

Homotopía polinomial cuadrática *

Gamaliel Blé González †

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, DACB

Juan Barajas Fernández ‡

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, DAIA

En este trabajo desarrollamos un criterio para seleccionar un polinomio cuadrático en la solución de sistemas no lineales por homotopía polinomial.

In this work we develop a criteria for select a quadratic polynomial in the solution of no linear systems by polynomial homotopy.

Método homotópico, sistemas no lineales

Keywords: Homotopic method, No linear systems.

1. Introducción

Resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas es equivalente a encontrar los ceros de una función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Esto es,

$$F(x) = 0. \quad (1)$$

Uno de los métodos para resolver (1) es el método homotópico, el cual consiste en perturbar (1) usando una función de apoyo $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y una homotopía $H : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, entre F y G , definida como

$$H(x, t) = tF(x) + (1 - t)G(x). \quad (2)$$

En este nuevo sistema, la función $G(x)$ se elige de tal manera que sus raíces sean conocidas. Así, las soluciones del sistema (1) viven en el conjunto de nivel $H^{-1}(0)$ y corresponden a $t = 1$. Como H va de \mathbb{R}^{n+1} a \mathbb{R}^n , si H es de clase \mathcal{C}^1 y cero es un valor regular de H , entonces el conjunto $H^{-1}(0)$ es una $1 - variedad$, es decir, es la unión de curvas y a cada una de las componentes de este conjunto se les llama *curvas homotópicas* [5].

Dado que

$$H(x, 0) = G(x),$$

*Recibido el 10 de junio de 2009 y aceptado el 27 de agosto de 2009. Apoyado por CONACYT 58968

†**Dirección postal:** Carr. Cunduacán-Jalpa Km 1, Cunduacán Tabasco, México. A.P. 24 C.P. 86690. Tel. (+52)914 336-0928. **Correo electrónico:** gble@ujat.mx

‡**Dirección postal:** Carr. Cunduacán-Jalpa Km 1, Cunduacán Tabasco, México. A.P. 24 C.P. 86690. Tel. (+52)914 336-0928. **Correo electrónico:** juan.barajas@daia.ujat.mx

la estrategia para encontrar una raíz de $F(x)$ consiste en elegir una raíz x_0 de $G(x)$ y recorrer la curva homotópica γ que pasa por $(x_0, 0)$, comenzando en $t = 0$ hasta llegar a $t = 1$, que es donde se obtiene una raíz de $F(x)$. A priori, esta trayectoria puede presentar ramificaciones y no alcanzar una solución en $t = 1$, pero si ambas funciones, $F(x)$ y $G(x)$, son funciones de clase \mathcal{C}^2 , el teorema de Sard permite garantizar que para casi cualquier condición inicial x_0 , la curva homotópica $\gamma(\rho)$ alcanza en $t = 1$ una solución del sistema (1), [2].

Dentro de las funciones de apoyo G que se han trabajado en la literatura destacan las polinomiales, en particular, la homotopía de punto fijo, la cual corresponde a un polinomio lineal [1, 4]. En el caso de la homotopía polinomial se eligen polinomios que tengan raíces simples y existen al menos dos estrategias para elegirlos. Una es tomar G de tal manera que tenga tantas raíces como F , es decir, si F tiene d raíces se toma $G(x) = \prod_{i=1}^d (x - a_i)$. Así, para encontrar las raíces de F se recorren las trayectorias homotópicas que pasan en los diferentes puntos de partidas $(a_i, 0)$ [4]. El problema que se presenta en este caso es que puede ocurrir que dos trayectorias homotópicas converjan a la misma raíz de F y por lo tanto al recorrer todas las curvas homotópicas no se obtienen todas las raíces de F . Además, es necesario conocer el número de raíces de F . Una alternativa para esta homotopía es tomar un polinomio de grado pequeño pero garantizar que al recorrer las curvas homotópicas se van a alcanzar todas las raíces. En particular, se conjetura que es posible elegir G de tal manera que todas las raíces de F se encuentren en una sola curva homotópica y por lo tanto solo se necesita un punto de partida.

En la homotopía de punto fijo G es de grado uno, tiene una sola raíz y dependiendo de la elección de ésta, la curva homotópica puede contener o no todas las raíces. En un trabajo anterior [9] se presentó un criterio para hacer la elección de G basados en el trabajo de Kuno-Seader para homotopía de punto fijo [6]. Debido a que para sistemas de dos variables la homotopía de punto fijo presenta problemas que es posible superar con una homotopía polinomial de grado dos [10], en este trabajo se analiza el caso cuando G es una función polinomial en una variable y en particular se analiza el caso cuando se tiene un polinomio de grado dos.

2. Homotopía Polinomial

Cuando $k = 1$, la homotopía polinomial consiste en tomar la función de apoyo

$$G(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_d). \quad (3)$$

Así, tenemos la homotopía

$$H(x, t) = tF(x) + (1 - t) \prod_{k=1}^d (x - r_k). \quad (4)$$

En general, si $k > 1$, entonces la función G es una función vectorial cuyas entradas son funciones polinomiales de grado d como (3). En particular en el caso $d = 2$, decimos que la homotopía es cuadrática y la función de homotopía es,

$$H(x, t) = tF(x) + (1 - t)(x - r_1)(x - r_2) \quad (5)$$

Un problema interesante es determinar una estrategia para elegir las dos raíces de G de tal manera que ellas y todas las raíces de F se encuentren en la misma curva homotópica. Si esto ocurre, entonces partiendo de cualquiera de ellas se pueden encontrar todas las raíces. Este problema lo analizaremos en la siguiente sección.

3. Homotopía cuadrática para una ecuación

Con el fin de mostrar como cambian las curvas homotópicas, en una homotopía cuadrática, a medida que varían las condiciones iniciales, presentamos los siguientes dos ejemplos, uno muestra el caso de una función par y el otro el de una función impar.

Example 3.1. Resolver la ecuación cúbica

$$f_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0, \quad (6)$$

usando una homotopía cuadrática.

Al aplicar la homotopía cuadrática a la ecuación (6), ésta se transforma en,

$$H(x, t) = t(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) + (1 - t)(x - x_{0_1})(x - x_{0_2}) = 0.$$

Vamos a fijar $x_{0_1} = -3$, para tener un grado de libertad en la elección del punto de partida. Así,

$$H(x, t) = t(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) + (1 - t)(x + 3)(x - x_{0_2}) = 0. \quad (7)$$

En la figura 1, mostramos las curvas de nivel que se obtienen de la ecuación (7) al variar x_{0_2} .

Las figuras 1 (a) y 1 (b), corresponden a $x_{0_2} = -1$ y $x_{0_2} = 0$, respectivamente. En cada una de ellas podemos observar que el conjunto $H^{-1}(0)$ está formado por dos componentes homotópicas. En ambas figuras, tanto x_{0_1} como x_{0_2} se encuentran sobre la misma componente, la cual pasa por las tres raíces de $f_3(x)$.

Para $x_{0_2} = 1$ y $x_{0_2} = 3$, tenemos las figuras 1 (c) y 1 (e), respectivamente. Estas muestran que el conjunto $H^{-1}(0)$ está formado por cuatro componentes, de las cuales, la componente que pasa por x_{0_1} no pasa por las raíces de $f_3(x)$, mientras que la componente que pasa por x_{0_2} es la que pasa por las tres raíces de $f_3(x)$.

En cambio, para $x_{0_2} = 2$, en la figura 1 (d) se muestra que la componente de $H^{-1}(0)$ que contiene a x_{0_1} no pasa por las raíces de $f_3(x)$, mientras que la componente de $H^{-1}(0)$ que pasa por x_{0_2} se bifurca en tres componentes que tienen la característica de que cada una contiene una raíz de $f_3(x)$; por lo que siguiendo la dirección de una trayectoria solamente se puede obtener una raíz de $f_3(x)$ partiendo de x_{0_2} . La figura 1 (f), corresponde a $x_{0_2} = 4$ y el conjunto $H^{-1}(0)$ que se muestra está formado por

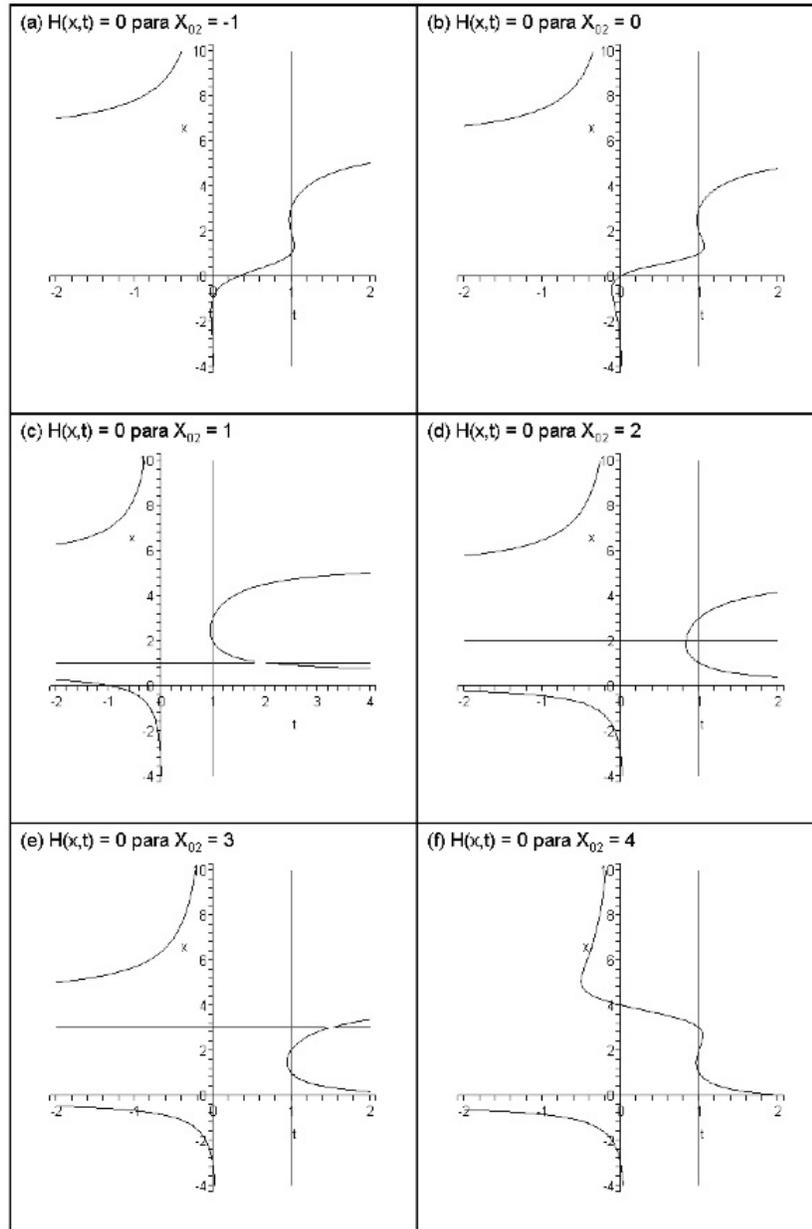


Figura 1. Curvas de nivel de $H(x, t) = 0$ para $f_3(x)$ y $x_{01} = -3$.

dos componentes, de las cuales, una contiene a x_{01} pero no pasa por las raíces de $f_3(x)$ y la otra contiene a x_{02} y a las tres raíces de $f_3(x)$. Aquí es importante observar que las figuras 1 (a), (b) y (f) muestran que aún cuando $H^{-1}(0)$ no es conexo, es posible tener todas las raíces de $f_3(x)$ en una componente de $H^{-1}(0)$.

Example 3.2. Resolver la ecuación cuártica

$$f_4(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = 0, \quad (8)$$

usando una homotopía cuadrática.

Usando una homotopía cuadrática, la ecuación (8) se lleva a

$$H(x, t) = t(x^4 - 5x^2 + 4) + (1 - t)(x - x_{0_1})(x - x_{0_2}) = 0.$$

Fijando de nuevo $x_{0_1} = -5$ tenemos que

$$H(x, t) = t(x^4 - 5x^2 + 4) + (1 - t)(x + 5)(x - x_{0_2}) = 0, \quad (9)$$

En las figuras 2 y 3 mostramos las curvas de nivel correspondientes a la ecuación (9) para diversos valores de x_{0_2} .

Las figuras 2 (a) y 2 (b), corresponden a $x_{0_2} = -3$ y $x_{0_2} = -2$, respectivamente. Allí se muestra que una de las componentes de $H^{-1}(0)$ contiene tanto a x_{0_1} como a x_{0_2} y que esa componente no pasa por las raíces de $f_4(x)$, las cuales se encuentran en la otra componente de $H^{-1}(0)$, por lo que no es posible alcanzar las raíces de $f_4(x)$ desde las condiciones iniciales.

La figura 2 (c), corresponde a $x_{0_2} = -1.5$, y muestra que la componente de $H^{-1}(0)$ que contiene a x_{0_1} sólo pasa por la raíz $x = -2$. Mientras que la componente de $H^{-1}(0)$ que contiene a x_{0_2} pasa por las otras tres raíces de $f_4(x)$.

Para $x_{0_2} = -1$, la figura 2 (d) muestra que la componente de $H^{-1}(0)$ que contiene a x_{0_1} solamente pasa por la raíz $x = -2$ y que la componente de $H^{-1}(0)$ que contiene a x_{0_2} sólo pasa por la raíz $x = -1$. Las otras dos raíces de $f_4(x)$ se encuentran en otra componente, por lo que no es posible alcanzarlas partiendo desde las condiciones iniciales.

Las figuras 2 (e), 2 (f) y 3 (g), corresponden a $x_{0_2} = -0.5$, $x_{0_2} = 0$ y $x_{0_2} = 0.5$, respectivamente. En ellas se observa que la componente de $H^{-1}(0)$ que contiene a x_{0_1} y x_{0_2} pasa por dos raíces de $f_4(x)$, las cuales son $x = -2$ y $x = -1$, mientras que las otras dos raíces de $f_4(x)$ se encuentran sobre otra componente de $H^{-1}(0)$, por lo que no es posible alcanzarlas.

Para $x_{0_2} = 1$, la figura 3 (h), muestra que la componente que contiene a x_{0_1} pasa por $x = -2$ y $x = -1$, pero que después llega a una bifurcación en la cual se debe elegir el camino de homotopía que se va a seguir; de dicha elección dependerá si se pasa por alguna de las otras raíces de $f_4(x)$, motivo por el cual, si partimos desde esta condición, a lo más obtendremos tres raíces de $f_4(x)$. Por otra parte, si partimos de x_{0_2} nos encontramos con otra bifurcación, al elegir uno de los caminos que salen de la bifurcación a lo más se pueden alcanzar dos raíces de $f_4(x)$.

Para $x_{0_2} = 1.5$ y $x_{0_2} = 2$, las figuras 3 (i) y 3 (j) muestran que la componente de $H^{-1}(0)$ que contiene a x_{0_1} pasa por tres de las raíces de $f_4(x)$, que son $x = -2$, $x = -1$ y $x = 1$, mientras que la componente de $H^{-1}(0)$ que contiene a x_{0_2} pasa por la raíz restante de $f_4(x)$.

Las figuras 3 (k) y 3 (l), que corresponden a $x_{0_2} = 3$ y $x_{0_2} = 5$, muestran que tanto x_{0_1} como x_{0_2} se encuentran sobre la misma componente, la cual contiene todas las raíces de $f_4(x)$.

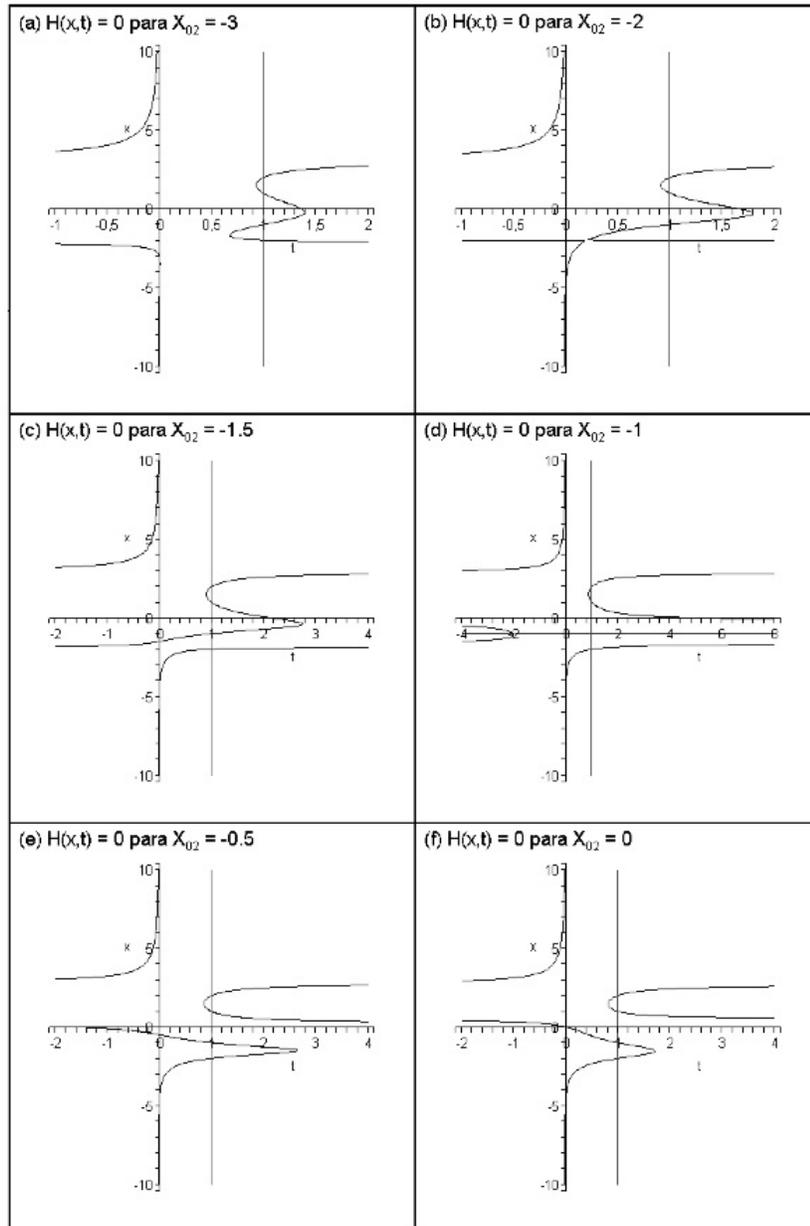


Figura 2. Curvas de nivel de $H(x, t) = 0$ para $f_4(x)$ y $x_{0_1} = -5$.

Esto último nos motiva a generar un criterio que garantice la soluciones de una ecuación usando homotopía polinomial.

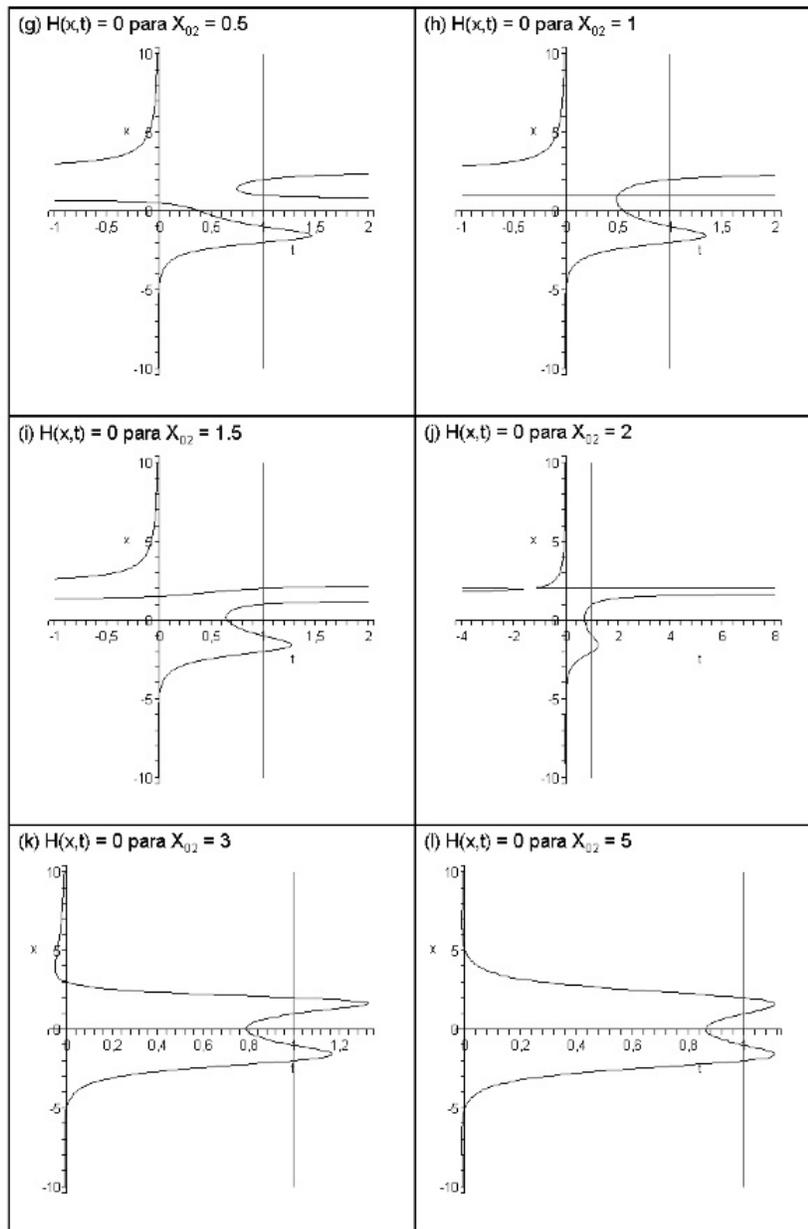


Figura 3. Curvas de nivel de $H(x,t) = 0$ para $f_4(x)$ y $x_{01} = -5$.

4. Criterio para elegir el polinomio

Cuando se aplica una homotopía polinomial a una ecuación en general se tiene que resolver la ecuación $H(x,t) = 0$. Cuando H es de clase C^1 y cero es un valor regular entonces se tiene que las componentes de $H^{-1}(0)$ son curvas diferenciables y estamos interesados en establecer condiciones necesarias para que exista una sola componente en este conjunto de nivel. Trabajaremos con las condiciones necesarias porque las

condiciones suficientes en general son difíciles de verificar para un sistema dado [3, 7]. Dentro de los puntos del dominio de H , los que contribuyen fuertemente en la geometría de las curvas de nivel, son los puntos críticos de H , ya que éstos determinan los valores extremos de la función y para valores cercanos a estos se generan componentes en los conjuntos de nivel correspondientes. En consecuencia una función con un mayor número de puntos críticos, tendrá un mayor número de componentes. Para evitar esto o reducir el número de componentes de $H^{-1}(0)$ es necesario elegir las raíces r_i de tal manera que se minimice el número de raíces del gradiente de H .

Como el gradiente de H es

$$DH(x, t) = (tF'(x) + (1-t)G'(x), F(x) - G(x)),$$

para minimizar el número de puntos críticos es suficiente con que minimicemos el número de raíces de $F(x) - G(x)$. Por ello, si se desea una función G de tal manera que todas las raíces de F estén en una misma componente de $H^{-1}(0)$, es necesario que el número de raíces de $F(x) - G(x)$ sea mínimo. Así, un criterio para elegir la función G es tal que sus raíces r_i para $i = 1, \dots, d$ formen una d -ada que pertenezca al conjunto

$$A = \{(y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d : N(y_1, \dots, y_d) = \min_{z \in \mathbb{R}^d} N(z)\},$$

donde $N(z)$ es el número de raíces reales del polinomio $F(x) - \prod_{i=1}^d (x - z_i)$, para $z = (z_1, \dots, z_d)$.

En el caso $d = 1$, tenemos $G(x) = (x - r_1)$, la homotopía es de punto fijo y el criterio coincide con el criterio de Kuno Seader, [9, 6]. En este caso, el problema de minimizar se traduce a encontrar de nuevo raíces de la derivada y de igual manera puede resultar difícil de verificar. Lo que vamos a mostrar en el siguiente resultado es que para el caso de homotopía cuadrática el criterio se puede verificar conociendo el intervalo donde se encuentran las raíces.

Proposition 4.1. Sea $\varphi(x) = F(x) - G(x)$, donde G es un polinomio de grado d como en (3). Si G tiene una única raíz r_i dentro del intervalo (α_1, α_2) , donde α_j son raíces consecutivas de F para $j = 1, 2$. Entonces $\varphi(x)$ tiene una raíz en el intervalo (α_1, α_2) .

Demostración Sean α_1 y α_2 raíces consecutivas de F .

$$\varphi(\alpha_1) = -G(\alpha_1)$$

$$\varphi(\alpha_2) = -G(\alpha_2).$$

Supongamos que ambas tienen el mismo signo, es decir que ambas son positivas o negativas.

Si ambas son positivas, entonces como $G(r_i) = 0$, G tiene un mínimo en (α_1, α_2) , el cual tiene que ser negativo porque r_i es una raíz simple. Aplicando el teorema del valor intermedio a G obtenemos una nueva raíz de G , lo cual es una contradicción porque r_i es la única raíz de G en (α_1, α_2) .

De igual manera si ambas son negativas, G debe tener un mínimo y se llega con el mismo argumento a una contradicción. Por lo tanto, tenemos que $G(\alpha_1)$ y $G(\alpha_2)$

tienen signos diferentes, lo que implica que φ tiene una raíz en el intervalo (α_1, α_2) .

Este resultado en particular nos dice que para minimizar el número de raíces de φ , es necesario tomar las raíces de G fuera del intervalo que contiene las raíces de F . Esto se traduce para la homotopía de punto fijo que se debe tomar r_1 de tal manera que todas las raíces de F se encuentren en el rayo $(-\infty, r_1)$ o (r_1, ∞) . En el caso de homotopía cuadrática el resultado sugiere que se deben tomar r_1 y r_2 de tal manera que ambas cumplan la condición dada para r_1 en la homotopía de punto fijo, lo cual se traduce en que todas las raíces estén a la derecha de r_1 y r_2 , todas las raíces estén a la izquierda o que el intervalo (r_1, r_2) contenga todas las raíces de F . Nosotros en particular hemos trabajado con este último el cual ha resultado desde el punto de vista computacional más adecuado como podemos observar en las figuras 1,2,3.

5. Conclusión

Cuando se aplica la homotopía de punto fijo o la cuadrática para resolver una ecuación, es posible establecer un criterio para calcular todas las raíces de F desde un punto de partida. En el caso de homotopía de punto fijo es necesario tomar r_1 mayor que todas las raíces de F o menor que éstas. Para la homotopía cuadrática un criterio es elegir las dos raíces r_1, r_2 de G de tal manera que las raíces de F estén en el intervalo (r_1, r_2) . Así, basta con tener una idea en que intervalo se ubican las raíces de F para hacer una buena elección de G o simplemente tomando las r_i 's lo suficientemente grande en valor absoluto también se puede garantizar este criterio.

Referencias

- [1] E.L. Allgower y K. Georg (1990); *Introduction to Numerical Continuation Methods*. Berlin, Springer-Verlag.
- [2] S-N. Chow, J. Mallet-Paret y J.A. Yorke (1978); Finding zeroes of maps: homotopy methods that are constructive with probability one. *Mathematics of Computation*, **32**, 143, pp. 887-899.
- [3] I. Diener (1987); On the global convergence of path-following methods to determine all solutions to a system of nonlinear equations. *Mathematical Programming*, **39**, pp. 181-188.
- [4] K. Hazaveh, D.J. Jeffrey, G.J. Reid, S.M. Watt y A.D. Wittkopf (2003); An exploration of homotopy solving in Maple. *Proceeding, ASCM 2003*, pp. 145-162.
- [5] M.W. Hirsch (1997); *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics, **33**. New York, Springer-Verlag.
- [6] M. Kuno y J.D. Seader (1988); Computing all real solutions to systems of nonlinear equations with a global fixed-point homotopy. *Ind. Eng. Chem. Res.*, **27**, 7, pp. 1320-1329.
- [7] J. Lee y H-D. Chiang (2001); Constructive homotopy methods for finding all or multiple DC operating points of nonlinear circuits and systems. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, **48**, 1, pp. 35-50.

- [8] W.J. Lin, J.D. Seader y T.L. Wayburn (1987); Computing multiple solutions to systems of interlinked separation columns. *AIChE J.*, **33**, pp. 886.
- [9] Vidal Gerónimo Mario A. y Blé González Gamaliel (2008); Seguimiento de curvas homotópicas. *Revista de Ciencias Básicas, UJAT*, **7** No.1. pp. 3-14.
- [10] Vidal Gerónimo Mario A. (2008); Aplicación de un método homotópico en la determinación de puntos críticos de mezclas. Tesis de Maestría en Matemáticas Aplicadas, DACB-UJAT.