

ARTÍCULO

## FÍSICA ESTADÍSTICA DE LOS SISTEMAS SOCIALES

Gerardo Íñiguez

Centre of Excellence in Computational Complex Systems Research,  
Department of Biomedical Engineering and Computational Science,  
School of Science and Technology, Aalto University,

## Física estadística de los sistemas sociales

### Resumen

El campo de sistemas complejos nos da una nueva perspectiva para observar el mundo a nuestro alrededor: un fenómeno natural puede ser visto como un conjunto de partes e interacciones (una red) y características medibles de éstos (una función), que evolucionan en el tiempo de forma conjunta. Bajo este enfoque, la frontera entre diversas disciplinas científicas se desvanece, con sistemas biológicos, sociales y tecnológicos que comparten la misma estructura de red, y herramientas teóricas comunes para explicar los procesos que suceden sobre tales redes. En este artículo resumimos algunos de los logros del campo de sistemas complejos, con especial interés en el estudio de las redes sociales.

**Palabras clave:** sistemas complejos, coevolución, formación de opinión, (complex systems, coevolution, opinion formation)

### Introducción

La vida es compleja. Desde el grano de arena más pequeño hasta las galaxias que forman nuestro Universo, pasando por la bioquímica celular, las interacciones humanas en una sociedad y los ecosistemas terrestres, somos testigos de un sin fin de fenómenos, cuya estética puede maravillarnos y aterrarnos por igual, pues su bello comportamiento externo generalmente oculta una multitud de procesos, que pueden interactuar o no de acuerdo a su escala espacio-temporal y el medio ambiente que los rodea, lo cual usualmente resumimos como *complejidad*. Durante siglos, los físicos han respondido a este rompecabezas de la Naturaleza tomando las piezas más simples que puede haber: (a) los sistemas de unas pocas partículas, que pueden ser descritos por ecuaciones matemáticas deterministas y solubles analíticamente [29, 41], y (b) los sistemas de muchísimas partículas donde el estudio de su comportamiento global se simplifica con un análisis estadístico [35, 55]. En otras palabras, una escala fija pequeña (como la del grano de arena) o grande (como la de una galaxia) nos permite despreocupar interacciones o efectos del medio ambiente para simplificar un tratamiento matemático del sistema, pero los fenómenos confinados en las múltiples escalas intermedias (como los tejidos celulares, las personas y los ecosistemas) siguen condenados a ser llamados *complejos*.

Las últimas décadas han presenciado el rápido desarrollo de varias herramientas teóricas para describir tales sistemas complejos basadas en el concepto de red [2, 10, 21, 46]. Bajo este enfoque, un sistema complejo puede ser modelado como un conjunto de *nodos* que representan las partes o elementos del sistema, y un conjunto de enlaces que representan las interacciones o relaciones entre éstos. Más aún, los nodos y enlaces pueden estar asociados a *variables de estado* que miden las características o propiedades relevantes de las partes e interacciones del sistema.

Cabe mencionar que la extrema generalidad del concepto de red tiene ventajas y desventajas. Por un lado nos permite usar el mismo análisis matemático para estudiar fenómenos, que aparentemente no tienen nada que ver, como las reacciones químicas de catálisis y las interacciones evolutivas entre especies [34]. Por el otro, la definición precisa de nodos, enlaces y variables de estado depende del grado de descripción que buscamos y la información que

tenemos acerca del fenómeno, por lo que un mismo sistema complejo puede estar asociado a muchas redes con distintas propiedades.

Siguiendo la tradición ancestral de los físicos, podemos considerar primero casos extremos en que el estudio de las redes complejas se simplifique de cierta manera. Si la escala de tiempo en que las variables de estado cambian es lo suficientemente lenta como para que las podamos considerar constantes, sólo es relevante la *estructura de la red*; es decir, la forma específica en que los nodos y enlaces están distribuidos, y cambian en el tiempo. Esto nos lleva, directamente, al establecimiento y análisis estadístico de redes arquetípicas como las *redes aleatorias* [14, 25], *las redes de mundo pequeño* [64, 66] y *las redes libres de escala* [3, 5], de las cuales hablaremos un poco en la sección II. En el caso extremo opuesto los nodos y enlaces no cambian y la estructura se puede considerar fija, por lo que únicamente nos interesa la *función de la red*, es decir, la evolución temporal de las variables de estado. Como explicamos brevemente en la sección III, existe una gran variedad de dinámicas sobre redes que han sido estudiadas a lo largo de los años (como la morfogénesis en pieles de animales [7, 9], la propagación epidémica de enfermedades [11, 12] y la sincronización en sistemas biológicos [1, 59]), cuyas propiedades pueden cambiar drásticamente al modificar el tipo de red sobre la cual se desarrollan.

Como usualmente sucede, los casos intermedios son a la vez más difíciles e interesantes. Cuando la estructura y la función de una red cambian en la misma escala de tiempo es imposible ya despreciar los cambios en una u otra, por lo que tenemos que considerar sus evoluciones temporales de forma simultánea. Esto implica que la aparición o desaparición de nodos y enlaces afectaría los valores de las variables de estado, y a la vez tales variables modificarían el número de nodos y enlaces en la red, un proceso conocido como *coevolución* [30, 45]. La coevolución de los sistemas complejos es especialmente clara al analizar la formación de opinión en un sistema social: la forma en que cada individuo modifica su opinión respecto a un tema dado depende de su personalidad y las personas con las cuales discute el tema, y a la vez tal red de amistades o conocidos cambia debido a la propia dinámica de opiniones [28, 36, 37, 68]. En la sección IV resumimos algunos resultados de nuestra investigación en la coevolución de sistemas sociales [31-33].

Antes de ir a los detalles, podemos dar una serie de referencias y enlaces para aquellos interesados en la investigación en sistemas complejos. Existen ya algunos libros que abordan el tema a nivel divulgación de la ciencia [4, 65], otros que requieren cierto conocimiento de física y matemáticas [15, 22, 64], así como recopilaciones de artículos importantes con introducciones editoriales [49]. La mayoría de los artículos citados aquí pueden ser accesados de forma libre en arXiv.org o con suscripción académica a través de Google Scholar. El sitio [videlectures.net](http://videlectures.net) contiene una infinidad de videos de conferencias de investigadores sobresalientes en el campo, como A.-L. Barabási, S. Fortunato, S. Havlin, J. Kertész, M. Newman y A. Vespignani. Finalmente, en el apéndice (A) se encuentran los enlaces a varios grupos de investigación en sistemas complejos alrededor del mundo.

## Estructura de las redes

La estructura de las redes se estudia en una rama de las matemáticas conocida como Teoría de Gráficas [13, 14, 20, 67]. Las palabras *gráfica* y *red* son prácticamente sinónimos en la literatura (de la misma forma que los conceptos de *sistema complejo* y *red compleja*), aunque *gráfica* es más común en el ambiente matemático, y *red* suele denotar la descripción de algún fenómeno natural. Históricamente la Teoría de Gráficas fue iniciada por el matemático suizo L. Euler, quien

en 1736 resolvió el “problema de los puentes de Königsberg” (encontrar un camino cerrado que cruce cada uno de los siete puentes de la ciudad prusa sólo una vez) al abstraer la estructura de la ciudad como una gráfica.

Al considerar los lados del río y las islas como nodos y los puentes como enlaces, Euler demostró que en la gráfica de 4 nodos y 7 enlaces resultante no existe un camino que recorra cada enlace una sola vez y regrese al mismo nodo (algo conocido ahora como un ciclo euleriano [20]). Entre todo el trabajo que se ha desarrollado en Teoría de Gráficas desde la época de Euler hasta la fecha, el estudio de las *redes estocásticas* es de especial interés para el campo de sistemas complejos. En una red estocástica, los nodos representan *agentes* del sistema complejo (las partes del fenómeno que queremos estudiar, ya sean personas, proteínas, especies, etcétera), y los enlaces se crean o destruyen de manera aleatoria siguiendo un conjunto de reglas que intentan copiar el comportamiento real de los agentes.

## Redes aleatorias

Posiblemente la clase de redes estocásticas más estudiadas hasta el momento corresponde a las redes aleatorias propuestas por P. Erdős y A. Rényi en 1959 [25]. En éstas, cada par de los  $N$  nodos en la red es conectado al azar con probabilidad  $p$ , por lo que el número promedio de enlaces en la red es  $\langle E \rangle = pN(N - 1)/2$ . El número promedio de enlaces que cada nodo tiene (el grado promedio de la red) puede entonces calcularse de manera sencilla como  $\langle k \rangle = 2\langle E \rangle / N = p(N - 1) \sim pN$ . Erdős y Rényi mostraron que en el límite asintótico en que  $p$  es muy pequeña y  $N$  muy grande (de tal forma que  $\langle k \rangle$  sea constante, gracias a la relación anterior) las redes aleatorias son relativamente sencillas de tratar, por lo que hay muchos resultados al respecto. Por ejemplo, la *longitud característica promedio* (el mínimo número promedio de enlaces que separan a dos nodos cuales quiera en la red) está dada por (**insertar imagen**)  $\langle L \rangle \sim \ln N / \ln \langle k \rangle$ , propiedad conocida como “efecto de mundo pequeño”, pues las redes aleatorias muy grandes tienen longitudes características relativamente cortas [14, 27].

Las redes de Erdős y Rényi son en muchos sentidos las redes más estocásticas que pueden existir, pues cada enlace existe independientemente de los demás (no hay *correlaciones* en el sistema), lo cual implica una estructura “homogénea” sin presencia de comunidades (en la sección IV hablaremos un poco más acerca del concepto de comunidad en redes). Por esta razón las redes aleatorias se usan normalmente como el *modelo nulo* de un fenómeno natural, con la estructura que el sistema real tendrá si no existieran interacciones entre sus elementos, o si tales interacciones tuvieran la forma más simple posible. La prolífica actividad científica de P. Erdős (cientos de publicaciones y coautores) tuvo su marca en el folclor matemático con la aparición del *número de Erdős*, el número de enlaces que separa a Erdős de cualquier otro investigador en una red de colaboración científica. Los números de Erdős, generalmente, son pequeños (menores a 10) a pesar de lo que pueda indicar la intuición, e incluso existe un Proyecto en internet dedicado a investigar su distribución en la comunidad matemática.

## Redes de mundo pequeño

En 1967, el psicólogo estadounidense S. Milgram condujo un curioso experimento social [42] que dio la primera evidencia empírica del efecto de mundo pequeño que ya hemos mencionado. Milgram le pidió a un conjunto de personas en Nebraska hacer llegar cartas a individuos particulares en Boston, bajo la condición de que las cartas sólo podían ser transferidas a conocidos que

presumiblemente eran más cercanos al destinatario en Boston. El resultado fue que un promedio de sólo 6 pasos era necesario para enviar las cartas, a pesar del gran número potencial de individuos en el camino (la población de Estados Unidos) [63]. Tres décadas después, D. J. Watts y S. Strogatz propusieron un modelo de red estocástica que presenta esta propiedad de una forma notable por su simplicidad, *las redes de mundo pequeño* [66]. Empezando por una red ordenada (como un anillo, por ejemplo), Watts y Strogatz añadieron enlaces “atajo” al azar de forma progresiva para disminuir la longitud característica en la red, y analizaron el cambio en el *coeficiente de agrupamiento* promedio  $\langle C \rangle$ , una medida de la cantidad promedio de triángulos alrededor de un nodo, o en otras palabras, la “aglomeración” de la red. Si se agregan pocos atajos, la red sigue siendo esencialmente un anillo por lo que  $\langle L \rangle$  y  $\langle C \rangle$  son grandes, mientras que si se agregan muchos atajos la red se aproxima a una red aleatoria con  $\langle L \rangle$  y  $\langle C \rangle$  pequeños. De manera sorprendente, existe un régimen intermedio donde existen *longitudes características cortas* y *coeficientes de agrupamiento altos* [64], lo cual intuitivamente es adecuado para explicar la estructura social revelada por el experimento de Milgram.

Desde entonces, esta estructura de mundo pequeño ha sido verificada en muchos otros tipos de redes, incluyendo redes de colaboración científica o entre actores de películas, redes ecológicas, celulares y metabólicas, y redes neuronales en bacterias o eléctricas en ciudades [2, 10, 46]. El estudio de este tipo de sistemas ha sido facilitado en los últimos años por la creciente capacidad computacional de análisis, y la existencia de bases de datos que capturan y cuantifican el comportamiento de fenómenos a gran escala, como la estructura social asociada a redes de llamadas telefónicas [51, 52], redes de amistad en videojuegos [60] o redes sociales tipo Facebook [39]. Aunque una cantidad considerable de estos estudios utilizan bases de datos con derechos de autor, en algunos sitios web de investigadores como M. Newman y U. Alon se pueden descargar de forma gratuita bases de datos correspondientes a muchas redes famosas en varias disciplinas.

## Redes libres de escala

Para finalizar esta sección hablemos un poco de las *redes libres de escala* de A.-L. Barabási y R. Albert [3, 5], un tipo de redes estocásticas en crecimiento, que intentan simular la forma en que la estructura de las redes reales evoluciona en el tiempo. Empezando por una red “semilla” de unos cuantos nodos conectados entre sí, en cada paso de tiempo se agregan nuevos nodos que se conectan de forma aleatoria a los viejos con una probabilidad proporcional al grado del viejo nodo. Esta regla (conocida como *conexión preferencial*) adopta la filosofía “los ricos se hacen más ricos” en el caso de una red en crecimiento, y tiene diversos antecedentes en el estudio de árboles taxonómicos en biología, ganancias monetarias en una sociedad y las redes de citas entre artículos científicos [15]. Barabási y Albert mostraron, que esta regla produce una *distribución de grado* (la probabilidad de encontrar un nodo en la red con grado dado  $k$ )  $P(k) \sim k^{-\gamma}$  con  $\gamma$  cierto exponente característico Erdős característico definido por la red estudiada, lo cual implica que la red está formada por unos pocos nodos centrales con muchísimas conexiones (“hubs”) y una gran cantidad de nodos con grado pequeño.

En otras palabras, las redes libres de escala son muy resistentes a “ataques” aleatorios (pues la eliminación de un nodo al azar no modifica la estructura general de la red) y muy débiles ante “ataques dirigidos” que eliminan nodos centrales y por tanto separan la red en pedazos [3, 17]. Este tipo de resultados han tenido implicaciones importantes en el estudio de redes reales sin escala como Internet, la WWW, redes de contactos sexuales humanos y procesos de

propagación de enfermedades biológicas y de virus electrónicos [53, 54].

### **Función de las redes**

Una vez que hemos estudiado las propiedades de una estructura de red dada, podemos considerar tal distribución de nodos y enlaces como fija y analizar la función de la red; es decir, la forma en que ciertas variables de estado definidas sobre los nodos y enlaces evolucionan en el tiempo. Estas variables de estado codifican la información relevante que queremos describir en el sistema, como la opinión o grado de amistad entre individuos en una sociedad [16], o la concentración de químicos en una red de morfógenos [7]. Claramente, el comportamiento temporal de las variables de estado depende en gran medida del tipo de red sobre la cual se desarrolla la dinámica, por lo que resulta importante descubrir qué redes son las más “adecuadas” para eficientar ciertos procesos (como la distribución de electricidad en una ciudad [2]) o impedir otros (la propagación epidémica de una enfermedad [12]).

### **Morfogénesis**

En 1952 el matemático inglés A. Turing, propuso un modelo simple e innovador para describir la *morfogénesis*, proceso por el cual un huevo altamente simétrico puede tomar una forma anatómica, lo cual se relaciona con la aparición de estructura en pieles de animales. En éste, un sistema de sustancias químicas (denominadas *morfógenos*) que reaccionan entre sí y se difunden en un tejido, pueden formar patrones espaciales estacionarios conocidos como *patrones de Turing* [61]. Curiosamente, en estos sistemas la difusión es la responsable de hacer que un equilibrio homogéneo (es decir, la ausencia de un patrón determinado de concentraciones químicas) sea *inestable*, a pesar de que la difusión logra precisamente el efecto contrario en otro tipo de sistemas físicos. Entre muchas otras aplicaciones [44], los *sistemas de reacción-difusión de Turing* han sido utilizados para modelar el desarrollo de patrones en la piel de peces *Pomacanthus* y erizos de mar [9], mantarrayas y bagres de agua dulce [8], y en las alas de “lady bugs” [40] y mariposas [58]. El tipo de patrones generados por un sistema de Turing pueden cambiar radicalmente al cambiar las propiedades de la red de interacción entre morfógenos, como su curvatura o tasa de crecimiento [62].

### **Propagaciones epidémicas**

Otro caso interesante de dinámica sobre redes es la *propagación epidémica* de una enfermedad infecciosa. Existen ya muchos modelos matemáticos al respecto que se basan en la “compartimentalización” de la comunidad afectada por la enfermedad; es decir, en la separación del grupo en conjuntos de personas *susceptibles*, *infecciosas* y *recuperadas*, por ejemplo. A partir de estos 3 grupos se pueden construir dos modelos arquetípicos: el modelo “susceptible-infeccioso-recuperado” (SIR), y el modelo “susceptible-infeccioso-susceptible” (SIS), que respectivamente simulan la situación en que la gente puede “escapar” de la enfermedad al recuperarse, y el caso cíclico en que los individuos, sólo se curan para enfermarse nuevamente un tiempo después. Los modelos SIR y SIS se simplifican bastante al ser estudiados sobre redes completamente conectadas o aleatorias, y presentan un *umbral epidémico* que divide el espacio de parámetros del modelo en una región donde la enfermedad “muere” eventualmente, y una “región epidémica” donde una porción finita de la población permanece infectada [11, 12]. La presencia de atajos en una red de mundo pequeño reduce el tiempo de propagación de la enfermedad de forma considerable, y una estructura de red libre de escala de hecho *elimina* el umbral epidémico por completo [54], por lo que la propagaciones epidémicas son especialmente

difíciles de controlar en redes sin escala como la Internet y ciertas redes de interacción sexual.

## Sincronización

De noche, algunos bosques en el sur de Asia son la cuna de un fenómeno visual impactante: al principio unas cuantas luciérnagas emiten destellos de luz de manera incoherente, pero después de un tiempo miles de ellas se sincronizan para brillar al mismo tiempo e iluminar el cielo nocturno [56]. Este proceso de *sincronización espontánea* es bastante común en la naturaleza y se ha estudiado en redes de células marcapasos en el corazón o en el núcleo supraquiasmático del cerebro, en conjuntos de láseres, osciladores de microondas y juntas superconductoras, y en la sincronía metabólica de suspensiones de levadura [1, 59], por citar algunos ejemplos. En 1975 Kuramoto estudió un modelo simple de sincronización conocido ahora como el modelo de Kuramoto, en el que un conjunto de osciladores con frecuencias naturales dadas pueden sincronizar sus fases de forma espontánea en una transición de fase similar a las estudiadas en física estadística [35]. El uso de redes aleatorias o de mundo pequeño aumenta drásticamente la sincronización en el *modelo de Kuramoto* respecto a una red ordenada, debido a la existencia de atajos entre partes “lejanas” de la red [6, 64]. Por el otro lado, la transición de fase sobre una red libre de escala no depende del tamaño de la red, como sucede en las redes completamente conectadas [43].

## Coevolución social

Como hemos comentado en la Introducción, existen situaciones en las que simplemente no podemos describir a un sistema complejo como una *red sin función* o como una *función sobre una red fija*, pues tanto la estructura como las variables de estado están cambiando en la misma escala de tiempo y se retroalimentan en un proceso que llamamos *coevolución*, así que cualquier modelo que deseemos estudiar necesariamente tiene que incluir tal ingrediente en su preparación.

En el caso de las redes sociales (donde los nodos representan personas o grupos sociales, y los enlaces y variables de estado representan relaciones de amistad, estatus, sexualidad, opinión, matrimonio, negocios, etc. [10, 46, 63]) la coevolución es un elemento esencial: la gente escoge a sus vecinos en la red social de acuerdo a sus gustos y necesidades, pero tal grupo de conocidos también afecta la forma en que un individuo percibe a la sociedad. Desde un punto de

vista teórico, nuestro interés reside en descubrir cómo un conjunto de reglas o mecanismos simples (entre los que se encuentra la coevolución) produce una auto-organización a gran escala en las redes sociales que usualmente presenta las siguientes características:

- *Efecto de mundo pequeño*: La longitud característica promedio es pequeña.
- *Número de Dunbar*: El grado promedio es pequeño, pues existe un límite fisiológico para el número de interacciones sociales que un individuo puede tener.
- *Comunidades*: La gente suele identificarse con grupos de personas altamente conectados en su interior y diferenciados del resto de la sociedad, las llamadas élites sociales.

Del efecto de mundo pequeño ya hemos hablado en la sección II: la sociedad es “más pequeña de lo que parece”, debido a una conexión no trivial entre los nodos de la red. El número de Dunbar (postulado por el antropólogo británico R. Dunbar, en 1992 [23, 24]) nos habla de un

fenómeno similar: aunque en potencia un individuo puede interactuar con toda la sociedad, su grupo de conocidos es de hecho bastante reducido (del orden de 150, según extrapolaciones de relaciones sociales en primates), un efecto evolutivo causado por constricciones en las capacidades cognitivas de los humanos. Finalmente, el concepto de comunidad permite una definición intuitiva simple pero ha sido complicado de definir formalmente en un modelo matemático: una comunidad es un subconjunto de nodos en la red que comparten alguna propiedad estructural o valor de las variables de estado, lo cual la separa del resto de la red [57]. A falta de una definición general, el estudio de la caracterización y detección de comunidades en redes ha crecido de forma abrumadora en los últimos años [18, 19, 26, 38, 47, 48, 50], con algoritmos que detectan tipos particulares de comunidades dependiendo de la clase de red que se estudia. Existen ya en internet algunos programas de visualización de redes como Pajek y Himmeli, y programas de detección de comunidades como INFOMAP y CFinder.

Hablemos ahora de la forma en que el concepto de coevolución puede ser utilizado para modelar la *dinámica de formación de opinión* en una red social [31-33]. Dada una red social de  $N$  individuos, podemos asignar variables de estado  $x_i$  que representan sus *opiniones* respecto a un tema en particular, y enlaces que representan la existencia de discusiones entre individuos que son relevantes al tema. Así, la estructura de la red puede ser caracterizada en cualquier momento por la *matriz de conectividad*  $A$  (cuyo elemento  $A_{ij}$  es 1 si los nodos  $i$  y  $j$  discuten entre sí y 0 en caso contrario) y el *vector de opinión*  $x$  (formado por todas las opiniones en la red). Podemos entonces escribir una *ecuación de coevolución* para la dinámica temporal de cada opinión,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_j \hat{O}(x_i, x_j, g) A_{ij}. \quad (1)$$

La ecuación (1) tiene dos partes: el término  $\partial x_i / \partial t$  que describe la evolución temporal de la función de la red, y el término  $\sum_j \hat{O}(x_i, x_j, g) A_{ij}$  que dicta el cambio temporal de su *estructura*. El cambio de la *función* está dado por ecuaciones que nos dicen cómo la gente discute entre sí para formar su opinión, mientras que el cambio de la estructura se rige por un conjunto de reglas (incluidas en el operador  $\hat{O}$ ) que resumen la forma en que la gente cambia de amistades a causa de la dinámica de formación de opinión. Cada dinámica actúa en su propia escala temporal ( $dt$  y  $dT$  respectivamente), por lo que podemos acoplar las dos a través del *parámetro de coevolución*  $g = dT = dt$ .

El parámetro  $g$  sirve como una medida de la interacción entre función y estructura en la red social, es decir, nos dice que tan “coevolutivo” es el cambio en las variables de estado a lo largo del tiempo. Cuando  $g$  es pequeña (los casos  $g \sim 10^5 - 40^5$  en la figura 1), la gente cambia de amistades todo el tiempo y no permite que la dinámica de opiniones se lleve a cabo apropiadamente, por lo que terminamos con dos conjuntos de personas de opinión opuesta que no interactúan entre sí: los que están de acuerdo y los que no. En el caso opuesto en que  $g$  es muy grande ( $g \sim 10^5 - 40^5$  en la figura 1), los enlaces nunca cambian y obtenemos una cierta distribución de opiniones sobre una red aleatoria fija. El caso interesante se da para valores intermedios de  $g$  ( $\sim 40 - 1000$  en la figura 1), donde la gente discute y cambia de amistades al mismo tiempo en un proceso de retroalimentación social que genera *comunidades*, las cuales pueden ser caracterizadas por su opinión, tamaño y número de enlaces internos [31-33]. Con este artículo incluimos un pequeño video de la transición del estado final de la red social como función de  $g$ , donde se puede apreciar la aparición y desaparición de comunidades en el sistema.

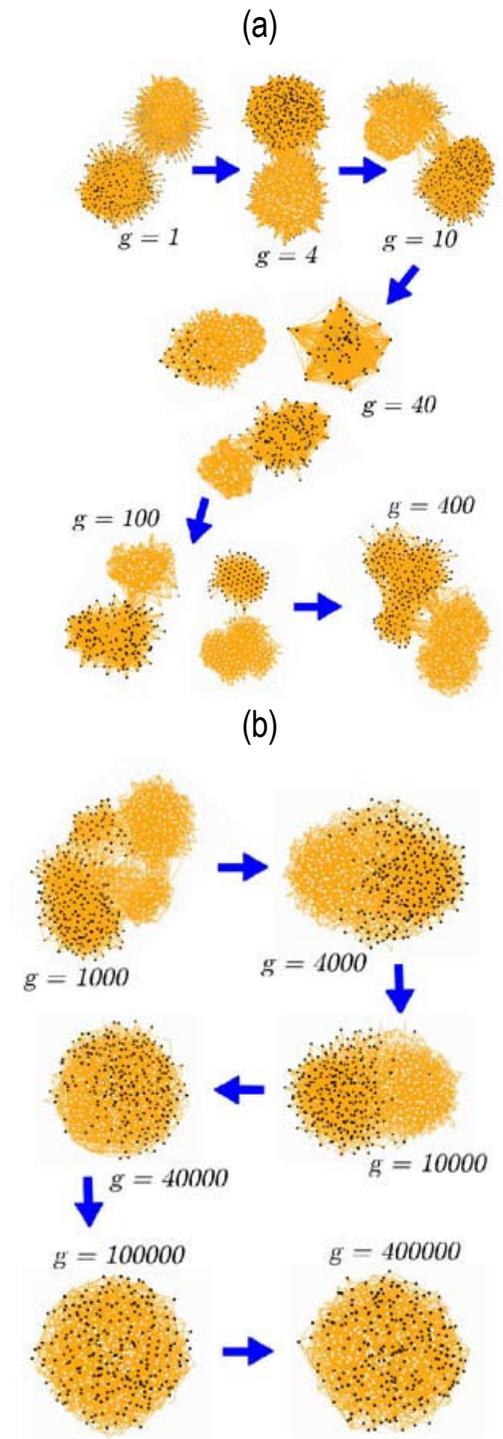


Figura 1: Estado final de un proceso de formación de opinión en una red social de tamaño  $N = 500$  como función del parámetro de coevolución  $g$ . Se distinguen 3 regiones cualitativamente distintas que corresponden a una red sin función ( $g$  pequeña), una función sobre una red fija ( $g$  grande), y una red con comunidades ( $g$  intermedia).

Así, este modelo de formación de opinión muestra cómo algunas de las propiedades conocidas de las redes sociales reales (efecto de mundo pequeño, número de Dunbar y presencia de 10 -xx

comunidades) pueden obtenerse de forma dinámica al incluir la coevolución en las ecuaciones que dictan el comportamiento social de los individuos, y a la vez integra éste régimen intermedio con los casos extremos de estructura y función (revisados en las secciones II y III respectivamente) bajo el mismo marco teórico, la ecuación de coevolución.

## Conclusiones

En este artículo hemos dado una rápida revisión del fructífero campo de investigación en sistemas complejos al introducir sus conceptos básicos y algunos de sus resultados más relevantes hasta el momento, con la intención de explicar cómo un fenómeno natural puede ser descrito “desde el punto de vista de las redes”. Según este enfoque, la presencia de múltiples interacciones entre las partes del sistema a distintas escalas usualmente produce un comportamiento global que puede ser tratado con herramientas estadísticas, pero que no puede ser explicado, a partir del estudio individual de tales partes.

La mayor parte del estudio en sistemas complejos se ha dedicado a analizar la estructura de las redes asociadas y el comportamiento de dinámicas sobre tales redes. Sin importar el origen de los sistemas complejos, (física, biología, sociología, tecnología, economía, etc.) generalmente, sus redes presentan las mismas características estructurales, las cuales determinan el comportamiento de las dinámicas definidas sobre ellas. Esto nos hace pensar que existe un conjunto básico de reglas o “leyes” que definen el comportamiento de cualquier sistema complejo.

Según hemos explicado aquí, el concepto de coevolución puede ser utilizado para explicar la emergencia de propiedades típicas de las redes sociales, como las comunidades. ¿Será que otros sistemas complejos también se rigen por procesos coevolutivos? Y si es así, ¿Cuáles son todas las consecuencias de la coevolución entre estructura y dinámica en una red? Preguntas como éstas prometen estudios interesantes para el futuro.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por Conacyt, proyecto No. 79641. Agradezco la colaboración del Prof. R. A. Barrio en la elaboración de este trabajo, que constituye gran parte de mi tesis de Maestría en Ciencias.

## Apéndice A: Enlaces a grupos de investigación

CABDyN Complexity Centre en la Universidad de Oxford, Reino Unido.

Centre of Excellence in Computational Complex Systems Research en Espoo, Finlandia.

Center for Models of Life en el Instituto Niels Bohr en Copenhague, Dinamarca.

Departamento de Sistemas Complejos en el Instituto de Física de la UNAM, México.

Grupo de U. Alon en el Instituto de Ciencia Weizmann en Rehovot, Israel.

Grupo de A.-L. Barabási, Northeastern University, Estados Unidos.

Grupo de N. Christakis en la Universidad de Harvard, Estados Unidos.

Grupo Large Graphs and Networks en Louvain-la-Neuve, Bélgica.

Grupo de M. Newman, University of Michigan, Estados Unidos.

Institute for Cross-Disciplinary Physics and Complex Systems en Palma de Mallorca, España.

Institute for Scientific Interchange Foundation en Turín, Italia.

## Referencias

[1] Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez Vicente C. J., Ritort F., and Spigler R.. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Reviews of Modern Physics*, 77(1):137-185, 2005.

[2] Albert R. and Barabási A.-L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 74(1):47-97, 2002.

[3] Albert R., Jeong H., and Barabási A.-L.. Error and attack tolerance of complex networks. *Nature*, 406(6794):378-382, 2000.

[4] Barabási, A.-L.. *Linked: How everything is connected to everything else and what it means for business, science, and everyday life*. Penguin Group, New York, 2002.

[5] Barabási, A.-L. and Albert R.. Emergence of Scaling in Random Networks. *Science*, 286(5439):509-512, 1999.

[6] Barahona M. and Pecora L. M.. Synchronization in small-world systems. *Physical Review Letters*, 89(5):054101, 2002.

[7] Barrio R. A.. Turing Systems: A General Model for Complex Patterns in Nature. In I. Licata and A. Sakaji, editors, *Physics of Emergence and Organization*, chapter 11, pages 267-296. World Scientific, 2008.

[8] Barrio R. A., Baker R. E., Vaughan B., Jr., Tribuzy K., de Carvalho M. R., Bassanezi R. and Maini P. K. Modeling the skin pattern of fishes. *Physical Review E*, 79(3):031908, 2009.

[9] Barrio R. A. and Varea C.. Non-linear systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 372(2):210-223, 2006.

[10] Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., and Hwang D.-U. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424(4-5):175-308, 2006.

[11] Boguñá M. and Pastor -Satorras R.. Epidemic spreading in correlated complex networks.

*Physical Review E*, 66(4):047104, 2002.

[12] Boguñá M., Pastor-Satorras R., and Vespignani A.. *Epidemic Spreading in Complex Networks with Degree Correlations*, volume 625 of *Lecture Notes in Physics*, chapter 8, pages 127-147. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[13] Bollobás B.. *Graph Theory: An Introductory Course*. Springer-Verlag, New York, 1979.

[14] Bollobás B.. *Random Graphs*. Academic Press, London, 1985.

[15] Caldarelli G., *Scale-Free Networks: Complex Webs in Nature and Technology*. Oxford University Press, Oxford, 2007.

[16] Castellano C., Fortunato S., and Loreto V. Statistical physics of social dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 81(2):591-646, 2009.

[17] Cohen R., Erez K., ben Avraham D., and Havlin S. Resilience of the internet to random breakdowns. *Physical Review Letters*, 85(21):4626-4628, 2000.

[18] Danon L., Díaz-Guilera A., Duch J., and Arenas A., Comparing community structure identification. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2005(09):P09008, 2005.

[19] Danon L., Duch J., Arenas A., and Díaz-Guilera A., Community structure identification. In G. Caldarelli and A. Vespignani, editors, *Large Scale Structure and Dynamics of Complex Networks*, chapter 5, pages 93-114. World Scientific, 2007.

[20] Diestel R., *Graph Theory*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[21] Dorogovtsev S.N. and Mendes J. F. F., Evolution of networks. *Advances In Physics*, 51(4):1079-1187, 2002.

[22] Dorogovtsev S.N. and Mendes J. F. F., *Evolution of Networks: from biological nets to the internet and www*. Oxford University Press, Oxford, 2002.

[23] Dunbar R. I. M. Neocortex size as a constraint on group size in primates. *Journal of Human Evolution*, 22:469-493, 1992.

[24] Dunbar R. I. M. Co-evolution of neocortex size, group size and language in humans. *Behavioral and brain sciences*, 16(4):681-735, 1993.

[25] Erdős P. and Rényi A., On random graphs. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, 6:290-297, 1959.

[26] Fortunato S. Community detection in graphs. *Physics Reports*, 486(3-5):75-174, 2010.

- [27] Fronczak A., Fronczak P., and Holyst J. A. Average path length in random networks. *Physical Review E*, 70(5):056110, 2004.
- [28] Gil S. and Zanette D. H., Coevolution of agents and networks: Opinion spreading and community disconnection. *Physics Letters A*, 356(2):89-94, 2006.
- [29] Goldstein H., Poole C., and Safko J., *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, 1980.
- [30] Holme P. and Newman M. E. J., Nonequilibrium phase transition in the coevolution of networks and opinions. *Physical Review E*, 74(5):056108, 2006.
- [31] Iñiguez G., Dinámica de redes y coevolución en sistemas complejos. Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, 2009. *Tesis de Maestría*.
- [32] Iñiguez G. and Barrio R. A., Coevolución en redes sociales. In *Educación Química: 8a Convención Nacional y 1a Internacional de Profesores de Ciencias Naturales*, volume XX, pages 272-279, 2009.
- [33] Iñiguez G., Kertész J., Kaski K. K., and Barrio R. A., Opinion and community formation in coevolving networks. *Physical Review E*, 80(6):066119, 2009.
- [34] Jain S. and Krishna S., Autocatalytic Sets and the Growth of Complexity in an Evolutionary Model. *Physical Review Letters*, 81(25):5684-5687, 1998.
- [35] Kadanff L. P., *Statistical Physics: Statics, Dynamics and Renormalization*. World Scientific, 2000.
- [36] Kozma B. and Barrat A., Consensus formation on adaptive networks. *Physical Review E*, 77(1):016102, 2008.
- [37] Kozma B. and Barrat A., Consensus formation on coevolving networks: groups' formation and structure. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41:224020, 2008.
- [38] Kumpula J. M., Saramäki J., Kaski K., and Kertész J., Limited resolution in complex network community detection with Potts model approach. *The European Physical Journal B: Condensed Matter and Complex Systems*, 56(1):41-45, 2007.
- [39] Lewis K., Kaufman J., Gonzalez M., Wimmer A., and Christakis N., Tastes, ties, and time: A new social network dataset using Facebook.com. *Social Networks*, 30(4):330-342, 2008.
- [40] Liaw S. S., Yang C. C., Liu R. T., and Hong J. T., Turing model for the patterns of lady beetles. *Physical Review E*, 64(4):041909, 2001.

- [41] Messiah A., *Quantum Mechanics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1961.
- [42] Milgram S., The small world problem. *Psychology Today*, 2(1):60-67, 1967.
- [43] Moreno Y. and Pacheco A. F., Synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks. *Europhysics Letters*, 68(4):603-609, 2004.
- [44] Murray J. D., *Mathematical Biology*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [45] Nardini C., Kozma B., and Barrat A., Who's Talking First? Consensus or Lack Thereof in Coevolving Opinion Formation Models. *Physical Review Letters*, 100:158701, 2008.
- [46] Newman M. E. J., The Structure and Function of Complex Networks. *SIAM Review*, 45(2):167-256, 2003.
- [47] Newman M. E. J., Detecting community structure in networks. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 38(2):321-330, 2004.
- [48] Newman M. E. J., Modularity and community structure in networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 103(23):8577-8582, 2006.
- [49] Newman M. E. J., Barabási A.-L., and Watts D. J., *The Structure and Dynamics of Networks*. Princeton University Press, Princeton, 2006.
- [50] Newman M. E. J. and Girvan M., Finding and evaluating community structure in networks. *Physical Review E*, 69(2):026113, 2004.
- [51] Onnela J.-P., Saramäki J., Hyvönen J., Szabó G., de Menezes M. A, Kaski K., Barabási A.-L., and Kertész J., Analysis of a large-scale weighted network of one-to-one human communication. *New Journal of Physics*, 9(6):179, 2007.
- [52] Onnela J.-P., Saramäki J., Hyvönen J., Szabó G., Lazer D., Kaski K., Barabási A.-L., and Kertész J., Structure and tie strengths in mobile communication networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 104(18):7332-7336, 2007.
- [53] Pastor-Satorras R., Vázquez A., and Vespignani A., Dynamical and correlation properties of the internet. *Physical Review Letters*, 87(25):258701, 2001.
- [54] Pastor-Satorras R. and Vespignani A., Epidemic Spreading in Scale-Free Networks. *Physical Review Letters*, 86(14):3200-3203, 2001.
- [55] Pathria R. K., *Statistical Mechanics*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 1996.
- [56] Pérez C. J., Corral A., Díaz-Guilera A., Christensen K., and Arenas A., On self-organized criticality and synchronization in lattice models of coupled dynamical systems. *International Journal of Modern Physics B*, 10(10):1111-1151, 1996.
- [57] Radicchi F., Castellano C., Cecconi F., Loreto V., and Parisi D., Defining and identifying communities in networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 101(9):2658-2663,

2004.

[58] Sekimura T., Madzvamuse A., and Maini P. K., Pigmentation Pattern Formation in Butterfly Wings: Global Patterns on Fore-and Hindwing. In A. Deutsch, Bruschi L., Byrne H., de Vries G., and Herzog H., editors, *Mathematical Modeling of Biological Systems, volume I of Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*, chapter 12, pages 142-148. Springer, 2007.

[59] Strogatz S. H., From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 143(1-4):1-20, 2000.

[60] Szell M., Lambiotte R., and Thurner S., Trade, Conflict and Sentiments: Multi-relational Organization of Large-scale Social Networks. e-print arXiv:1003.5137v1 [physics.soc-ph], 2010.

[61] Turing A. M., The chemical basis of morphogenesis. *Bulletin of Mathematical Biology*, 52(1):153-197, 1990.

[62] Varea C., Aragón J. L., and R. A. Barrio. Connected Turing patterns in growing systems. *Physical Review E*, 56(1):1250-1253, 1997.

[63] Wasserman S. and Faust K., *Social Network Analysis: Methods and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[64] Watts D. J., *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness*. Princeton University Press, Princeton, 1999.

[65] Watts D. J., *Six degrees: The science of a connected age*. Norton and Company, London, 2003.

[66] Watts D. J. and Strogatz S. H., Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 393(6684):440-442, 1998.

[67] West D. B., *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2nd edition, 2001.

[68] Zanette D. H. and Gil S., Opinion spreading and agent segregation on evolving networks. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 224(1-2):156-165, 2006.