

# O Que é um Texto? (Parte 2)<sup>1</sup>

## What is a Text? (Part 2)

Michael Otte<sup>2</sup>

### Resumo

O que é um texto? À primeira vista, esta pergunta pode parecer curiosa para alguns. Afinal de contas, aqui nós nos preocupamos com livros didáticos de Matemática e isso deixa parecer que uma pessoa sabe o que é um texto matemático em um livro didático. Mas, mesmo sendo o mais importante “instrumento” do ensino na matemática, como nas outras disciplinas, o livro parece um desconhecido. Poucos livros didáticos são configurados de acordo com normas científicas. Os maiores problemas resultam do fato que quase ninguém percebe que precisamos de tipos diferentes de textos para tarefas variadas e que mesmo assim o texto não pode nem substituir o diálogo vivo, nem ser excluído ou ignorado do ensino, pois os alunos precisam tanto da comunicação viva como da oportunidade de refletir individualmente sobre o conhecimento.

**Palavras chaves:** Semiótica do texto. Ensino matemático. Teoria da complementaridade.

### Abstract

What is a text? At first glance, this question may seem curious to some. After all, we are concerned with mathematics textbooks for school here, and it would seem that one knows what a text in a mathematical textbook is. But even though textbooks remain to be the most important “instruments” of teaching few of them seem designed by scientific insights or standards. The greatest problems result from the ignorance that different types of goals require different types of texts. Texts could neither substitute personal communication nor could they be excluded from classrooms. The students need as much the living example of knowledge, as they must have opportunity of constructive rumination on their own, individually.

**Keywords:** Text semiotics. Mathematical education. The concept of complementarity.

- 
- 1 Esse artigo foi originalmente publicado em *Perspectives on Mathematics Education*. D. Reidel Publishing Company, 1986, com o título *What is a Text?* Para publicação neste periódico, esta versão foi estruturada em duas partes. Aqui, daremos continuidade à Parte 1, publicada na Revista de Educação Pública, n. 35.
  - 2 Doutor em Matemática pela Universitat Munster (Westfälische-Wilhelms), Alemanha (1972). Professor Emérito do Instituto de Didática da Matemática da Universidade de Bielefeld – Alemanha e Professor Visitante do Programa de Pós Graduação em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso. Endereço: Av. Fernando Corrêa da Costa, s/n. Coxipó, Cuiabá-MT, Brasil. E-Mail <michaelontra@aol.com>.

R. Educ. Públ.	Cuiabá	v. 18	n. 36	p. 49-69	jan./abr. 2009
----------------	--------	-------	-------	----------	----------------

Todo pensamento depende de seus instrumentos simbólicos, como das características de seus objetos. Na matemática, meios e objetos não existem independentemente uns dos outros e por isso esta relação entre meios e objetos parece de importância especial. A educação matemática deveria se dedicar como muita seriedade à investigação dessa relação. Na parte 1 deste artigo tentamos concretizar este tipo de problemas a respeito do livro didático. Agora, vamos relatar algumas pesquisas mais amplas.

## 4 Sistemas simbólicos em um contexto histórico

A lista da figura 13, que Skemp apresentou em seu *Psychology of Learning Mathematics* (cf. SKEMP, 1971, p. 98), pode ser tomada como um sumário do que havíamos dito anteriormente, e como um ponto de partida para a reformulação da questão sobre o estado de meios diferentes de representação e de sistemas de símbolos. Já foi demonstrado anteriormente que ambos os sistemas estão aptos a desempenhar propósitos similares e que as diferenças podem ser descritas em termos da variação, como o rigor da conexão entre forma e mecanismo. A língua chinesa, por exemplo, não cria dificuldades sérias em relação à produção e uso rápido e fácil da digitação, ou ao desenvolvimento de linguagens de programa de computador, mas o estilo predominante do pensamento chinês é muito diferente do nosso e isso está manifesto no diferente sistema de escrita.

<b>Visual</b>	<b>Numérico-verbal</b>
Propriedades espaciais abstratas, tais como forma, posição.	Propriedades abstratas que são independentes da configuração espacial, tal como números
Difícil comunicar	Fácil comunicar
Pode representar melhor o pensamento individual	Pode representar melhor o pensamento socializado
Integrado, apresentando estrutura	Análítico, apresentando detalhes
Simultâneo	Seqüencial
Intuitivo	Lógico

Figura 13

É extraordinário que as características listadas, que foram comparadas, pertencem a muitos contextos diferentes (social, lógico, empírico etc.). Organizar esta diversidade iria requerer, acima de tudo, uma ampla análise histórica. Não conheço tais análises, mas apenas unidades referindo-se a algumas seções fragmentadas. Os esforços mais sistemáticos parecem ter sido feitos durante a Pré-história (cf. KLIX, 1980; LEROI-GOURHAN, 1964). Assim, como o pré-historiador Leroi-Gourhan escreveu sobre os dois aspectos mencionados:

La technicité a deux pôles de nombreux Vertebres aboutissait chez les Anthropiens à la formation de deux couples fonctionnels (main-outil et face-langage.... L'émergence du symbole graphique à la fin du règne des Faléanthropes suppose l'établissement de rapports nouveaux entre les deux pôles opératoires, rapports exclusivement caractéristiques de l'humanité au sens étroit du terme... Dans ces nouveaux rapports, la vision tient la place prédominante dans les couples face-lecture et main-graphie. (LEROI-GOURHAN, 1964, p. 262).

En effet, il existe un lien immédiat entre l'évolution technico-économique du bloc des civilisations méditerranéennes et européennes et l'outil graphique qu'elles ont perfectionné... La main devenait ainsi créatrice d'images, de symboles non directement dépendants du déroulement du langage verbal, mais réellement parallèles.... chez les Anthropiens primitifs, la main et la face divorcent en quelque sorte, concourant l'une par l'outil et la gesticulation, l'autre par la phonation, à la recherche d'un nouvel équilibre. Lorsque la liguration graphique apparaît, le parallélisme est rétabli, la main a son langage dont l'expression se rapporte à la vision, la face possède de le sien qui est lié à l'audition, entre les deux règne ce halo qui confère un caractère propre à la pensée antérieure à l'écriture proprement dite: le geste interprète la parole, celle-ci commente le graphisme.

Au stade du graphisme linéaire qui caractérise l'écriture, le rapport entre les deux champs évolue de nouveau: phonétisé et linéaire dans l'espace, le langage écrit se subordonne complètement au langage verbal, phonétique et linéaire dans le temps. Le dualisme verbal-graphique disparaît et l'homme dispose d'un appareil linguistique unique, instrument d'expression et de conservation d'une pensée elle-même de plus en plus canalisée dans le raisonnement. (LEROI-GOURHAN, 1964, p. 289-291).

A origem do desenvolvimento do assim chamado *grafismo linear* deve-se essencialmente ao aumento da complexidade social do processo de vida. O sistema de símbolos numérico-verbal ainda serve para fazer tanto a transmissão de informações, quanto o próprio pensamento, tão seguro quanto possível. A dimensão social já foi mencionada no início da seção 2, pelo termo “cooperação”. E da mesma maneira que foi possível aí imaginar “interno”, “auto-cooperação”, por uso de meio textual, a projeção de reserva das funções cognitivas dos meios sobre o plano pode servir para nos ajudar a pensar sobre a comunidade, como um assunto individual. Em outras palavras, interação social-comunicativa (e.g. ensino) é, por causa de seus meios, regida pela mesma complementaridade de estrutura e processo, como é a relação do individual para o mundo dos objetos. Somente através da mediação simbólica é que a conexão entre comunicação e saber torna-se imaginável, entendendo meios simbólicos como meios do sistema de atividade humana, que é tanto subjetiva, como social. Na perspectiva semiótica não há diferença entre cognição e comunicação, uma vez que a cognição parece uma comunicação interna.

Quando, em 1806, o pedagogo E. Tillich disse: “Penso apenas na medida em que conto”, ele colocou o conceito de número em posição privilegiada porque, dito em outros termos, número é destacado porque dá maior clareza à idéia de formas (ou objetos), assim como àquela de atividade (ou procedimento). Os números servem a distinguir as coisas e também para relacionar e comparar o distinto, mesmo sendo a segunda tarefa mais difícil, pois os homens são calculadores analógicos e não digitais, como o computador eletrônico. Ambos os aspectos são ligados às relações epistemológicas e sociais. Além disso, o conceito de número serve como um esquema antecipado para seu próprio desenvolvimento ou aplicações técnicas.

A relação do individual para a Matemática tem que, num certo sentido, ser pensada a partir do relacionamento de todos com esta ciência, isto é, da relação social, pois os objetos matemáticos são produtos socioculturais. Isso exige distinções, porém, no campo da representação. Em particular, nós podemos assumir que existem correspondências entre as relações que ligam conhecimento com objeto/realidade e os que ligam conhecimento e linguagem/sistema de símbolos, assim como numa terceira, entre diferentes assuntos na sociedade. Isso fica particularmente visível na esfera de cooperação social e de divisão do trabalho:

O estudo da álgebra pode prosseguir em três escolas muito diferentes, a Prática, a Filosófica ou a Teórica, uma vez que a Álgebra, ela mesma é considerada um Instrumento, ou uma Linguagem ou uma Reflexão, assim como a facilidade de operação, ou expressão de simetria ou clareza de pensamento (o agir, o fazer ou o saber) é eminentemente apreciada e buscada por ela.

Isto é o início da sentença da *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples*, de W. R. Hamilton, de 1835. Levando em conta as discussões acima sobre a representação da fórmula da área de um triângulo nós podemos ver a conexão entre distinções sociais e tipos de representação do conhecimento, ou, expressando isso diferentemente, o sistema de recursos da atividade Matemática relaciona pensamento à cooperação social e à divisão de trabalho.

O aspecto do grafismo não linear parece ser muito mais difícil de reconstruir, da mesma maneira que para nós é muito difícil de reconstruir as relações entre as artes e o pensamento matemático-teórico:

Alors que nous vivons dans la pratique d'un seul langage, dont les sons s'inscrivent dans une écriture qui leur est associée, nous concevons avec peine la possibilité d'un mode d'expression où la pensée dispose graphiquement d'une organisation en quelque Sorte rayonnante. (LEROI-GOURHAN, 1964. p. 273).

Nisto, porém, a ideografia continua sendo de importância crucial:

[...] dans les sciences où la linéarisation de l'écriture est une entrave et l'équation algébrique, les formules de la chimie organique y trouvent le moyen de rompre la contrainte unidimensionnelle, dans des figures ou la phonétique n'intervient que comme un commentaire et ou l'assemblage symbolique parlé par lui-même. Il resurgit enfin dans l'expression publicitaire qui fait appel à des états profonds, infra-verbaux, du comportement intellectuel. (LEROI-GOURHAN, 1964, p. 275).

Algumas vezes, infelizmente, semelhantes escolhas de ênfase resultam da idéia de uma separação entre criatividade e comunicação, entre intuição e lógica, entre cognição e comunicação, que, em sua forma básica, não é aceitável para a educação Matemática:

Le système chinois et le système japonais sont jugés peu 'pratiques', inadéquats à l'objet proposé qui est la traduction graphique du langage oral. En réalité un tel jugement n'est valable que dans la mesure où le langage écrit est destiné à traduire économiquement des notions pauvres, mais précises, dont l'adjustement linéaire assure l'efficacité... l'écriture chinoise représente un état d'équilibre unique dans l'histoire humaine, celui d'une écriture qui a permis (malgré

tout) de traduire assez fidèlement les mathématiques ou la biologie sans perdre la possibilité du recours au plus vieux système d'expression graphique, juxtaposition de symboles qui créent non pas des phrases mais des groupes d'images significatives. (LEROI-GOURHAN, 1964, p. 289).

Onde tem Matemática envolvida, R. Thom pensa que não se pode deixar de admirar a praticidade da escrita ideográfica chinesa: “A influência dominante da palavra falada no Ocidente foi resultado de um sistema de escrita alfabético ou silábico, e a expressão (signifiant) foi violentamente submetida ao significado (signifié)” (Cf THOM, 1975, p. 329). Mas as diagramas da álgebra são ícones e tem um sentido, mas em geral nenhuma referência ou significado, A álgebra é neste sentido um instrumento da reflexão sobre as próprias atividades (sejam elas atividades aritméticas ou outras quaisquer). A álgebra é difícil de ensinar, especialmente nas classes de Matemática, onde assegurar o controle sobre a comunicação e a metodização parece mais importante do que pensamento e reflexão. Isso leva ao instrumentalismo por parte das crianças, como tem sido descrito por Mellin-Olsen (1981), e a super-metodização por parte dos professores.

Conceitos teóricos não são coisas que podem ser comunicadas prontas (é isso). Seu conteúdo consiste de conexão e relações entre coisas e não de substâncias ou propriedades. Isto é, porque pensamento teórico, a fim de progredir, não só requer regras, mas também ‘visualizações’ (num sentido amplo), para imaginar relações. O historiador das ciências, Fleckenstein, de maneira simples, caracterizou o pensamento relacional moderno como pensamento em representações gráficas. O que temos dito aqui, contudo, não pode ser concretizado sem trabalho adicional, ou identificado com determinadas realidades – a Matemática precisa de ambas as formas de representação, mas deve ser usada, em primeiro lugar, como uma sonda para explorar as interações complexas e altamente dinâmicas entre cognição, comunicação, e cooperação.

Em todos os três campos mencionados, os dois modelos de representação provam ser complementares, e complementaridade não indica propriedades da realidade, mas propriedades de nossa ação com essa realidade, ou seja, de nosso desenvolvimento mais recente. Como conhecer, depende muito da organização interna da mente, assim como da realidade a ser descrita, e estes dois interesses são apenas aspectos da cognição humana. Observação e análise de um sistema de símbolos e formas de representação continuam a fornecer possíveis caminhos para o estudo de questões fundamentais do conhecer e do aprender. Além disso, uma falta de compreensão e um abuso destes meios levarão à maior parte das deficiências em aprendizagem.

## 5 O caráter da Matemática escolar é essencialmente algébrico

Esta afirmação provavelmente vai receber apoio unânime: se bem que os consensos irão desmoronar assim que a pessoa perguntar: o que é álgebra? (veja a declaração de Hamilton). Nós já vimos que diagramas algébricos, por exemplo, são em primeiro lugar ícones, mas são interpretados na escola como procedimentos de uma aritmética generalizada, uma razão pela qual o sistema numérico verbal domina a explicação. O método aritmético, entretanto, não serve para fundamentar a álgebra: a álgebra escolar não pode ser vista somente como aritmética generalizada.

Na Matemática escolar temos dois sistemas de representação específicos, o aritmético (com os números naturais, como o ponto de referência absoluto) e o geométrico (visualização no plano e no espaço). Ambos são essenciais. Em particular, a álgebra não pode passar sem visualização gráfica (por exemplo, o Teorema Fundamental da Álgebra não pode ser provado sem recurso para conceitos que são essencialmente geométricos, quando Bolzano substituir o contínuo em termos da aritmética, caiu em paradoxos). O caráter algébrico da Matemática escolar tradicionalmente cria tantas dificuldades (considere também o desenvolvimento do conceito matemático de número além dos números naturais) devido ao fato de que existe consciência insuficiente do potencial do sistema gráfico-visual e das noções de modelagem ligadas a isso.

A importância da visualização está relacionada com o fato já mencionado, de que conceitos reproduzem relações e não substâncias, que eles próprios são pontos centrais na estrutura relacional e que sua representação deve contar, portanto, com justaposição não linear. Não estamos propondo aqui que a generalização da teoria das variáveis algébricas surja quase que automaticamente da visualização e que pode ser obtida, em particular, sem o número, ou conceito de função como elementos dinâmicos. A Matemática grega da Antigüidade nos proferia com um contra exemplo óbvio. A conexão entre conhecimento e o desenvolvimento do conhecimento, os quais constituem a compreensão, não pode ser alcançada, entretanto, sem tais visualizações (cf. MUELLER, 1969, em particular p. 302-306).

Nós já vimos que as fórmulas e diagramas algébricos têm dois aspectos, um lógico-linear e um visual-ideográfico, e a própria variável tem dupla origem que é a numérico-verbal, por um lado, e gráfico-geométrica, por outro. Com o aparecimento do conceito de variável, nos séculos XVI e XVII, esta dupla origem já se tornou consciente e visível, como na confrontação de Ramus ou Descartes com os Elementos de Euclides (cf. OTTE, 1983).

Ao contrário de Euclides, Ramus preferiu o sistema numérico-verbal de representação, já que seu primeiro interesse foi a disseminação e a generalização prática da herança Matemática desde a Antigüidade. A generalização social e a generalização

epistemológica não podem ser reduzidas uma a outra, mas influenciam-se uma a outra de múltiplas formas, conforme as circunstâncias históricas. Com sua “metodização” Ramus, por exemplo, também criou consciência de uma nova teoria epistemológica, alcançando uma inovação, que poderia ser resumidamente descrita pela declaração: “o mundo pode ser conhecido, porque é acessível à explicação segmentada” (Cf. OTTE, 1983), e que encontrou expressão direta no conceito cartesiano de espaço. Atribuir a todo ponto um nome, como H. Weyl chamou de realização de Descartes, foi um pré-requisito para a idéia de espaço como um conjunto e para a distinção entre espaço ou conjunto, de um lado, e a noção de estrutura, de outro. A relevância disso se mostrava claramente nas geometrias não-euclidianas.

A álgebra tinha se concentrado na elaboração do conceito de número por séculos. E não menos porque número tenha uma relação absoluta com o homem, e não porque a quantificação numérica, como tal, é útil. Até os logicistas, como Frege, acreditavam que os números representam a estrutura de nossas mentes. A simplificação lógica no sentido de economizar na capacidade de armazenagem e recordação da memória representa um papel nisso, ao lado da necessidade de controlar definitivamente a comunicação. Para este processo, Bertin (cf. p. 162) assinala um significado especial para os denominados conceitos subordinados (tempo, quantidade):

Sitôt qu'un concept ordonné... est introduit dans la communication, tous les éléments prennent une place fixe, qui se renforcera avec le temps puisqu'elle sera, toutes choses égales, semblable à elle-même à tout moment de la réflexion et pour tout individu. Un seul effort aura suffi pour l'intégrer définitivement.

La découverte d'un concept ordonné apparaît ainsi le terme ultime de la simplification logique puisqu'elle permet de réduire à un seul instant l'intégration de séries qui, précédemment, exigeait n instants de réflexion. (BERTIN, 1967, p. 166).

(Lembramos a discussão da árvore de cálculo: economia era a segunda característica do pensamento algorítmico!)

Contudo, parece surpreendente e unilateral que professores e educadores prefiram uma prova, por exemplo, à lei distributiva da álgebra na forma:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Figura 14



“2 e 3 são números tais que  $2x(2+3)=2x2+2x3$ ’ a qualquer argumento geral por meio de formas gráficas geométricas de representação (cf. KEITEL et. al. p. 164f; veja figura 14). Freudenthal (cf. 1978, p. 222) chamou este método de *antidigmático*. Ele pensou que o método aritmético de fundamentação da álgebra é contrário ao espírito da álgebra. Quando esta preferência pela aritmética não puder ser entendida sem levar em conta a forte orientação para o aspecto do controle da informação, não deve somente destacar a generalização social do conteúdo relacionado, mas vai além daquele, diferenciando o conceito da generalização conteúdo-relacionado. Dentro da prova aritmética da lei distributiva, as séries numéricas funcionam como uma máquina criada pelo homem e que, conseqüentemente, pode ser vista completamente, permitindo transferir as afirmações obtidas de uma forma exemplar, deste modo, generalizando-as. Isso pode ser chamado de generalização operatório-combinatória. Eu duvido, entretanto, que *insight* e conhecimento podem ser generalizados por uma construção que é somente subjetivamente fundada nas regras. Isso pareceria ser mais adaptado à execução eficiente. O processo puro só refina a precisão técnica, mas, sem atividade, toda consciência seria enganosa:

Turing em seu artigo ‘Can a Machine Think?’ e Gödel comparando ‘procedimento finito’ com ‘procedimento mecânico’ insinua que relacionando pensamento ou lógica formal para uma ‘máquina’ constituiria algo fundamental... explicação do processo mental superior. Para um físico, entretanto, máquinas de todos os tipos... não podem ser uma explicação fundamental de coisa nenhuma... o conceito de ‘máquina’ é definido por esta função... (PATTEE, 1979, p. 131).

Parece ser uma diferença de pontos de vista de matemáticos (ou lógicos), de um lado, e de físicos, de outro. Os físicos eram perturbados pela inter-relação entre pensamento e realidade, enquanto os lógicos eram perturbados (*o ream*) pela relação entre pensamento e comunicação ou coerência. As descrições dos físicos não têm que formar um todo consistente o coerente.

Porém, a cognição é um processo determinado pela coordenação social interna e pela cooperação, como também pela interação entre um mundo exterior e o sujeito epistêmico, precisa de máquinas e também de visualizações ideográficas, utilizando o texto de acordo com a função comunicativa e pela exposição ativa dos modelos (cf. seção um). Qualquer generalização verdadeira do objeto relacionado sempre dependerá de visualização, no movimento dentro de um espaço estruturado.

Mais uma vez somos conduzidos para a polarização do holismo estrutural *versus* o processamento operativo, e novamente emerge o aparecimento dos contrastes paralelos entre os sistemas de símbolos geométrico-visuais e o numérico-verbal.

Como os pólos interagem no pensamento matemático e o que podemos aprender sobre esta interação de contrastes destes dois sistemas?

## 6 Códigos e aspectos do conhecimento

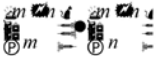
### 6.1 Diferentes usos de visualização

Ainda que nos parágrafos anteriores estivéssemos principalmente interessados no que era chamado de “visualização ideográfica”, porque pensamos que este aspecto realça o potencial específico da visualização e imaginação de uma forma particular. A propósito, é importante destacar que imagens podem ser empregadas de diferentes modos. Discutiremos dois aspectos que chamaremos de algoritmo versus visualização ideográfica que, de certo modo, corresponde à terminologia lingüística literal versus entendimento metafórico. O modelo de representação geométrica visual, ele mesmo, contém os dois pólos.

Luria deu uma descrição fascinante do pensamento visual e da memória de um artista que podia memorizar virtualmente grande quantidade de dados, convertendo cada som complexo em imagem gráfica, a qual colocava numa certa localidade no espaço visual construído em sua mente. Esse homem, entretanto, teve dificuldades virtualmente intransponíveis de compreensão com significados e particularmente com significados metafóricas, como nos poemas. De certo modo, imagens são abstratas, uma vez que contam com a definição do contexto para adquirir significado.

A expressão metafórica é nada mais do que a colocação de uma imagem num contexto especial que não é manifesto, mas foi conscientemente selecionado. O paciente de Luria, entretanto, entendeu imagens numa realidade imediata, no sentido literal. “Conseqüentemente para entender um poema devemos poder pegar o significado figurativo sugerido por uma imagem; é o significado figurativo, não o sentido literal das imagens que é essencial a poesia.” (LURIA, p. 92).

Knuth e Ershov (1981, p. 96-98) haviam mostrado explícita e implicitamente estes elementos da visualização algorítmica, que são baseados numa ordem em dois ou três espaços dimensionais geométricos, ambos em análises comparativas de livros de Matemática em sua própria apresentação da Matemática obrigatória para análises de algoritmo.

Por exemplo, existem  trajetórias diagonais em um reticulado retangular com lados  $m$  e  $n$ .

Cortando o reticulado ao longo de eixos variáveis e contando os caminhos de acordo com onde eles cruzam o corte, obtivemos um grande número de identidades significativas. O fato que atividade cognitiva é duplamente determinada, primeiro por

si só como um processo guiado por regras, e secundariamente pelo objeto fornecido na visualização, torna-se particularmente claro no exemplo mostrado na figura 15:

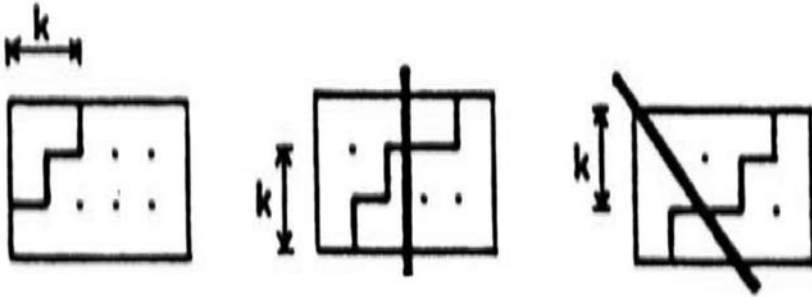


Figura 15

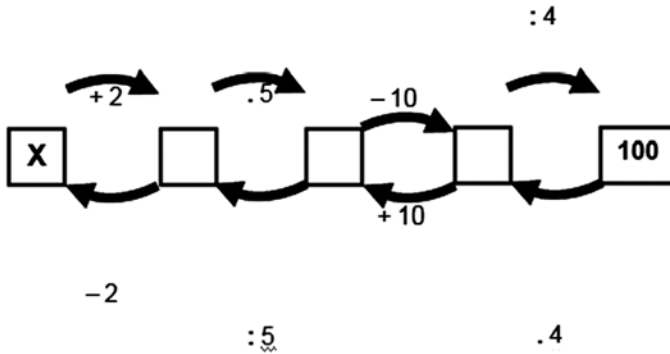
Ela é menos clara do que a visualização algorítmica da equação no exemplo retirado de um livro de ensino polonês, apresentado na figura 16, porque ele usa virtualmente apenas o ‘espaço vazio’, a reflexividade neutra nas relações entre dois pontos no espaço. Porém, movimento no espaço só é diferenciado suficientemente pelos obstáculos, os objetos. Os caminhos entre dois pontos fixos em uma cidade só se tornam interessantes e informativos após a comparação e variação de acordo com as condições materiais concretas, e não como conexões ‘como o corvo voa’. A seta simples, sem qualquer definição adicional, é um operador, que é algo subjetivo, ou significa uma relação, que é algo que também é realisticamente determinado? Por causa destas indefinições, a figura 16 conduz a concepções reducionistas do algoritmo.

Matemática e Educação Matemática tradicionalmente têm tido enormes dificuldades com o uso metafórico de visualizações. Aqui novamente, o caminho do conceito de número é concebido pode ser um critério crítico. Por exemplo, certamente as frações têm que ser concebidas essencialmente como elementos da álgebra, mas o assim chamado princípio algébrico da estabilidade das regras de operação não é nenhum caminho plausível em direção a este *insight* que se satisfaz sozinho. Apesar do fato de que foi um marco excepcional para o desenvolvimento do conceito do número quando Gauss encontrou a metáfora geométrica do plano complexo, deste dia em diante nós não tivemos nenhuma compreensão clara do potencial e das exigências da visualização ideográfica.

*Spójrz na to równanie*

$$((x + 2) \cdot 5 - 10) : 4 = 100$$

*A teraz na graf*



*A zatem*

*Z grafu odczytujesz x.*

$$(100 \cdot 4 + 10)$$

$$(100 \cdot 4 + 10) : 5 - 2 = x$$

$$(100 \cdot 4 + 10) : 5 - 2 = X$$

*Przyjrzyj się następnym przykładom:*

**I**  $2x + 7 = 17$

Figura 16

A acessibilidade de determinadas representações visuais empresta-se muito menos para metodização rigorosa e tem muito menos uso estritamente coordenado, individualizado e explorativo. O “Projeto de Pesquisa Ensinando Matemática”, da Universidade do Hull, relata dificuldades sistemáticas a este respeito, com as visualizações bem conhecidas da lei distributiva (por exemplo, figura 14).

Por outro lado, você tem que olhar para tal retrato com um “olho teórico”. Este diagrama que não é mera ilustração, necessitando de um esquema apropriado de interpretação.

Nós mencionamos acima que percepção visual é, por um lado, relacionada ao próprio ‘objeto’ e não aos dados sentidos - quando alguém olha e vê uma

mesa e não uma mancha marrom. Mas um conceito matemático não é uma coisa empírica. Seu teor consiste em relacionamentos e em relações entre coisas, e não entre substâncias. Nós já nos referimos a estes fatos.

A ciência força-nos a pensar na noção de ‘objeto’ de outra maneira. Isso significa que temos que nos entregar ao uso natural de nossos olhos metafóricos. Mas como pode um estudante (ou um professor) aprender a separar um uso ingênuo de um uso metafórico das visualizações? Eu penso que a complementaridade de objeto e operação, de estrutura e processo, ou de metáfora e algoritmo são essenciais aqui. E eu penso que as noções ligadas à função ou à equação têm um lugar tão proeminente na Matemática porque incorporam essas posições duplas de uma maneira muito acentuada.

Metáforas são essenciais para o pensamento teórico, mas essa posição deveria ser um período com reduzidas oportunidades de atividade de orientação e controle. Parecem ser as características evidentes da visualização ideográfica que representa simplicidade e determinação, ao mesmo tempo, mas que podem ser coordenados somente pelos recursos de um “elemento cinemático” adicional (Como Bateson observou, “os avanços no pensamento científico surgiram de uma combinação de pensamento livre e restrito, e esta combinação é a ferramenta mais preciosa da ciência”).

Modelos matemáticos (tal como uma equação) são ao mesmo tempo muito vagos, abertos e muito limitados, simplesmente descrições locais. Isso é verdade, entretanto, só através de uma combinação dos dois códigos (numérico-verbal versus geométrico) que são usados em um ideograma. É extraordinário que essa característica da visualização ideográfica igualmente se refere ao problema da coerência social.

Deixe-nos tentar ser um pouco mais precisos sobre estes assuntos nas seções 6.2 e 6.3.

## 6.2 Um novo método de comparação para os dois códigos

No segundo Congresso Internacional de Educação Matemática 1972, René Thom propôs a comparação da linguagem comum, da linguagem formal e da linguagem geométrica conforme os três pontos seguintes:

(1) O significado de um elemento: alguém pode formalizar a equivalência de classes (na extensão) definida para um elemento da linguagem?

(2) Este significado intuitivo é claro?

(3) A riqueza ou pobreza da sintaxe (Cf. THOM, 1973, p. 206-7).

O primeiro ponto se refere à possibilidade de delimitar e distinguir os objetos no campo da referência da linguagem. Por exemplo, cores, sabores etc. não podem ser formalizadas assim. Até o início do século 19 pensava-se por isso que a Matemática tem a ver só com grandezas extensivas.

O segundo ponto poderia ser visto com a dependência ou independência dos objetos de uma teoria. Por exemplo, os números reais ou complexos ou os vetores etc. não existem independentemente de uma teoria e por isso não são de fácil acesso intuitivo.

O terceiro ponto se refere à complexidade das funções operativos do sistema.

(1) é formulado de acordo com a maneira que a axiomática Matemática descreve o significado de seus elementos conceituais. Eu gostaria de alterar um pouco a frase e de substituir: (1) Como é a ‘existência’ dos objetos sobre os quais a teoria concebida fala?

É comum nos dias de hoje – na tradição de Cantor et al.- que a questão da existência do ente matemático é redutível à consistência; que consistência não é somente necessária mas também suficiente para a existência na Matemática. Esta tese pode, como Castonguay observou (cf. p. 76-77), ser entendida como afirmando que os objetos matemáticos têm somente uma existência lingüística. Em um sentido diferente, a compreensão concebida por Cantor sobre entes puramente matemáticos de uma maneira extensional, que os considera como idéias platônicas puras, independentes da qualquer representação lingüística particular (ou melhor, simbólica).

Quando Castonguay pensou que para os matemáticos “quando investigam novas estruturas é simples e mais eficiente para eles... adotar a atitude platônica indiscriminadamente”, deste modo, na realidade um matemático nunca saberá antecipadamente qual a representação das idéias será a mais apropriada. Por essa razão a metáfora como “Este A é de fato um B” são mais atuais entre os matemáticos. Por outro lado, como foi afirmado, o uso metafórico surge no contexto da atividade e, portanto, no contexto de alguma operação e do código representacional (Lembre-se das afirmações de Dehn ou Feymann sobre a importância da forma da representação citada na seção 2.4). Isso indica que nossa reformulação da frase da pergunta (1) dá o sentido apropriado quando estamos abordando a matemática do ponto de vista lingüístico.

Para as atividades de um estudante ou de um pesquisador em Matemática, isto é, como para o uso da linguagem ordinária, mais natural e eficiente ao trato com entidades que ‘realmente’ existem. Thom, ele mesmo, afirmou que o problema real que o ensino de Matemática enfrenta é o problema “da ‘existência’ de objetos matemáticos.” (cf. p. 202).

### 6.3 A experiência científica proporciona apenas um tipo de racionalidade

A primeira metade do século XIX testemunhou o estabelecimento da instrução Matemática dentro da educação geral obrigatória, mais ou menos na forma como vemos contemporaneamente. Dentro deste processo ocorreram grandes e intensivos debates sobre a relação entre a experiência prática diária e o conhecimento científico. Numa análise extensa do trabalho do comitê de currículo das escolas da Prússia 1829/30, Jahnke declarou:

Wissenschaft ist nur eine Form von Wissen, die gleichberechtigt neben anderen Formen des Wissens, insbesondere dem Alltagswissen steht. Gerade deshalb insistiert die Kommissionsmehrheit auch auf der Eigenständigkeit der Schule und der Schulmathematik. Schulmathematik ist in ihrem Verständnis nicht ein verdünnter Aufguß der professionellen Mathematik, sondern sie repräsentiert einen Wissensbestand, der die eigenständigen Bedürfnisse der Schule reflektiert und einer eigenständigen Logik verpflichtet ist. Wenn Wissenschaft nicht mehr die ausschließliche Form wahren Wissens ist, dann ergibt sich die unabwendbare Notwendigkeit eines allgemeineren, die Wissenschaften zwar einschließenden, aber nicht mehr auf diese rückführbaren Verständnisses und Begriffs von Rationalität. Dies ist, wie man vielleicht pointiert sagen kann, das große durchgängige Thema des deutschen Idealismus gewesen. Die Auseinandersetzung mit dem Rationalismus der Aufklärung kann in ihrem Kern nur verstanden werden, wenn man sie als Bemühen um eine Verallgemeinerung des Rationalitätsbegriffs, nicht aber als antirational versteht. (cf. JAHNKE, 1982, p. 123-124).

A aprendizagem escolar está baseada na interação de prática teórica e conhecimento teórico com a experiência diária.

Gostaria de fazer duas observações aqui:

(1) A aprendizagem de algo “radicalmente novo” e não pode partir somente com aquilo que o estudante já sabe, mas não pode ignorar também aquele conhecimento e experiência. Pensamento teórico não pode ser reduzido à experiência empírica cotidiana, mas também não deve negligenciar esta experiência. Portanto, metáforas são indispensáveis para a aprendizagem genuína. As metáforas criam analogias ou modelos e ao mesmo tempo reorganizam o que o aluno já sabia (a fronteira entre estes dois processos é muito difícil esboçar). Uma metáfora sempre faz uma pergunta e dá uma resposta ao mesmo tempo.

(2) Muitos dos conceitos fundamentais da Matemática ou ensino de ciências são organizados em termos de metáforas geométricas ou espaciais.

Em (OTTE, 1983) tenho tentado comprovar estas duas proposições de uma maneira exemplar e quero apresentar aqui um desses exemplos mais detalhadamente, isto é, a afirmação metafórica ‘a equação é uma balança’. Esta frase é para ser entendida metaforicamente: corresponde, por sua estrutura, ou sua construção de significado, a sentenças como ‘Hilbert é imortal’, ou ‘a noite é uma manta aveludada’. A metáfora ‘a equação é uma balança’ não é um diagrama operacional, exibindo regras para resolver equações algébricas.

Na realidade, esta metáfora não é para ser entendida principalmente do ponto de vista (matemático ou didático) do método! Em primeiro lugar é endereçado a uma idéia muito geral e fundamental para a orientação cognitiva. As metáforas têm que criar um modo de ver diferente do modo ingênuo. Nós podemos notar (só aparentemente) o fato paradoxal de que o geral é usado para explicar o particular e não vice-versa. Isso foi usado em várias ocasiões para assumir métodos de ensino que progridem do complicado para o mais simples (veja a didática de Dienes).

A frase “uma equação é uma balança” não é uma declaração a ser entendida literalmente, a qual reduz o aparentemente o abstrato e geral (quer dizer, a equação algébrica) ao aparentemente concreto e empírico (a balança) em um processo de redução e ilustração visual, mas, contrário, a balança representa a metáfora altamente geral de ‘interação’ ou ‘ação/efeito’, ou ‘simetria e assimetria’. Se a gente não entende isso eles vão tentar basear as regras do cálculo nesta metáfora, e vão fracassar. Nesta frase, o geral ou, se você gosta, o universal serve para explicar o particular, o dinâmico explicar a estática. Este processo usa, como foi dito, visualização por meio da balança. Uma ‘metáfora visualizada’ (ou visualização ideográfica) percebe, deste modo, a conexão entre senso, significando entre formas diferentes de saber.

Eu deveria gostar de destacar que todas estas idéias podem ser diretamente lidas das figuras em livros de ensino de Matemática (cf. OTTE, 1983, 8-15).

Embora nós estejamos interessados aqui apenas com um aspecto da teoria de equações, como mostra em sua representação por meio de determinadas visualizações, i.e. modelações, e o fundamento físico de princípios subjacentes à balança não é nossa preocupação, pode ser útil para se referir à análise da balança de Ernest Mach (da lei de alavanca). Faço isso porque eu poderia afirmar que historicamente a idéia de ‘equação’ pressupôs a balança, como também experiências sociais de usar a balança. A importância da balança é o resultado do fato de que toda força pode ser representada por um peso. Até o conceito de força está envolvido, no entanto, a estática não pode fazer sem conhecimento sobre os fenômenos de movimento, ou o equilíbrio estático (imobilidade) pode ser



compreendido apenas se for concebido como um caso particular de movimento. Físicos, hoje, chamam sobre este uso do mais geral descobrir o particular, o programa de Mach (cf. HUND, 1979, p. 130).

O segundo aspecto da análise de Mach, que é instrutivo para nós, é o fundamento desta razão mais geral de derivação, em a que Mach chama “percepção instintiva”. Percepções instintivas que representam experiências de um tipo variado e histórica longamente assegurado e, assim, possuem uma autoridade especial que substancia a intuição geral. Mach escreve:

Nós teremos ainda muitos exemplos para expor, entre os primeiros pesquisadores no domínio da mecânica desta tentativa de adaptação de concepções quantitativas especiais para impressões instintivas gerais. Os mesmos fenômenos também são apresentados em outros domínios. Podem me permitir recorrer nesta conexão às exposições que eu havia dado em meus ‘Princípios de Calor’, p.151. Pode ser dito que os mais significativos e a maioria dos avanços importantes em ciência foi feito desta maneira. O hábito que excelentes pesquisadores têm de trazer suas concepções particulares de acordo com a concepção geral ou ideal de todo um campo de conhecimento de fenômenos, sua consideração constante do todo no tratamento de suas partes, pode ser caracterizado como um procedimento genuinamente filosófico. (MACH, 1974, p. 38-39).

Um exemplo desse procedimento de importância fundamental é a definição de uma função contínua. Idéias bem vagas e gerais sobre relações etc. são necessárias para construir esta definição bem específica que quase nenhum aluno entende à primeira vista. Percepção instintiva, porém “é da mesma maneira falível, assim como distintamente consciente. Seu único valor está em campos de conhecimento com os quais nós somos muito familiares” (loc. cit., p. 36).

## Referências

- AEBLI, H. **Denken: das Ordnen des Tuns**. Stuttgart. , Klett-Cotta, 1981.
- ATHEN, H. et al. **Mathematik heute 7**. Hanover: Schroedel, 1979.
- ATIYAH, M. ,Wandel und Fortschritt. In: der Mathematik' in M. Otte (Ed.): **Mathematiker über die Mathematik**. Berlin: Springer, 1974.
- BALLSTAEDT, St-P. H. MANDL. W. SCHNOTZ, and S. TERGAN. **Texte verstehen, Texte gestalten**. München: Urban and Gauthier-Villars, 1967.
- BOHM, D. Science As Perception-Communication'. In: SUPPE, F. (Ed.): **The Structure of Scientific Theories**. Chicago/London: Urbana, 1977.
- BRANNIGAN, A. **The Social Basis of Scientific Discoveries**. Cambridge: University Press, 1981.
- CASTELNUOVO, E. **La Matematica**. Florenz: La Nuova Italia Editrice, 1979 v. 1-2.
- CASTONGUAY, C. **Meaning and Existence in Mathematics**. Springer: Verlag, 1973.
- CHOMSKY, N. **Reflections on Language**. London, 1975.
- CHURCHMAN, C.W. **Philosophie des Managements**. Freiburg, 1973.
- CHYZAN-FELUCH, B. and W. ZAWADOWSKI. **Matemanyka 4**. Wydawnictwa Szkolne: Pedagogiczne, Warsaw, 1979.
- DALEK, K.; ZAWADOWSKI, W. **Matematyka 5**. Warsaw, 1982.
- DAMEROW, P. and LEFEV'RE, W. (Eds.). **Rechenstein, Experiment, Sprache**. Stuttgart: Klett-Cotta, 1981.
- ERSHOW, E.P. and KNUTH, D., (Eds.). **Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science**. Heidelberg: Springer, 1981.
- FEYNMANN, R. **The Character of Physical Laws**. Cambridge/USA: The MIT Press, 1967.
- FISH, S. (1980), **Is There a Text in This Class?** Cambridge, U.S.A., 1978.
- FREEDMAN, D. et al. **Statistics**. Norton, New York.
- FREUDENTHAL, H. **Weeding and Sowing**. Dordrecht: Reidel, 1978.
- GOMBRICH, E.H. 'The Visual Image'. In: **73rd Yearbook of NSSE**, Chicago, 1974, p. 241-270.

- GREENE, D.H. and KNUTH, D. **Mathematics for the Analysis of Algorithms.**, Basel: Birkhäuser, 1981.
- HADAMARD, J. **The Psychology of Invention in the Mathematical Field.** New York: Dover Publication, 1954.
- HAHN, O.; DZEWAS, J. **Mathematik.** Braunschweig: Westermann Verlag, 1978-1982.
- HAYEN, J. et al. **Gamma 8.** Stuttgart: Klett, 1979.
- HILBERT, D. Über das Unendliche<sup>6</sup>. In: **Hilbertiana, Wiss. Buchgem. Darmstadt.** 1965.
- HIRSCH, E.D. **Validity in Interpretation.** Yale University Press, 1967.
- HUND, F. **Grundbegriffe der Physik.** Mannheim: Teil I, 1979.
- JAHNKE, H.N. ‚Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem<sup>6</sup>‘, **Materialien und Studien**, v.10, Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld, 1978.
- JAHNKE, H.N. ‚Zum Verhältnis von Bildung und wissenschaftlichem Denken am Beispiel der Mathematik<sup>6</sup>‘, In: **Materialien und Studien**, v. 27, Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld, 1982.
- JAHNKE, H. N. and OTTE, M. ‚Complementarity of Theoretical Terms - Ratio and Proportion as an Example<sup>6</sup>‘. **Proceedings einer SLO-Konferenz zum Funktionsbegriff**, Enschede, 1981.
- KEITEL, Ch., OTTE, M. and SEEGER, F. **Text-Wissen-Tätigkeit: Das Schulbuch im Mathematikunterricht**, Königstein/Ts, 1980.
- KLIX, F. **Erwachendes Denken.** Berlin (DDR), 1980.
- KNUTH, D. ‚Algorithms in Modern Mathematics<sup>6</sup>‘. In: **Ershov and Knuth**, 1981. p. 82-99.
- LEROI-GOURHAN, A. **Le Geste et la Parole.** Paris: Albin Michel, 1964.
- LOTMAN, J.M. **Die Struktur des künstlerischen Textes.** Frankfurt: Suhrkamp, 1973.
- LURIA, A.R. **The Mind of a Mnemonisi.** Penguin Books, 1973.
- MACH, E. (1974). **The Science of Mechanics: A Critical and Historical Account of Its Development.** Transl. by T. McCormack, The Open Court Publ. Comp., LaSalle (Ill).
- MANIN, YJ. **Mathematics and Physics.** Basel: Birkhäuser, 1981.
- Mathematik 6.** Berlin: Verlag Volk und Wissen, 1976.

MELLIN-OLSEN, S. 'Instrumentalism as an Educational Concept', **Educational Studies in Mathematics** 12, p. 351-367, 1981.

MUELLER, I. 'Euclid's Elements and the Axiomatic Method'. In: **Brit. J. Phil. Sci.** 20, p. 289-309. 1969.

NEISSER, U. **Cognition and Reality**, San Francisco: Freeman and Co., 1976.

OTTE, M. 'On the Question of the Development of Theoretical Concepts', in **Communication and Cognition** 13, n. 1, Brugge, 1980.

\_\_\_\_\_. 'Das Schulbuch in Mathematikunterricht'. **Der Mathematiklehrer** 3, p. 22-27. Hannover, 1981a.

\_\_\_\_\_. (1981b), **What Relevance Has the 'Problem of Texts' for Mathematics Education and Its Understanding?**, Occ. paper 15(1981), IDM Bielefeld.

\_\_\_\_\_. 'Ways of Knowing and Modes of Presentation'. In: **Moyens et medias dans l'Enseignement des Mathematiques. XXXIVe Rencontre.** p. 41-69. Orleans, 1982.

\_\_\_\_\_. 'Textual Strategies'. **For The Learning of Mathematics**, 3 (3), p. 15-28. Montreal, 1983.

PATTEE, H. H. 'Discrete and Continuous Processes in Computers and Brains', in Conrad. Güttinger and Dallin (Eds.): **Physics and Mathematics of the Nervous System.** Lecture Notes in Biomathematics, p.128-148. Heidelberg: Springer, 1979.

POINCARÉ, H. (1948), 'Mathematical Creation'. **Scientific American.** August 1948.

POLYA, G. **Schule des Denkens.** München: Francke Verlag, 1967.

PUTNAM, H. 'Mathematics Without Foundations'. In: **Mathematics, Matter and Method**, Cambridge, 1975.

QUINE, W.V. **Ontological Relativity and Other Essays.** Columbia University Press, 1969.

SCHMITT, H. and Wohlfarth, P. **Mathematikbuch** 7, BSV München, 1980.

SCHULZ v. THUN, F. and GÖTZ, W. **Mathematik verständlich erklären,** München, 1976.

SKEMP, R.R. **The Psychology of Learning Mathematics,** Penguin Books, 1971.

SORGER, F., FREUND, H. and RÖHRL E. **Tr ffpunkt Mathematik** 5, Herder, Freiburg, 1980.

THOM, R. ,Modern Mathematics: Does It Exist?' In: A.G. Howson (Ed.), **Developments in Mathem. Education**. Cambridge University Press, 1973, p. 194-212.

\_\_\_\_\_. (1975), **Structural Stability and Morphogenesis**, Benjamin, London.

TILLICH, E. and CHR. WEI (Eds.). **Beiträge zur Erziehungskunst**, Leipzig: H. Gräff, 1806.

WANG, W.S.-Y. **Human Communication: Language and its Psychological Basis**, W.H. Freeman, 1981.

WOLTERS, M. **Van Rekening naar Algebra**. Diss. Universität Utrecht. 1978.

WALTHER, G. **Textauseinandersetzung** - ein Aspekt des autonomen Lernens im Mathematik-unterricht, Dortmund (unpublished typescript), 1978.

Recebimento em: 25/03/2008.

Aceite em: 01/07/2008.