

# PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA NA DETERMINAÇÃO DE PREÇO DE MULTIPRODUTOS EM UM CENÁRIO DE CURTO PRAZO

**Edilson Paulo**

Doutorando em Controladoria e Contabilidade – FEA/USP  
Professor da Universidade Presbiteriana Mackenzie  
Endereço: Rua da Represa, 75 – apto 41 – Bloco A - Rudge Ramos  
CEP 09641-030 – São Bernardo do Campo/SP – Brasil  
E-mail: e.paulo@uol.com.br  
Telefone: (11) 4365-3900

## RESUMO

As empresas se preocupam cada vez com maior intensidade no que concerne à política de formação de preço e *mix* de vendas de seus produtos, porque passou a ser um fator decisivo para o sucesso da empresa no atual ambiente dos negócios. Porém, não existe uma abordagem interdisciplinar sobre o tema, o que se faz necessário devido à sua complexidade e o inter-relacionamento entre as diversas variáveis quantitativas e qualitativas que influenciam na tomada de decisão. A formação do preço e o *mix* de vendas necessitam de uma abordagem mais ampla e que contemple um maior número de variáveis possíveis. Este trabalho teve como objetivo analisar alguns conceitos importantes para o estudo e desenvolver um modelo matemático de programação quadrática, que represente as relações existentes entre os diversos produtos e suas variáveis, e que atenda aos objetivos pretendidos pela empresa, por meio da determinação dos preços (e *mix*) de vendas, observando as restrições de capacidade instalada e de mercado.

Palavras-chave: Programação quadrática. Preço. Multiprodutos.

## ABSTRACT

Companies have gradually been developing a more serious concern with the policy of their products' price formation and sales mix, since this policy has become a decisive factor for the company success in the present day business environment. However, an interdisciplinary approach to this matter does not exist. To create one is necessary due to the problem's complexity and the interrelationship among several quantitative and qualitative variables that influence decision making. The price formation and sales mix need a wider approach and it should contemplate a larger number of possible variables. The present study has had as its aim to analyse important concepts for the studies and the development of a mathematical model of quadratic programming, which represents the existent relationships among diverse products and their variables, and which fulfils objectives intended by the company, through determination of the sales prices (and mix), taking into consideration the installed capacity and market constraints.

Keywords: Quadratic programming. Price. Multiproducts.

## 1 INTRODUÇÃO

Para que as empresas alcancem seus objetivos, elas devem se preocupar com a política de formação de preço e *mix* de vendas de seus produtos. Porém, esse tema se torna complexo

devido ao grande número de variáveis a serem consideradas no seu estudo. Assim, é comum que cada empresa desenvolva o seu próprio mecanismo de formação de preço, norteadas por informações internas e externas, tornando difícil a elaboração de uma regra ou modelo único. Nas teorias existentes entre os diversos campos que abordam tal tema, observa-se a inexistência de um desenvolvimento interdisciplinar. Porém, não existe uma abordagem interdisciplinar sobre o tema, o que se faz necessário devido à sua complexidade e o inter-relacionamento entre as diversas variáveis quantitativas e qualitativas que influenciam na política de formação do preço e do *mix* de venda dos produtos.

O desenvolvimento interdisciplinar se justifica, segundo Bernardi (1996, p.21), devido ao “fato de na pequena e média empresa poucos executivos administrarem e na grande empresa os especialistas terem visão ou área de atuação restritas, usualmente com integração deficiente”. Bernardi (1996, p.21) reitera afirmando que “outra razão para esta abordagem interdisciplinar é o fato de que o próprio estudante recebe uma carga teórica de conhecimentos fragmentados, normalmente não transmitidos de forma interativa, tendo por conseqüência dificuldades de entender o todo, as partes e a noção de equilíbrio”. Então a falta de desenvolvimento interdisciplinar é devido: a) à falta do conhecimento integrado da empresa por parte dos executivos; b) ao conhecimento científico fragmentado.

Outra dificuldade encontrada é que uma grande parte dos estudos efetuados é desenvolvida somente sobre a hipótese de um único produto. Esta situação não se enquadra na realidade da maioria das empresas, pois geralmente trabalham com mais de um produto/serviço, tornando, assim, falha a aplicação dos métodos e técnicas propostas por tais estudos.

Devido ao fato de a maioria das empresas oferecerem uma grande variedade de produtos, devem ser desenvolvidas metodologias de formação do preço e *mix* de produtos, que permitam:

- a) fixar um preço de venda que o mercado considere “justo” para os seus produtos;
- b) determinar o *mix* de produtos a serem produzidos e vendidos dentro de um determinado período, atendendo às necessidades do mercado;
- a) determinar a escala de operações das atividades a serem desenvolvidas pela empresa;
- b) alcançar lucratividade no longo prazo.

Para que se possa ter êxito em qualquer atividade, a empresa deve possuir uma adequada política de formação do preço e *mix* de vendas para os seus produto/serviços. No entanto, vale ressaltar que por si só isto não garante o sucesso da empresa, devido à complexidade e incerteza do mercado.

O breve cenário exposto motivou a seguinte questão de pesquisa: Com as ferramentas computacionais disponíveis, poderia ser desenvolvida uma metodologia de formação de preço e *mix* de produção/vendas que fosse aplicado em ambiente empresarial com multiprodutos?

Dessa forma, o objetivo geral deste estudo é desenvolver um modelo analítico, parcimonioso, para o estabelecimento do preço ótimo e *mix* ótimo de produtos em ambiente de multiprodutos, que maximize o resultado de curto prazo da empresa.

Para atingir o objetivo geral deste estudo, desenvolveu-se uma pesquisa exploratória. A seção 2 apresenta a revisão de literatura sobre a formação do preço de venda e *mix* de produtos e programação matemática. Na seção 3, foi desenvolvido o modelo da programação quadrática de formação de preço e de *mix* de produtos que maximize o resultado. Finalizando o artigo, teceram-se considerações finais sobre o problema.

## 2 FORMAÇÃO DO PREÇO DE VENDA

Muito se discute sobre a forma pela qual deve ser fixado o preço de venda dos produtos. Basicamente, pode-se classificar os sistemas de formação de preço de venda em duas categorias: os fixados pela análise do mercado e os determinados pelos custos da empresa (BERNARDI, 1996).

Atualmente, a premissa de que o preço de venda dos produtos e, conseqüentemente, o *mix* de produtos são determinados por uma função de custo e lucro é questionável (DOLAN e SIMON, 1998; ATKINSON et al., 2000), pois as forças mercadológicas se apresentam com maior influência sobre eles. Diversos fatores fizeram com que o cliente se tornasse um fator de primordial importância, como globalização, diversificação dos produtos, aumento da concorrência, escassez de recursos financeiros, crescente nível de exigência de qualidade, etc. (KOTLER, 1998).

A empresa está inserida em um mercado, para que possa atender às necessidades deste, e será remunerada por isso (LEONE, 2000). Para a empresa se tornar competitiva, deverá gerenciar seus custos e produção. Bernardi (1996, p.39) enfatiza que “o preço que o mercado estaria disposto a pagar não significa o mais alto possível a ser praticado, mas aquele que representa valor para o consumidor, o que resulta num preço competitivo”. A empresa tem que estabelecer um preço justo, que atenda às necessidades, características, qualidades exigidas pelo consumidor. Sendo assim, o mercado é o “validador” do preço (justo) estabelecido pela empresa para seus produtos e serviços.

Com isto, mercado e custos são duas fontes de informações quase sempre indissociáveis para que a empresa possa obter sucesso na tomada de decisões de preço de venda e, conseqüentemente, o *mix* de produtos (NAGLE; HOLDEN, 1995).

### 2.1 Decisões sobre preço e *mix* de produtos

Para a empresa alcançar o lucro desejado, deverá manter um adequado sistema de gerenciamento de custos e despesas, mas também deverá estabelecer uma política de preço coerente com os objetivos da empresa e exigências do mercado. Na realidade, a empresa busca uma rentabilidade para que remunere seus investimentos, levando em consideração o ramo de atividade, riscos sobre o tipo de negócio e a conjuntura econômica. Bernardi (1996) classifica as políticas de preços:

- a) em função dos objetivos - penetração no mercado, aumento da participação, preço de exclusividade (*skimming*), recuperação de caixa, maximização de resultados, promoção de produto/serviço específico, preço/qualidade, preço/oportunidade;
- b) em função da demanda - discriminação de preço;
- c) em função da concorrência - preço médio praticado, preços mais altos ou mais baixos em determinados patamares, preço competitivo elaborado de fora para dentro da organização.

Esta classificação proposta pelo autor não pode ser tomada como estática, pois as diversas políticas de preços podem ou deveriam se interagir em determinados momentos. Logicamente, a política de preço tem que estar afinada com os objetivos e metas da empresa, devendo ser estabelecido com base na procura e oferta dos produtos e observando os preços praticados pela concorrência.

Outra classificação é estabelecida por Atkinson et al. (2000) que analisa as decisões sobre preço e *mix* de produtos, quanto ao posicionamento da empresa no mercado e quanto ao período que abrange as decisões. Quanto ao posicionamento no mercado, as empresas são

classificadas em seguidoras de preços e líderes de preços; enquanto que, em relação ao período abrangido, as decisões são classificadas em decisões de curto e de longo prazo.

Empresa seguidora de preços é a “empresa que tem pequena ou nenhuma influência sobre as forças de oferta e de demanda do mercado e, por conseguinte, sobre os preços de seus produtos” (ATKINSON et al., 2000, p.266); restando adequar seu *mix* de produtos em função dos preços estabelecidos no mercado para seus produtos. Caracteriza-se como empresa seguidora de preços, empresas que estão em um ramo de atividade que possui inúmeros concorrentes, que isoladamente não influem nos preços, pois seus preços são fixados atendendo às condições de demanda e de oferta do mercado.

Empresa líder de preço é a “empresa que fixa ou oferece os preços de seus produtos porque desfruta de parte significativa do segmento de seu mercado” (ATKINSON, et al., 2000, p.268). Tais empresas são líderes de preços, porque conseguem obter uma diferenciação de seus produtos, criando, com essa diferenciação, valor para o cliente e, assim, possuem uma parcela significativa da participação do mercado, podendo estabelecer a liderança de preço.

Com base no período abrangido pela tomada de decisão, as decisões sobre preço e *mix* de produto são classificadas em decisões de curto ou de longo prazos. Nas decisões de curto prazo, a empresa deve avaliar se existe ou não capacidade instalada ociosa, em função das alternativas de produção adicional. As decisões de longo prazo procuram ajustar a capacidade produtiva para atender aos vários produtos demandados, introdução de novos produtos, eliminação de produtos existentes, alterações nos investimentos da empresa.

## 2.2 Os custos na formação do preço

O conhecimento constante, aprofundado e preciso dos custos da empresa levará os gestores a tomarem decisões em bases mais adequadas e, assim, a planejar suas investidas no mercado com maior flexibilidade (MORRIS, 1994). O custo do produto poderá ser estabelecido de formas diferentes, dependendo do tipo de informações necessárias para a tomada de decisão, existindo diversos métodos, sistemas e critérios para custear o produto.

Os custos dos produtos dependerão, inicialmente, do sistema de produção que estabelecerá o sistema de acumulação dos custos: por ordem de produção ou por processo. Posteriormente, a escolha do sistema de acumulação dos custos, é selecionado o método de custeio: absorção, variável ou integral; depois, as técnicas de custeio e outros dados que influenciam na determinação dos custos (PAULO; PEDROSA JUNIOR; LEONE, 2003).

O custeio por absorção é um método que incorpora tanto os custos fixos quanto os custos variáveis, sejam eles diretos ou indiretos ao produto. Dentro deste método, enquadram-se diversos critérios de custeio, como departamentalização, taxas pré-determinadas, custeio por atividade, unidade de esforço padrão etc. O custeio variável é um método que avalia os produtos com base nos custos e despesas variáveis. Neste método, também não importa se os custos são diretos ou indiretos; o que se leva em consideração é o aspecto da variabilidade (LEONE, 2000; PAULO, PEDROSA JUNIOR e LEONE, 2003).

Atkinson et al. (2000, p.373) explicam que em três circunstâncias existem justificativas econômicas para utilização do método de custeio por absorção para formação de preço:

- a) muitos contratos, principalmente, firmados com o setor público - os preços são determinados pelos custos totais mais um *mark-up*, inclusive para aqueles preços que têm um controle direto por algum órgão governamental;
- b) em relacionamento de longo prazo com cliente para fornecimento de bens e/ou serviços - o custeio por absorção incorpora todos os recursos despendidos, sendo relevante para as decisões de preço; e

- c) utilizado para estabelecimento do preço-meta - o preço é estabelecido sobre os custos totais mais um *mark-up*, sendo que o preço real praticado flutuaria em torno do preço-meta, conforme a variação da demanda e outras variáveis externas.

No entanto, o custeio por absorção apresenta-se inadequado em muitas circunstâncias, como instrumento gerencial de tomada de decisão a curto prazo, pois tem como principal dificuldade o tratamento a ser dado aos custos fixos, que podem levar a alocações arbitrárias e até enganosas, se não forem efetuados em bases adequadas. Independente do critério a ser adotado (departamentalização, taxas pré-determinadas, custeio por atividades, etc.), não será eliminada a subjetividade da alocação dos custos fixos aos produtos, sendo que a escolha do critério deve ser tomada com base na relação custo-benefício proporcionado a cada situação específica.

A adoção do custeio por absorção apresenta outra desvantagem em relação ao custeio variável, pois não será possível o conhecimento da margem de contribuição de cada produto dentro do processo produtivo e de comercialização. Porém, é bom lembrar que tal desvantagem refere-se à tomada de decisão de curto prazo, pois para decisões de longo prazo torna-se mais aconselhável do que o uso do custeio variável (LEONE, 2000).

A principal vantagem proporcionada pelo custeio variável é o conhecimento sobre a margem de contribuição de cada produto. Margem de contribuição é o resultado da diferença entre as receitas e os custos e despesas variáveis; sendo que, quanto maior for a margem de contribuição, maior será o lucro, desde que a margem de contribuição total seja maior que os custos fixos totais, isto é, que a margem de contribuição cumpra o seu papel de cobrir os custos e despesas fixas e posteriormente gerar lucro.

Entre as outras vantagens do custeio variável, pode-se destacar, também (SANTOS, 2000):

- a) auxilia a empresa decidir quais os produtos e/ou serviços contribuem satisfatoriamente para a geração de resultado positivo;
- b) indica quais os produtos que não estão gerando lucro para a empresa, levando a uma análise mais profunda das causas que ocasionaram tal situação;
- c) pode ser utilizado para criar alternativas de preços competitivos;
- d) auxilia na tomada de decisão sobre proposta de pedido adicional por parte de clientes;
- e) facilita a análise da captação de recursos financeiros para suprimento de disponibilidade;
- f) contribui na decisão sobre a utilização de recursos escassos na produção e comercialização dos produtos.

Contudo, todas essas decisões substanciadas no custeio variável devem ser em um plano de curto prazo, pois, como os custos fixos não são atribuídos ao custo do produto, a análise de longo prazo trará poucas informações úteis. No entanto, o preço de venda deve recuperar todos os recursos que estão à disposição da empresa, sejam eles fixos ou variáveis. Outra desvantagem do custeio variável é quando da sua utilização em empresas que possuam um ativo permanente elevado, pois para este tipo de empresa “poderá ser tão útil em termos de análise se não houver preocupação com relação à absorção dos custos fixos totais, principalmente no que tange às depreciações” (SANTOS, 2000, p.53).

### 2.3 O *mark-up* na formação do preço

Para se formar o preço de venda a partir do custo, normalmente, é utilizada uma metodologia baseada na utilização de um índice – multiplicador ou divisor – aplicado sobre os

custos (onde estiver o termo *custos*, leia-se *custos e despesas*) do produto, mercadoria ou serviço para se atingir o preço de venda, denominado de *mark-up*. Santos (2000, p.79) define *mark-up* com sendo “um índice aplicado sobre o custo de um bem ou serviço para formação do preço de venda”.

Os componentes do *mark-up* são determinados com base em relações percentuais sobre preço de venda e, em seguida, aplicados sobre o custo dos produtos. Todavia, constatam-se algumas diferenças, entre os estudiosos da área, em torno da formação ou constituição do *mark-up*, mas que em linhas gerais são:

- a) Custos fixos de produção (quando se utilizar o método de custeio variável);
- b) Impostos sobre vendas (ICMS, PIS e COFINS);
- c) Despesas comerciais (fixas e variáveis);
- d) Despesas administrativas (fixas e variáveis);
- e) Despesas financeiras (capital de terceiros); e
- f) Margem de lucro desejada.

Um ponto a ser observado é que o custo do capital próprio não é abordado na composição no *mark-up*, item que se julga de grande relevância, principalmente nos estudos de alternativas de novos investimentos ou projetos. O custo do capital próprio pode ser o custo de oportunidade da empresa, que é a “quantia de lucro perdido quando a oportunidade proporcionada por uma alternativa é sacrificada pela escolha da outra” (ATKHINSON et al., 2000, p.365). O lucro será o adicional proporcionado pelo preço de venda, após serem descontados todos os gastos, inclusive o custo do capital próprio. O lucro (ou prêmio) representa, em grande parte, o risco assumido pelo investidor pela opção de disponibilizar o seu capital na atividade da empresa, portanto pode assumir diferentes valores ou percentuais.

A aplicação do *mark-up* apresenta-se erroneamente em dois aspectos teóricos. O primeiro ponto é que a adoção de um percentual para representar o custo fixo (no caso da utilização do custeio variável) e a despesa fixa descaracteriza a natureza destes, tornando-os variáveis ao volume de venda, mesmo quando se leva em consideração o conceito de intervalo relevante. Por exemplo, determina-se que o custo fixo de produção seja representado pela percentagem de 30% sobre o preço de venda, se a receita com vendas em um determinado período for de \$1.000,00, o custo fixo será \$300,00; se em outro período a receita com vendas for de \$100.000,00, o seu custo fixo será \$30.000,00. Assim, o montante do custo fixo se altera conforme a variação do direcionador escolhido, independente de qualquer que seja esse direcionador parâmetro.

Outro ponto a ser observado, tanto no método do custeio variável, como no custeio por absorção, é o custo do capital próprio (custo de oportunidade) que deve ser calculado sobre o valor disponibilizado à empresa, pois seu comportamento não deve ser influenciado pelo volume de vendas, servindo então a mesma analogia acima utilizada para os custos e despesas fixas.

Observa-se ainda na fixação do preço de venda, por meio do *mark-up*, a inexistência de um estudo sobre a influência das leis de oferta e demanda sobre o preço de venda, sendo este um ponto importante para formação da política de formação de preço e *mix* de produtos. O preço de venda na atividade empresarial é fortemente influenciado pela oferta e demanda. Quando existe um desequilíbrio entre a demanda e a oferta, isto pressionará os preços praticados tanto para cima, quando a demanda é maior que a oferta, ou para baixo, quando a demanda é menor que a oferta (SAMUELSON, 1972; MONTORO FILHO et al., 1998; ROSSETTI, 2000).

Utilizando-se da estratégia de maximização dos lucros por meio do preço de venda, para se atingir a meta pretendida pela empresa, os demais fatores (variáveis) continuarão

influenciando na formação do preço de venda. A empresa é uma *célula viva* dentro do ambiente, no qual todos os *entes* inseridos nele se interagem, consumidores, fornecedores, concorrentes, governo, etc. Vale ressaltar que pode haver outras metas empresarias pretendidas pela empresa, mas este trabalho trata somente da maximização do resultado das empresas.

Em síntese, considera-se que, para formação de preço e *mix* de venda dos diversos produtos, tem-se a necessidade de analisar os custos e o mercado conjuntamente, tendo como premissas básicas (MALLO et al., 2000; HORNGREN, DATAR e FOSTER, 2004):

- a) o preço de venda deve cobrir todos os custos (e despesas) mais um retorno desejável pela empresa;
- b) o preço de venda deve ser aceito pelo mercado;
- c) o *mix* dos produtos deve ser adequado à capacidade instalada de produção e comercialização da empresa;
- d) o produto deve atender às necessidades do mercado, em termos de quantidade e qualidade;
- e) o preço de venda deve ser analisado levando-se em consideração a existência de produtos substitutos a preços mais competitivos;
- f) o preço e o *mix* de vendas dos produtos devem verificar a existência adequada de produtos complementares; e
- g) o preço e o *mix* de vendas dos produtos devem ser instrumentos para que a empresa alcance sua meta e seus objetivos estabelecidos.

Existem problemas associados à maximização do lucro, pois se presume que a empresa conheça as funções que representam a flutuação de oferta/demanda e de custos dos seus produtos, em relação a preços alternativos, que na realidade, são estimativas do que poderá ocorrer, com influências de outros fatores de difícil mensuração. Pode-se inserir fatores de difícil quantificação: a qualidade do produto, atendimento ao cliente, condições ambientais e sociais, entre outros.

### 3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA FIXAÇÃO DO PREÇO E MIX DE VENDA PARA MULTIPRODUTOS

As empresas vêm trabalhando com um modelo simplificado para estabelecer um preço que maximize os seus lucros, em que somente é considerada a existência de um único produto, mas, na realidade, esta situação é dificilmente observada no dia-a-dia, sendo que normalmente se opera com diversos produtos. Na formação do preço e *mix* de vendas de seus produtos, a empresa sofre influências de diversas variáveis de mercado e de sua capacidade produtiva, inclusive o preço e *mix* de um determinado produto afetam a formação do preço e *mix* de outros produtos, quando estes são concorrentes ou complementares.

Produtos “concorrentes são aqueles que guardam uma relação de substituição” (MONTORO FILHO et al., 1998, p.112), como, por exemplo, a manteiga e a margarina; e têm como característica que, se houver um aumento de preço do produto *X*, conseqüentemente, a sua demanda cairá em detrimento ao aumento da demanda do produto *Y*, assim, os produtos *X* e *Y* são produtos concorrentes. Os produtos complementares são aqueles consumidos *conjuntamente*, como, por exemplo, o pão e a manteiga; sendo que sua complementaridade pode ser técnica (automóvel e gasolina) ou psicológica (trabalhar com música); neste caso, se houver um aumento de preço do produto *X*, conseqüentemente, cairão as demandas dos produtos *X* e *Z*. Em síntese, os produtos concorrentes ou substitutos guardam uma relação de demanda inversa, enquanto os produtos complementares, uma relação direta com o bem analisado.

Deve-se estabelecer, então, um modelo matemático que represente as relações existentes entre os diversos produtos e as diversas variáveis existentes e que maximize os resultados da empresa, determinando os preços de venda e quantidades a serem vendidas para os multiprodutos, atendendo às restrições de capacidade instalada e de mercado. São chamadas de restrições de mercado, aquelas restrições externas da empresa e que condicionam a comercialização dos produtos, em termos de quantidade e preço, enquadrando-se nestas, restrições que evidenciam as relações de oferta e demanda de produtos concorrentes e de produtos complementares. As restrições de capacidade instalada são restrições internas da empresa, que limitam a fabricação ou a comercialização dos produtos, como, por exemplo, número de horas disponíveis da produção, capacidade de estocar ou de transportar a matéria-prima, estocar ou distribuir produtos prontos.

Devido ao conjunto de variáveis e de restrições envolvidas, bem como as relações existentes entre elas, devem ser utilizados instrumentos de análise quantitativa, especificamente para este problema, os estudos de programação não-linear. Apesar das facilidades encontradas na formulação matemática, existem situações em que a realidade econômica não pode ser descrita em modelos lineares (GREENE, 2003; WOOLDRIDGE, 2006).

Programação não-linear é um modelo matemático que desenvolve relações diversas, que objetivam a distribuição dos recursos limitados, sob restrições impostas pelos diversos aspectos, como tecnológicos e de mercado. Auxiliam no processo decisório das organizações, sendo que uma das mais comuns é a programação quadrática. Para Wagner (1986), a programação quadrática “consiste em uma função-objetivo constituída de termos lineares e quadráticos e de um conjunto de restrições lineares”.

Segundo Caixeta-Filho (2001, p.109), “não existe um algoritmo universal para programação não-linear, uma vez que os graus e complexidades de não-linearidade podem ser bastante diversificados”. Assim, não há garantias para obtenção da solução ótima global, e, sim, de pontos de ótimo local. Entretanto, devem ser observadas as condições de *Karush-Kuhn-Tucker*, um teste de otimalidade, em que devem ser satisfeitas, por um ponto de ótimo local, problemas de otimização não linear condicionada (BAZARAA, SHERALI e SHETTY, 1993; WAGNER, 1986).

### 3.1 Desenvolvimento do modelo analítico

O resultado de uma empresa é determinado pela diferença entre as receitas totais (RT) e os custos e despesas totais (CT), sendo que, quando a diferença for positiva, ou seja,  $RT > CT$ , indica resultado positivo ou lucro, porém, quando a diferença for negativa, ou seja,  $RT < CT$ , indica resultado negativo ou prejuízo. Assim, tem-se a maximização do resultado, ou seja, o maior lucro, quando a diferença positiva entre RT e CT for a maior possível. Para tanto, necessita-se desenvolver as funções matemáticas que representem a receita total (RT) e o custo e despesa total (CT).

#### a) Receita Total

A receita total de uma empresa é dada pela seguinte função:

$$RT = \sum_{i=1}^n q_i p_i$$

Em que:

$q_i$  = quantidade a ser produzida e vendida de cada produto  $i$

$p_i$  = preço de venda de cada produto  $i$

*b) Custo Total*

O custo (e despesa) total é dado por:

$$CT = \left( \sum_{i=1}^n q_i v_i \right) + F$$

Em que:

$q_i$  = quantidade a ser produzida e vendida de cada produto  $i$

$v_i$  = custo variável de cada produto  $i$

$F$  = custo fixo total

*c) Custo de Oportunidade (CO)*

O custo de oportunidade ( $CO$ ) será incluído para que possa ser analisado o seu efeito sobre a formação do preço e *mix* dos produtos, sendo representado por:

$$CO=IK$$

Em que:

$I$  = taxa de custo de oportunidade

$K$  = capital investido

*d) Lucro*

Com base nas equações anteriores, ter-se-ia, então, a função de lucro abaixo descrita:

$$L = RT - CT - CO$$

$$L = \sum_{i=1}^n q_i p_i - \left( \sum_{i=1}^n q_i v_i + F \right) - IK$$

O objetivo deste trabalho é estabelecer um modelo que possa determinar: a variável quantidade a ser produzida/vendida ( $q_i$ ) e o preço de preço ( $p_i$ ) que maximize o resultado da empresa. As demais variáveis do problema são conhecidas pela empresa, que são os custos variáveis de cada produto  $i$  ( $v_i$ ), o custo fixo total ( $F$ ), a taxa de custo de oportunidade ( $I$ ) e o capital investido ( $K$ ).

*e) Restrições de capacidade instalada*

Podem existir várias restrições de capacidade instalada, o que condiciona a empresa a atender parte da demanda do mercado. Estas restrições podem ser, por exemplo, o total de horas disponíveis para trabalho, o consumo de uma determinada matéria-prima etc. Pode-se ter, então, inúmeras funções de restrição de capacidade de produção e comercialização, que podem ser representadas por funções de quantidades a serem produzidas e vendidas de cada produto  $i$ , atendendo à restrição ou fator limitante de produção, sendo:

$$F(q_i) \leq b_i$$

Em que:

$b$  é uma constante que representa o limite máximo a ser assumido do fator limitante

*f) Restrições de mercado*

Podem existir várias restrições de mercado que representem relações existentes entre variação de preço e demanda/oferta, produtos substitutos ou complementares etc, representadas por funções de  $q_i$  e  $p_i$ , sendo:

$$F(q_i, p_i) \{ \leq ; = ; \geq \} b_i$$

$$F(q_i) \{ \leq ; = ; \geq \} b_i$$

Em que:

$b$  é uma constante que representa o limite máximo, mínimo ou condição de igualdade a ser assumido do fator limitante.

A função de demanda é a mais comum das restrições de mercado, representada por:

$$q_i = T_i - \alpha p_i$$

Em que:

$q_i$  = quantidade a ser vendida do produto  $i$  no período

$T$  = demanda máxima no período

$\alpha$  = constante que representa a elasticidade

$p_i$  = preço de venda do produto  $i$

*g) Simplificando a função de lucro*

Sendo a função de demanda baseada no nível de preço praticado, a mais significativa das restrições de mercado, e que todas as restrições de capacidade instalada e as demais restrições de mercado são dadas por funções de quantidade produzida/vendida ( $q_i$ ), pode-se simplificar a função de lucro, transformando esta função como uma função somente de quantidades a serem produzidas e vendidas, já que os demais termos são constantes. O preço de venda será determinado pela substituição na fórmula de demanda da quantidade calculada. A função de preço ficará:

$$q_i = T_i - \alpha_i p_i \Rightarrow p_i = \frac{T_i - q_i}{\alpha_i}$$

Substituindo " $p_i$ " na função de lucro, tem-se:

$$L = \sum_{i=1}^n q_i p_i - \left( \sum_{i=1}^n q_i v_i + F \right) - IK$$

$$L = \sum_{i=1}^n \left[ q_i \left( \frac{T_i - q_i}{\alpha_i} \right) \right] - \left( \sum_{i=1}^n v_i q_i + F \right) - IK$$

$$L = \sum_{i=1}^n \left( \frac{q_i T_i - q_i^2}{\alpha_i} \right) - \sum_{i=1}^n v_i q_i - F - IK$$

Sendo que  $F$ ,  $I$  e  $K$  assumem valores constantes e que a função-objetiva será maximizar  $L$ , pode-se então eliminar as variáveis  $F$ ,  $I$  e  $K$  da função  $L$ ; tornando-se esta uma representação da Contribuição Marginal Total ( $M$ ) dos produtos, pois, em programação

matemática, maximizar (ou minimizar) uma função-objetiva que possua termos constantes (no nosso caso F, I e K são valores constantes), o resultado das variáveis ajustáveis a serem calculadas será o mesmo que maximizar (ou minimizar) esta função-objetiva sem estes termos constantes. Então, simplificando:

$$M = \sum_{i=1}^n \left( \frac{q_i T_i - q_i^2}{\alpha_i} \right) - \sum_{i=1}^n v_i q_i$$

E sendo  $\theta_i = \frac{1}{\alpha_i}$ , tem-se:

$$M = \sum_{i=1}^n \theta_i q_i T_i - \sum_{i=1}^n \theta_i q_i^2 - \sum_{i=1}^n v_i q_i$$

$$M = - \sum_{i=1}^n \theta_i q_i^2 + \sum_{i=1}^n \theta_i q_i T_i - \sum_{i=1}^n v_i q_i$$

$$M = - \sum_{i=1}^n \theta_i q_i^2 + \sum_{i=1}^n [(\theta_i T_i - v_i) q_i]$$

O modelo matemático genérico de maximização do lucro de uma empresa que trabalha com diversos produtos e que possua uma ou mais restrições será descrita da seguinte forma:

$$\text{Max} M = - \sum_{i=1}^n \theta_i q_i^2 + \sum_{i=1}^n [(\theta_i T_i - v_i) q_i]$$

Sujeito a:

$$F(q_i) \{ \leq ; = ; \geq \} b_i$$

$$q_i \geq 0$$

Em que:

$$\theta_i = \frac{1}{\alpha_i},$$

$q_i$  = quantidade a ser produzida e vendida do produto  $i$  no período

$T$  = demanda máxima no período

$\alpha$  = constante que representa a elasticidade

$v_i$  = custo variável unitário do produto  $i$

$p_i$  = preço de venda do produto  $i$

Lembrando que a variável  $p_i$ , que representa o preço de venda de cada produto  $i$ , foi substituída na função-objetiva e que as demais restrições são funções de quantidade vendida e produzida dos produtos  $i$ .

Nota-se, também, que o modelo desenvolvido se enquadra em um modelo de programação quadrática, pois a função-objetivo é descrita por termos lineares e quadráticos e as restrições, em termos lineares.

### 3.2 Exemplo de aplicação do modelo quadrático proposto

Com o intuito de melhor compreensão, desenvolve-se um exemplo do modelo proposto. Uma determinada empresa fabrica três produtos e colheram-se os dados, que constam na Tabela 1.

**Tabela 1 – Dados da empresa hipotética**

	Produto A	Produto B	Produto C
Custo e despesa variável unitário	\$40	\$60	\$80
Tempo necessário para produzir uma unidade	2 h	3 h	5 h
Matéria-prima A utilizada para produzir uma unidade	5k	3k	4k
Matéria-prima B utilizada para produzir uma unidade	1k	2k	2k
Demanda máxima do produto/mês	1000u	1500u	1000u
Constante da relação preço/demanda (elasticidade)	2	3	2

Fonte: dados aleatórios.

A empresa possui uma capacidade produtiva de 800 horas mensais, e o consumo das matérias-primas A e B não podem ultrapassar o consumo mensal de 1.500 kg e 1.000 kg, respectivamente. Devido aos produtos A e C serem produtos complementares do produto B, as quantidades de A e C devem ser no mínimo a metade da quantidade de B, para que não ocasionem problemas de abastecimento dos três produtos. Com isto, as variáveis das funções serão:

- $q_1$  = quantidade a ser produzida e vendida do produto A
- $q_2$  = quantidade a ser produzida e vendida do produto B
- $q_3$  = quantidade a ser produzida e vendida do produto C
- $p_1$  = preço de venda do produto A
- $p_2$  = preço de venda do produto B
- $p_3$  = preço de venda do produto C
- $v_1$  = custo variável unitário do produto A
- $v_2$  = custo variável unitário do produto B
- $v_3$  = custo variável unitário do produto C

#### a) Receita Total

A receita total de uma empresa é dada pela seguinte função:

$$RT = q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3$$

#### b) Custo Variável Total (CVT)

O custo variável total é dado por:

$$CVT = q_1v_1 + q_2v_2 + q_3v_3$$

$$CVT = 40q_1 + 60q_2 + 80q_3$$

#### c) Contribuição Marginal Total (M)

Contribuição Marginal Total dos produtos é dada pela diferença entre somatório das receitas totais (RT) e somatório dos custos variáveis totais (CVT):

$$M = RT - CVT$$

$$M = (q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3) - (q_1v_1 + q_2v_2 + q_3v_3)$$

#### d) Restrição de horas trabalhadas

O total de horas trabalhadas nos produtos A, B e C não pode ser superior a 800 horas trabalhadas mensais. A restrição de horas trabalhadas é dada por:

$$2q_1 + 3q_2 + 5q_3 \leq 800$$

e) *Restrição de matéria-prima A*

O total de consumo mensal de matéria-prima A pelos produtos A, B e C não pode ser superior a 1500 kg. A restrição de matéria-prima A é dada por:

$$5q_1 + 3q_2 + 4q_3 \leq 1500$$

f) *Restrição de matéria-prima B*

O total de consumo mensal de matéria-prima B pelos produtos A, B e C não pode ser superior a 1.000 kg. A restrição de matéria-prima B é dada por:

$$q_1 + 2q_2 + 2q_3 \leq 1000$$

g) *Restrição de mercado*

As funções de demanda dos produtos A, B e C são dadas pelas funções abaixo:

$$q_1 = 1000 - 2p_1$$

$$q_2 = 1500 - 3p_2$$

$$q_3 = 1000 - 2p_3$$

$$q_1 \geq \frac{q_2}{2}$$

$$q_3 \geq \frac{q_2}{2}$$

h) *Restrição de negatividade*

Nenhuma das variáveis pode assumir número negativo:

$$q_1 \geq 0; q_2 \geq 0; q_3 \geq 0$$

i) *Simplificando a função-objetiva*

A função de demanda ficará:

$$p_1 = 500 - \frac{q_1}{2}$$

$$p_2 = 1500 - \frac{q_2}{3}$$

$$p_3 = 1000 - \frac{q_3}{2}$$

Substituindo na função objetivo:

$$M = \left[ q_1 \left( 500 - \frac{q_1}{2} \right) + q_2 \left( 1500 - \frac{q_3}{3} \right) + q_3 \left( 1000 - \frac{q_3}{2} \right) \right] - (q_1 v_1 + q_2 v_2 + q_3 v_3)$$

$$M = \left( 500q_1 - \frac{q_1^2}{2} + 1500q_2 - \frac{q_2^2}{3} + 1000q_3 - \frac{q_3^2}{2} \right) - (40q_1 + 60q_2 + 80q_3)$$

$$M = -\frac{q_1^2}{2} - \frac{q_2^2}{3} - \frac{q_3^2}{2} + 500q_1 - 40q_1 + 1500q_2 - 60q_2 + 1000q_3 - 80q_3$$

$$M = -\frac{q_1^2}{2} - \frac{q_2^2}{3} - \frac{q_3^2}{2} + 460q_1 + 1440q_2 + 920q_3$$

Comprovando a fórmula genérica anteriormente descrita:

$$\text{Max}M = -\sum_{i=1}^n \theta_i q_i^2 + \sum_{i=1}^n [(\theta_i T_i - v_i) q_i]$$

*j) Modelo matemático*

O modelo matemático para maximização de resultado por meio do preço de venda e *mix* de multiprodutos com multirrestrições será:

$$\text{Max}M = -\frac{q_1^2}{2} - \frac{q_2^2}{3} - \frac{q_3^2}{2} + 460q_1 + 1440q_2 + 920q_3$$

Sujeito a:

$$2q_1 + 3q_2 + 5q_3 \leq 800$$

$$5q_1 + 3q_2 + 4q_3 \leq 1500$$

$$q_1 + 2q_2 + 2q_3 \leq 1000$$

$$q_1 - \frac{q_2}{2} \geq 0$$

$$-\frac{q_2}{2} + q_3 \geq 0$$

$$q_1, q_2, q_3 \geq 0$$

*k) Solução do modelo matemático*

O modelo matemático para maximização de resultado, acima apresentado, tem a característica de ser uma função linear quadrática, sendo que, para sua solução, utiliza-se o *software MatLab*<sup>®</sup>, descrevendo o problema da seguinte maneira (as expressões abaixo referem-se às sintaxes próprias utilizadas pelo *software* para solucionar problema quadrático):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & -1 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 800 \\ 1500 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; f = \begin{bmatrix} -460 \\ -1440 \\ -920 \end{bmatrix}$$

$$q = qp(f, A, b)$$

$$\gg val = -.5*(x'*H*x) - f'*x$$

O programa retornará às quantidades “61”, “123” e “61”, respectivamente, para  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$ , que maximizam o problema acima; tendo como resultado ótimo o valor de 252536, ou seja, para maximizar o resultado da empresa por meio das variáveis apresentadas, as quantidades do produto A, B e C são respectivamente, 61, 123 e 61, ao preço de venda de \$469,50, \$1.459,00 e \$969,50, respectivamente, e a contribuição marginal ótima será \$252.536,00. Lembrando que o preço de venda deve ser encontrado substituindo as quantidades do produto A, B e C, pelas suas funções de preços de cada produto i.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A determinação do preço e *mix* de venda de produtos sofrem diversas influências dos múltiplos interesses que pressionam os preços e alteram o nível de demanda, estabelecendo na verdade um ambiente de instabilidade na gestão empresarial. A formação do preço e *mix* de vendas exigem um gerenciamento participativo nos diversos estágios de processo, da pesquisa e desenvolvimento de um novo produto até a fase pós-venda dele.

É aceitável que os agentes internos prefiram obter o preço mais alto, porém, se o preço não for bom para o mercado sua demanda encolherá. Na outra ponta, o mercado certamente procurará o menor preço (acompanhado de outros atributos do produto) e, para atender a essa motivação, a empresa se deparará com o custo do processo produtivo. No entanto, o mercado é quem valida o preço de venda.

Entende-se que o preço básico de venda passa necessariamente pela análise conjunta do custo do produto e das variáveis de mercado e de produção. Muitas empresas aplicam o *mark-up* sobre os custos de seu produto para extrair o preço de venda, porém, considera-se que existem outras variáveis importantes na tomada de decisão que não estão representadas em sua composição, como a relação de demanda-oferta, limitações de capacidade instalada. Tais fatores podem ser avaliados por meio de modelos matemáticos, dando uma melhor contribuição para a formação do preço e *mix* de venda dos produtos.

Este trabalho apresentou um modelo matemático de programação quadrática, que determina a maximização de resultados, por meio das variáveis, preços e *mix* de produtos, obedecidas às restrições de capacidade instalada e mercado. O modelo foi desenvolvido sob condições de concorrência perfeita, ou seja, aquela em que nenhuma empresa isoladamente influencia significativamente no comportamento da demanda e procura do mercado. Outra limitação importante a ser considerada sobre o modelo é que a empresa conheça as funções que representem o comportamento do custo total e demanda de seus produtos, e que estas, juntamente com a função representativa da receita total, assumam características lineares.

Modelos de programação não-linear podem ser desenvolvidos e aplicados para formação de preço e *mix* de vendas para diversos produtos, utilizando-se da teoria desenvolvida neste trabalho. Assim, para futuros trabalhos sobre o tema, recomenda-se a análise da aplicabilidade destes modelos em casos concretos, para que se possa avaliar o seu grau de eficiência e eficácia.

#### REFERÊNCIAS

ATKINSON, Anthony et al. *Contabilidade gerencial*. São Paulo: Atlas, 2000.

BAZARAA Mokhtar S.; SHERALI, Hamif D.; SHETTY, C. M. *Nonlinear programming: theory and algorithms*. 2. ed. New York: John Wiley, 1993.

BERNARDI, Luiz A. *Manual de formação de preço*. São Paulo: Atlas, 1996.

CAIXETA FILHO, J.V. *Pesquisa operacional: técnicas de otimização aplicadas a sistemas agroindustriais*. São Paulo: Atlas, 2001. 171 p.

DOLAN, Robert J.; SIMON, Hermann. *O poder dos preços: as melhores estratégias para ter lucro*. São Paulo: Futura, 1998.

GREENE, William H. *Econometric analysis*. 5. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2003.

HORNGREN, Charles T.; DATA, Srikant M.; FOSTER, George. *Contabilidade de custos: uma abordagem gerencial*. 11. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2004.

KOTLER, Philip. *Princípios de marketing*. Traduzido por Vera Whately. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

LEONE, George Sebastião Guerra. *Custos: planejamento, implementação e controle*. 3 ed. São Paulo: Atlas, 2000.

NAGLE, Thomas T.; HOLDEN, Reed K. *The strategy and tactics of pricing*. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1995.

MALLO, Carlos et al. *Contabilidad de costos y estratégica de gestión*. Madrid: Prentice Hall Iberia, 2000.

MONTORO FILHO, André Franco; et al. *Manual de economia*. 3. ed. São Paulo: Saraiva, 1998.

MORRIS, Michael H. *Política de preço em um mercado competitivo e inflacionado*. São Paulo: Atlas, 1994.

PAULO, Edilson; PEDROSA JUNIOR, Carlos; LEONE, George S Guerra. Taxinomia dos sistemas e critérios de custeio. CONGRESSO INTERNACIONAL DE CUSTOS, 8. *Anais...* Punta del Este/ Uruguai: Congresso Internacional de Custos, 2003. CD-ROM.

ROSSETTI, José Paschoal. *Introdução à economia*. 18. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

SAMUELSON, Paul Anthony. *Introdução à análise econômica*. 7. ed. Rio de Janeiro: Agir, 1972.

SANTOS, Joel José dos. *Análise de custos: um enfoque para contribuição marginal*. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

WAGNER, Harvey M. *Pesquisa operacional*. Traduzido por Paulo Antônio Mariotto. 2. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1986.

WOOLDRIDGE, Jeffrey M. *Introdução à econometria: uma abordagem moderna*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

**Artigo recebido em 01/03/06 e aceito para publicação em 19/06/06.**