herbrand se adhiere así a la postura de muchos científicos que se rehusan a abordar cuestiones que no pueden ser tratadas con los métodos de la ciencia positiva, tales como el problema de lo Absoluto, el Infinito o Dios.
7. Al referirse a las proposiciones demostrables como verdaderas, pareciera que Herbrand reintroduce el concepto, más esto es absurdo, pues: a) Herbrand está tratando de evitar toda referencia a hechos no matemáticos, y b) Herbrand está tratando de evitar en todo momento referirse a la experiencia de la verdad, que no es una experiencia matemática. Es por ello que cuando trata de rebatir algunas de las objeciones usuales al programa de Hilbert, evita el problema de la percepción matemática, o de la experiencia matemática, y eventualmente el problema de la naturaleza de los objetos matemáticos.
8. Considérese, por ejemplo, el acto de atribuir verdad a una fórmula de la forma $\forall x \exists y Rxy$ en un dominio infinito. La presencia del cuantificador existencial obliga a considerar una función de elección $f(x)$ que, para cada individuo x, *elija* un individuo $y = f(x)$ que esté relacionado con él, lo cual está lejos de tener un fundamento constructivista.

El problema de la identificación de las nociones de verdad y demostrabilidad no será resuelto con anterioridad a Gödel y Tarski. Será con sus trabajos que el problema de la verdad se transforma de hecho en una cuestión precisa y no será, nuevamente, un tema de mera discusión verbal. Es más, será a través de los esfuerzos de Gödel y Tarski que la metamatemática será, a su vez, matematizada. Sus trabajos transformarán, entonces, la 'zona de intuición', el horizonte kantiano, para reformular el concepto del sentido matemático.

En la epistemología de Herbrand, cercana a la de Hilbert, podemos encontrar ya los elementos para la transformación de las zonas matemáticas de la intuición.

Por último, la epistemología de Herbrand muestra algunos de los elementos que serán necesarios para superar las concepciones epistemológicas que dominaron a las matemáticas durante la mayor parte del siglo diecinueve.

A manera de conclusión. Lejos del platonismo, Herbrand considera que ese mundo racional que llamamos *matemáticas* es una creación humana, y que su formalización es el único camino para alcanzar la objetividad, que sólo se logra en el simbolismo puro, despojando a los símbolos de su significado, deteniéndose en ellos en vez de dirigir la mirada hacia aquello a lo que apuntan. En un sistema formal, que una cosa se sigue de otra es algo objetivo, mas su objetividad no se debe a que revele la estructura de un mundo, sino a que obedece las reglas del sistema.

Para Herbrand, la objetividad y la realidad concreta, lejos de ser sinónimas, se excluyen mutuamente.

Carlos Torres, es matemático y doctor en filosofía por la Universidad Nacional Autónoma de México. Actualmente ocupa el puesto de profesor de tiempo completo en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, donde imparte las asignaturas de lógica y teoría de conjuntos.

Referencias

Golfarb, Warren. 1971. *Jacques Herbrand, Logical Writings.* Reidel Publishing Company. pp. X-312.

Herbrand, Jacques. 1930. *Recherches sur la théorie de la démonstration.* Tesis presentada ante la Universidad de París, 1930. [traducción al inglés en Goldfarb, 1971, pp. 44-202].

En este sentido, el llamado 'Teorema de Herbrand', punto central de la disertación doctoral de Herbrand, es una tentativa por reducir la demostrabilidad con cuantificadores a la demostrabilidad sin ellos, tratando de mostrar que tal operación es prescindible.

___________. 1930a. "Les bases de la logique hilbertiene". *Revue de Métaphysique et de Morale* **37**: 243-255. [Traducción al inglés en Goldfarb, 1971, pp. 203-214].

___________. 1930b. Nota sin firmar sobre Herbrand 1930, escrita por el mismo Herbrand, *Annales de l'Université de Paris* **6**: 186-189 [Traducción al inglés en Goldfarb, 1971, pp. 272-276].

Mathesis II 1₁ (2001) 165-169.

Una nota escrita por Jacques Herbrand acerca de su tesis doctoral (1931)

Jacques Herbrand

El trabajo en consideración está dedicado a las investigaciones matemáticas de cuestiones planteadas por una teoría de la lógica. La esencia de esta teoría, que Hilbert, su creador, denomina 'metamatemática', es el intento de resolver problemas de la filosofía de las matemáticas no mediante la discusión verbal, sino resolviendo cuestiones precisas. No es este el lugar para discutir qué tan a fondo penetra esta teoría en la base de los problemas; no obstante, con base en el análisis que hacemos de ella, veremos que se halla en acuerdo con el más estricto positivismo y el rigor más perfecto, y que se rehusa a considerar ciertas cuestiones relativas a la teoría del conocimiento —quizá en ello se encuentre su insuficiencia desde el punto de vista epistemológico. En todo caso la teoría es de gran interés, si acaso por los problemas que plantea. Hasta ahora, todas las ciencias —la física, la química, la sociología e incluso la biología (recordemos la finas investigaciones recientemente hechas por Volterra)— han planteado nuevos problemas para los matemáticos, y los han incitado a forjar nuevas herramientas. Por primera vez, debido a la metamatemática, la filosofía ha desempeñado dicho papel.

El punto de partida de esta teoría comprende las investigaciones de Russell, ellas mismas un fruto de lo hecho por los logicistas en el siglo diecinueve. Russell había mostrado en *Principia Mathematica* que para hacer matemáticas se podía utilizar, en lugar del lenguaje ordinario, una especie de estenografía, o lenguaje simbólico, que recurre a un número muy reducido de símbolos. Tres signos son suficientes en este lenguaje; las combinaciones de estos forman la oraciones. Pero Russell fue más lejos, y esto es lo interesante para nosotros: mostró que todas las demostraciones posibles en matemáticas se pueden reducir