

Unicidad al problema de Dirichlet a través de martingalas *

Luis Miguel Valenzuela Gómez †

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, DACB

José Villa Morales ‡

Universidad Autónoma de Aguascalientes, Ciencias Básicas

Presentamos un método basado en la teoría de martingalas para demostrar la unicidad del problema de Dirichlet. Además, mostramos como se puede obtener una representación gráfica de la solución usando simulación.

We present a method based on the theory of martingales to prove the uniqueness of Dirichlet problem. Moreover, we show how to obtain a graphic representation of the solution using simulation.

Palabras claves: Problema de Dirichlet, Martingalas, Simulación.

Keywords: Dirichlet Problem, Martingales, Simulation.

1. Introducción

La motivación principal para escribir esta nota es brindarle a los estudiantes de licenciatura y posgrado en matemáticas una aplicación interesante de la teoría de las martingalas a las ecuaciones diferenciales parciales.

Una de las ecuaciones diferenciales parciales más importantes que se presentan en la matemática clásica es la que se conoce con el nombre de ecuación de Laplace,

$$\Delta u = 0,$$

donde $\Delta = \sum_{k=1}^d \partial^2 / \partial x_k^2$ es el Laplaciano y u es una función incógnita.

Las ecuaciones de este tipo se presentan, por ejemplo, en ramas de la física, como conducción del calor, campos electrostáticos, la función de potencial eléctrico en un medio dieléctrico que no contiene cargas eléctricas. En estos problemas se deben de satisfacer ciertas condiciones en la frontera. Por ejemplo, en la conducción de calor sólo conocemos la temperatura en la frontera del material, es decir, sobre una curva o una superficie que limita la región de interés. El problema de encontrar una solución a la ecuación de Laplace que toma valores dados en una cierta frontera, se conoce como “problema de Dirichlet”, en honor a Lejeune Dirichlet.

Siempre es posible garantizar la existencia y unicidad de la solución al problema de

*Recibido el 12 de mayo de 2009 y aceptado el 9 de mayo de 2009

†**Dirección postal:** Carr. Cunduacán-Jalpa Km 1, Cunduacán Tabasco, México. A.P. 24 C.P. 86690. Tel. (+52)914 336-0928. **Correo electrónico:** luismy_1983@hotmail.com.mx

‡**Dirección postal:** Av. Universidad No. 940 Col. Ciudad Universitaria C.P. 20100 Aguascalientes, Ags. **Correo electrónico:** jvilla@correo.uaa.mx

Dirichlet, esto ocurre si la forma de la frontera y la función, definida en la frontera, satisfacen ciertas condiciones de regularidad. En este trabajo nos proponemos mostrar, con detalle, la unicidad de la solución al problema de Dirichlet vía la teoría de las martingalas, este método fue inicialmente introducido por Doob en [1].

El siguiente trabajo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2 introducimos el concepto de martingala y presentamos el teorema de convergencia de martingalas de Doob. En la Sección 3 abordamos la existencia y unicidad del problema de Dirichlet considerando los casos $d = 1$ y $d \geq 2$ por separado. Finalmente, en la Sección 4 mostramos como se puede usar simulación para resolver este tipo de problemas.

2. Teorema de Convergencia de Martingalas

El método para mostrar la unicidad del problema de Dirichlet depende de la noción de martingala, el cual, dicho sea de paso, es una de las clases de procesos estocásticos más importantes en probabilidad.

El concepto de martingala está basado en la noción de esperanza condicional, el cual recordamos a continuación. Sea X una variable aleatoria definida en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Supongamos que X es integrable, es decir el valor esperado de $|X|$ es finito, $E[|X|] < \infty$, y \mathcal{G} una sub- σ -álgebra de \mathcal{F} . La esperanza condicional, $E[X|\mathcal{G}]$, de X dada \mathcal{G} es la única (P -c.s.) variable aleatoria \mathcal{G} -medible e integrable tal que

$$\int_A E[X|\mathcal{G}]dP = \int_A XdP, \quad \forall A \in \mathcal{G}. \quad (1)$$

Una propiedad de la esperanza condicional que usaremos en este trabajo es:

Proposición 1. Sea $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Si X es independiente de \mathcal{G} y Y medible con respecto a \mathcal{G} , entonces

$$E[\phi(Y, X)|\mathcal{G}] = E[\phi(y, X)]|_{y=Y}. \quad (2)$$

La demostración de este hecho puede hacerse considerando primero funciones indicadoras, luego funciones simples y finalmente funciones medibles y acotadas.

Una sucesión (\mathcal{F}_n) de sub- σ -álgebras de \mathcal{F} se llama filtración si $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1. Una sucesión de variables aleatorias $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definidas en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) se llama martingala, con respecto a la filtración (\mathcal{F}_n) , si para cada $n \in \mathbb{N}$,

- a) M_n es medible con respecto a \mathcal{F}_n ,
- b) $E[|M_n|] < +\infty$,
- c) $E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$.

A fin de darle una interpretación heurística a este concepto supongamos que apostamos un peso en cada lanzamiento de una moneda legal y que M_n representa nuestro capital, en el n -ésimo lanzamiento. Ahora bien, la intuición nos dice que si la probabilidad de que caiga cara es la misma de que caiga sol, entonces el juego es legal. Esto significa que en cualquier instante, n , la estimación, $E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]$, de mi capital en la siguiente jugada, $n + 1$, es la misma cantidad, es decir M_n . De modo que, en promedio nadie pierde ni gana, por lo tanto se trata de un juego justo.

Continuando con la analogía del párrafo previo tenemos que en un juego justo la sucesión formada por el capital, M_n , no debe fluctuar demasiado, por ende esta debe ser convergente. En efecto, se tiene el siguiente resultado, conocido como Teorema de Convergencia de Martingalas, debido a J.L. Doob.

Teorema 1. Sea $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una martingala, con respecto a la filtración (\mathcal{F}_n) , acotada. Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_\infty$ existe casi seguramente y $E[|M_\infty|] < +\infty$, es decir, M_∞ es integrable.

La demostración de este teorema, y más detalles concernientes a las esperanzas condicionales y a las martingalas, puede consultarse en [5].

3. Problema de Dirichlet

Sea $V \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto no vacío. Una función $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ se llama armónica en V si $\Delta h(x) = 0$, para cada $x \in V$. En esta sección trataremos el:

PROBLEMA DE DIRICHLET. Sea $V \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto no vacío y acotado. Sea $f : \partial V \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. El problema consiste en mostrar la existencia y unicidad de una función $h : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que sea armónica en V , continua en la cerradura de V , \bar{V} , y $h(x) = f(x)$ para cada x en la frontera de V , ∂V .

El caso $d = 1$ es particularmente simple, sin embargo para $d \geq 2$ el problema es mucho más interesante, sobre todo hay que notar que la existencia depende mucho de la geometría de la frontera del conjunto abierto V , ∂V .

3.1 Caso $d = 1$

Por ser $V \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto entonces V es unión contable de intervalos abiertos ajenos (ver, por ejemplo, el Lema 2.9 del Capítulo 2 del libro de Villa [4]), es decir $V = \cup_{I_n \subset V} I_n$. La condición $h''(x) = 0$, para cada $x \in I_n$, con $I_n \subset V$ implica que $h(x) = a_{I_n}x + b_{I_n}$. Puesto que $V \subset \mathbb{R}$ es acotado entonces existen $\inf\{I_n\}$, $\sup\{I_n\}$ y además $\inf\{I_n\}$, $\sup\{I_n\} \in \partial I_n \subset \partial V$. De modo que $h(\inf\{I_n\}) = f(\inf\{I_n\})$ y $h(\sup\{I_n\}) = f(\sup\{I_n\})$ para cada $I_n \subset V$. Resolviendo un sencillo sistema de ecuaciones obtenemos que

$$a_{I_n} = \frac{f(\sup\{I_n\}) - f(\inf\{I_n\})}{\sup\{I_n\} - \inf\{I_n\}},$$

$$b_{I_n} = \frac{\sup\{I_n\}f(\inf\{I_n\}) - \inf\{I_n\}f(\sup\{I_n\})}{\sup\{I_n\} - \inf\{I_n\}}.$$

Por ejemplo, si $V = (-2, -1) \cup (0, 1)$ y $f : \{-2, -1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ esta dada por

x	$f(x)$
-2	6
-1	-8
0	3
1	-5

entonces la solución al problema de Dirichlet $h : [-2, -1] \cup [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es

$$h(x) = \begin{cases} -14x - 22, & x \in [-2, -1], \\ -8x + 3, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

3.2 Caso $d \geq 2$

Sean $r > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$. Por $S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| = r\}$ denotaremos la esfera con centro en x y radio $r > 0$, donde $\|\cdot\|$ es la norma Euclidiana en \mathbb{R}^d . Además, por $d(x, A)$ designaremos la distancia del punto $x \in \mathbb{R}^d$ al conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$, es decir

$$d(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}.$$

En este caso vamos a considerar una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$, definidas en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y con distribución uniforme sobre la esfera unitaria, $S((0, \dots, 0), 1) \subset \mathbb{R}^d$.

Sea $v \in V$ arbitrario fijo. Definamos la sucesión

$$\begin{aligned} X_r^v(0) &= v, \\ X_{n+1}^v &= X_n^v + \frac{1}{2}d(X_n^v, \partial V)\vartheta_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \tag{3}$$

Una propiedad importante de las funciones armónicas que usaremos es la siguiente:

Proposición 2. Si $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica en V , entonces g tiene la propiedad del valor medio, es decir, para cada $x \in V$ y $r > 0$ tal que $S(x, r) \subset V$ se cumple que

$$g(x) = \frac{1}{|S(x, r)|} \int_{S(x, r)} g(z)S(dz), \tag{4}$$

donde $|S(x, r)|$ denota el área de la esfera $S(x, r)$ y $S(dz)$ la medida de Lebesgue en la esfera.

En la Proposición 4.2.2 del libro de Karatzas y Shreve [3] aparece una prueba, del resultado precedente, la cual hace uso de la Fórmula de Itô. El lector interesado en una demostración analítica puede ver el Teorema 2.8 del Capítulo 2 del libro de Folland [2].

Proposición 3. Sea $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica en V y continua en \bar{V} . Sea \mathcal{F}_n la mínima σ -álgebra tal que las variables aleatorias X_1^v, \dots, X_n^v son medibles, entonces $(g(X_n^v))_n$ es una martingala con respecto a (\mathcal{F}_n) .

Prueba. De la definición (3) de la sucesión (X_n^v) se sigue inmediatamente que $X_n^v \in \bar{V}$. Debido a que V es acotado entonces \bar{V} es un conjunto compacto. Puesto que g es continua, entonces $g(X_n^v)$ es integrable, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, tomando la función $\phi(y, x) = g(x + \frac{1}{2}d(x, \partial V)y)$ en (2), resulta que

$$\begin{aligned} E[g(X_{n+1}^v)|\mathcal{F}_n] &= E[\phi(\vartheta_{n+1}, X_n^v)|\mathcal{F}_n] \\ &= E \left[g \left(x + \frac{1}{2}d(x, \partial V)\vartheta_{n+1} \right) \right] \Big|_{x=X_n^v} \\ &= \frac{1}{|S(0, 1)|} \int_{S(0,1)} g \left(x + \frac{1}{2}d(x, \partial V)z \right) S(dz) \Big|_{x=X_n^v} \\ &= \frac{1}{|S(x, rd(x, \partial V))|} \int_{S(x, \frac{1}{2}d(x, \partial V))} g(z)S(dz) \Big|_{x=X_n^v} \\ &= g(x) \Big|_{x=X_n^v} = g(X_n^v). \end{aligned}$$

Nótese que en la tercera igualdad hemos usado la propiedad del valor medio de las funciones armónicas, ver (4). ■

Para cada $j = 1, \dots, d$, consideremos la función $g_j : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g_j(x) = x_j$, donde $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Puesto que g_j es armónica, tenemos que $(g_j(X_n^v))_n$ es una martingala acotada, esto por la Proposición 3. Entonces, del Teorema 1 concluimos que $(g_j(X_n^v))_n$ es convergente c.s. a un límite, que llamaremos $X_\infty^{v,j}$. De este modo, si hacemos $X_\infty^v = (X_\infty^{v,1}, \dots, X_\infty^{v,d})$, entonces $X_n^v \rightarrow X_\infty^v$, cuando $n \rightarrow \infty$, c.s.

Proposición 4. Bajo la notación precedente, se tiene que $X_\infty^v \in \partial V$ casi seguramente.

Prueba. Supongamos lo contrario, es decir que $X_\infty^v \notin \partial V$. Por lo tanto, $d(X_\infty^v, \partial V) > 0$, pues ∂V es un conjunto cerrado. Sea $\omega \in \Omega$ para el cual $X_n^v(\omega) \rightarrow X_\infty^v(\omega)$, $n \rightarrow \infty$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|X_n^v(\omega) - X_\infty^v(\omega)\| < \frac{1}{8}d(X_\infty^v(\omega), \partial V), \quad \forall n \geq n_0. \tag{5}$$

De la desigualdad del triángulo se sigue que

$$\|X_{n_0+1}^v(\omega) - X_{n_0}^v(\omega)\| < \frac{1}{4}d(X_\infty^v(\omega), \partial V). \tag{6}$$

Por otra parte, de (3) obtenemos

$$\|X_{n_0}^v(\omega) - X_{n_0+1}^v(\omega)\| = \frac{1}{2}d(X_{n_0}^v(\omega), \partial V). \tag{7}$$

Haciendo uso de (5)

$$\begin{aligned} d(X_\infty^v(\omega), \partial V) &\leq \|X_\infty^v(\omega) - X_{n_0}^v(\omega)\| + d(X_{n_0}^v(\omega), \partial V) \\ &\leq \frac{1}{8}d(X_\infty^v(\omega), \partial V) + d(X_{n_0}^v(\omega), \partial V), \end{aligned}$$

entonces (7) implica

$$\begin{aligned} \frac{7}{8}d(X_\infty^v(\omega), \partial V) &\leq d(X_{n_0}^v(\omega), \partial V) \\ &= 2\|X_{n_0}^v(\omega) - X_{n_0+1}^v(\omega)\|. \end{aligned}$$

Usando esta desigualdad y (6) se obtiene que $\frac{7}{8} < \frac{1}{2}$. Lo que es una contradicción. ■

Unicidad de la solución al problema de Dirichlet. Sea $h : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ una solución al problema de Dirichlet. Por la continuidad de h en \bar{V} se sigue que

$$h(X_n^v) \rightarrow h(X_\infty^v) = f(X_\infty^v), \quad n \rightarrow \infty, \text{ c.s.}$$

De la Proposición 3 obtenemos que $(h(X_n^v))_{n \in \mathbb{N}}$ es una martingala y usando el hecho de que las martingalas tienen esperanza constante resulta

$$h(v) = E[h(X_1^v)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[h(X_n^v)] = E[f(X_\infty^v)].$$

De este modo $h(v) = E[f(X_\infty^v)]$, para cada $v \in V$. Así, hemos demostrado que si hay una solución esta es única. La demostración de la existencia de la solución es más complicada y nos limitaremos a dar algunos comentarios generales, sin pretender que el lector tome esto como una demostración.

Existencia de la solución al problema de Dirichlet. Sea $h : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(v) = \begin{cases} f(v), & v \in \partial V, \\ E[f(X_\infty^v)], & v \in V. \end{cases}$$

Para mostrar que h es la solución al problema de Dirichlet hay que ver que h es armónica en V . Esto se sigue del recíproco de la Proposición 2, es decir, toda función que tiene la propiedad del valor medio es armónica, ver el Teorema 2.10 del Capítulo 2 del Libro de Folland [2]. La continuidad de h en \bar{V} es más delicada y depende mucho de la geometría de la frontera de V . Ver por ejemplo la Sección 4.2.C de [3] donde se dan condiciones de regularidad de la frontera de V .

Si $W_v(t)$ es un movimiento browniano que inicia en $v \in V$ se puede demostrar, a través de la Fórmula de Itô, que la solución del problema de Dirichlet está dado por $E[f(W_v(\tau))]$, donde τ es el primer instante en el que el movimiento browniano sale de V , para más detalles el libro de Karatzas y Shreve [3].

En la siguiente sección veremos como se puede usar simulación para encontrar una solución aproximada al problema de Dirichlet.

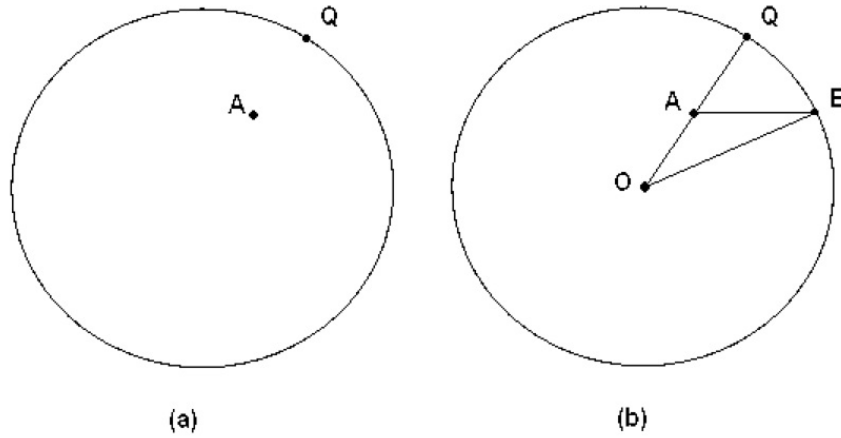


Figura 1. Punto más próximo en la frontera a un punto interior

4. Ejemplo cuando $d = 2$

En esta sección escribiremos un código en MATLAB 7.0 para simular una solución al siguiente problema de Dirichlet: Sea $V = B((0, 0), 1) \subset \mathbb{R}^2$ la bola cerrada con centro $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ y radio 1, además sea $f : \partial V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 2x^2 - 1$.

Como sabemos, para construir la sucesión definida en (3) es necesario encontrar $d(X_n^v, \partial V)$. Esto lo podemos plantear de la siguiente manera. Dado un punto interior A del disco unitario queremos encontrar el punto Q en el círculo unitario más próximo a A (ver Figura 1(a)). Afirmamos que Q se obtiene trazando un segmento de línea con punto inicial el origen O y que pasa por A . En efecto, sea B cualquier otro punto en el círculo unitario, por la desigualdad del triángulo obtenemos (ver Figura 1(b)):

$$\|O - A\| + \|A - Q\| = \|O - Q\| = 1 = \|O - B\| < \|O - A\| + \|A - B\|,$$

de modo que $\|A - Q\| < \|A - B\|$, como se quería.

Haciendo uso de esta información, la función en el Algoritmo 1 calcula $d(X_n^v, \partial V)$.

Iniciando en un punto v y haciendo $numit$ iteraciones buscamos, con la función del Algoritmo 2, el valor de X_{numit}^v . Una simulación de una trayectoria se presenta en la Figura 2.

La función f definida en el círculo unitario está dada en el Algoritmo 3. Nótese que se puede considerar otra función frontera con tan sólo modificar (*).

Para calcular el valor esperado $E[f(X_{numit}^v)]$ generamos una sucesión $X_{numit}^{v,1}, \dots, X_{numit}^{v,numit}$ de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas como X_{numit}^v , de modo que por la ley fuerte de los grandes números $E[f(X_{numit}^v)]$ es aproximadamente $\frac{1}{numit} \sum_{j=1}^{numit} f(X_{numit}^{v,j})$. Esto lo hacemos usando el Algoritmo 4.

Algoritmo 1 distancia

```

function [dist]=distancia(v)
if v(1,1)==0
    x=0; y=1;
    if v(1,2) < 0
        y=-1;
    end
else
    x=1/sqrt(1+(v(1,2)/v(1,1))^2); y=sqrt(1-x^2);
    if v(1,1) < 0
        x=-x;
    end
    if v(1,2) < 0
        y=-y;
    end
end
dist=sqrt((v(1,1)-x)^2+(v(1,2)-y)^2);

```

Algoritmo 2 valorx

```

function [valx]=valorx(v,numit)
x=v;
for i=1:numit
    0=2*pi*rand;
    x=x+(0.5)*distancia(x)*[sin(0),cos(0)];
end
valx=x;

```

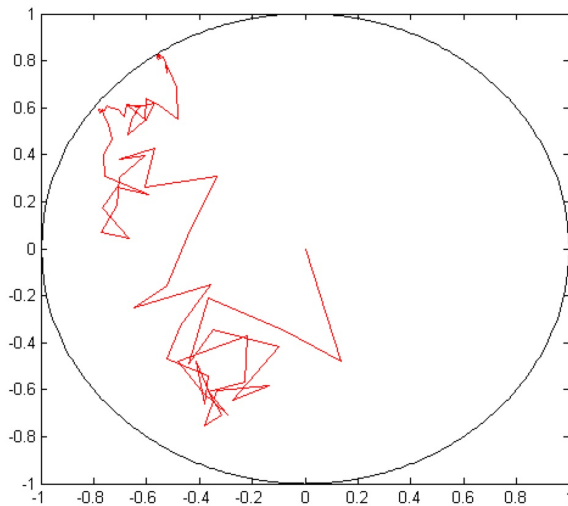


Figura 2. Simulación de X_n^v con $n = 1, \dots, 100$ y $v = (0, 0)$

Algoritmo 3 funcionfron

```
function [fx]=funcionfron(v)
fx=2*(v(1,1)^2)-1;    %se puede modificar (*)
```

Algoritmo 4 valorfx

```
function [valfx]=valorfx(v,numit)
S=0;
if norm(v) < 1
    for i=1:numit
        S=S+funcionfron(valorx(v,numit));
    end
    valfx=S/numit;
else
    valfx=funcionfron(v);
end
```

El Algoritmo 5 reúne las funciones precedentes. En el se pide el número de iteraciones que se desean para alcanzar la frontera y para aproximar el valor medio, es decir X_∞^v y $E[f(X_\infty^v)]$, respectivamente. Sin pérdida de generalidad hemos tomado el mismo número, `numit`, siempre y cuando este sea suficientemente grande. Además, se grafican las x -secciones de la solución, donde la separación entre ellas es un parámetro que también se solicita, a saber `numpar`. En la Figura 3 se muestra una simulación en la cual se realizaron 10,000 iteraciones y la distancia entre las x -secciones es de 0.01 unidades. Finalmente, en la Figura 4 cada extremo de las líneas verticales indican el máximo y el mínimo de las x -secciones de la función simulada (la que aparece en la Figura 3) menos la solución analítica del problema de Dirichlet, que en este caso es, $h(x, y) = x^2 - y^2$. La máxima discrepancia es de 0.0234 unidades.

Algoritmo 5 simulapd

```
clear; clc;
numit=input('Hola dame el número de iteraciones = ');
numpar=input('Dame la partición del circulo = ');
for k=1:(2*numpar)
    x(1)=-1+(k/numpar); y(1)=-sqrt(1-(x(1))^2);
    z(1)=funcionfron([x(1) -y(1)]); j=1;
    while j <= (2*(-y(1))*numpar)
        x(j+1)=x(1); y(j+1)=y(1)+(j/numpar);
        z(j+1)=valorfx([x(j+1) y(j+1)],numit);
        c=(0.5)*((z(j)+z(j+1))/2+1);
        plot3([x(j) x(j+1)], [y(j) y(j+1)], [z(j) z(j+1)], 'Color',
[0,c,0]);
        hold all
        j=j+1;
    end
    x=[]; y=[]; z=[];
end
```

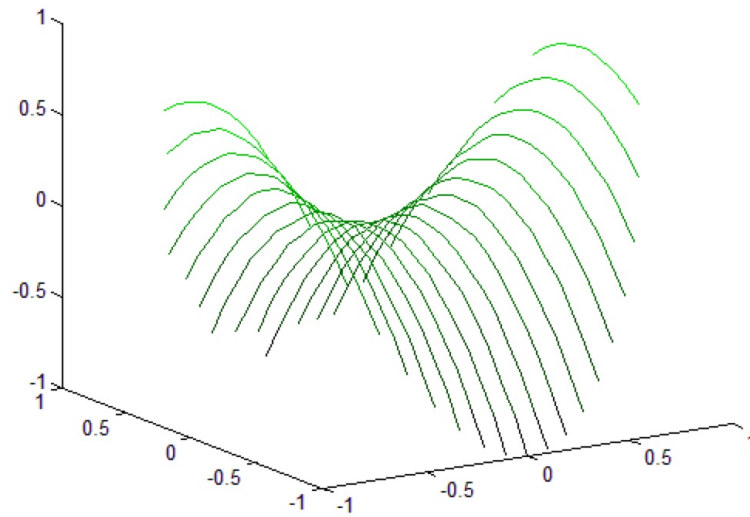


Figura 3. Simulación del problema de Dirichlet con $numpar = 10$ y $numit = 10000$

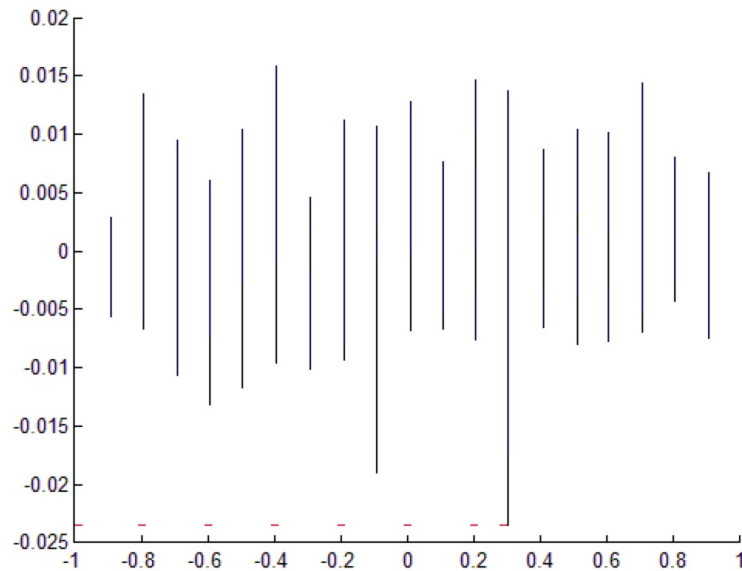


Figura 4. Gráfica de los extremos de las x -secciones de las diferencias entre la función simulada y la solución al problema de Dirichlet

Agradecimientos

J.V. agradece el apoyo del CONACyT, de la UAA y de la UJAT pues la presente nota es el resultado, en parte, de una beca de estancia de año sabático. Así mismo, agradece la hospitalidad del personal docente y administrativo de la maestría en matemáticas aplicadas de la UJAT.

Referencias

- [1] J. L. Doob, What are Martingales? *Wiadom. Mat.*, (2) **16** (1973) 37–50.
- [2] G.B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations* (Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1995).
- [3] I. Karatzas and S.E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus* (Springer-Verlag, New York, 1991).
- [4] J. Villa, *Introducción a la Medida e Integración* (Universidad Autónoma de Aguascalientes, Aguascalientes, 2004).
- [5] D. Williams, *Probability with Martingales* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).