Espacios de Fréchet Urysohn *

Gerardo Delgadillo Piñón **
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, DACB
Miguel López De Luna ***
Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Estudiamos los espacios secuenciales y de Fréchet Urysohn que son ampliamente conocidos casi desde el principio de la topología general, así como también algunas de sus aplicaciones. Proporcionamos condiciones para que un subespacio numerablemente compacto de un Fréchet Urysohn y no Hausdorff, sea cerrado. Demostramos que todo compacto en un espacio Fréchet Urysohn y S_2 es cerrado. Establecemos condiciones suficientes y necesarias para que un compacto (numerablemente compacto) en un espacio normal (Fréchet Urysohn), sea cerrado.

We study the sequential and Fréchet Urysohn spaces which are known since the beginning of the general topology and some of their applications too. We establish conditions for a countably compact set a Fréchet Urysohn and not Hausdorff space be closed. We proved that every compact in a S_2 and Fréchet Urysohn space is closed. We have also considered the necessary and sufficient conditions for a compact set (countably compact) in normal (Fréchet Urysohn) space become close.

Palabras clave: Sucesión convergente, Espacio Secuencial, Espacio de Fréchet Urysohn, Conjunto F_σ, Espacio S_1. Keywords: Convergent Sequence, Sequential Space, Fréchet Urysohn Space, F_σSet, S_1 Space.

1. Introducción

Una parte importante de muchas áreas de las matemáticas es la aplicación e investigación de la convergencia. En el Análisis real, el lenguaje de convergencia sirve, en particular, para expresar la continuidad de una función o el hecho de que un punto esté cerca de un conjunto. Es sabido que estas nociones son equivalentes, definidas a través de sus conjuntos abiertos y cerraduras o por medio de la convergencia.

Normalmente, una topología no se determina por sus sucesiones convergentes pero sí por sus sucesiones generalizadas, también llamadas redes ([3], [8]). La convergencia en los espacios topológicos ha sido un tema de interés para los matemáticos por largo tiempo. Su estudio ha generado el surgimiento de nuevas clases de espacios, para los cuales existen, en la actualidad problemas abiertos aún no resueltos. Fréchet fué de los primeros en proponer el siguiente problema:

Caracterizar la clase de los espacios que puede ser determinada completamente por sus sucesiones convergentes.

*Recibido el 29 de enero de 2009 y aceptado el 18 de junio de 2009
Dirección postal: Carr. Cunduacán-Jalpa Km 1, Cunduacán Tabasco, México. A.P. 24 C.P. 86690. Tel.(+52)914 336-0928. **Correo electrónico**: gerardo.delgadillo@dacb.ujat.mx
***Dirección postal**: Prolongación San Isidro 151, Col. San Lorenzo Tezonco, México, D.F. C.P. 09790. Tel.(+52)55 58501901. **Correo electrónico**: miguel.lopezlm@uacm.edu.mx

El objetivo de este artículo es precisamente abordar la noción de las clases de espacios topológicos definidos en términos del concepto de convergencia, como son los espacios secuenciales y de Fréchet Urysohn, que en la actualidad son objeto de investigación. En la última sección se proporcionan algunas aplicaciones de los espacios de Fréchet Urysohn [6, 7].

2. Espacios Secuenciales

Definición 2.1. Un espacio topológico X se llama *secuencial* si dado $A \subset X$ tenemos que A es cerrado si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ implica $x \in A$.

Proposición 2.2. Sea X un espacio topológico. Si para cualquier $A \subset X$ que no sea cerrado, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \in \overline{A} \setminus A$, entonces X es secuencial.

Demostración. Sea $A \subset X$ y supongamos que $A = \overline{A}$. Tomemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$. Luego $x \in A$ pues de lo contrario $x \in X \setminus \overline{A}$ y x no sería punto límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De esta forma queda probada la necesidad en la definición 2.1. Ahora demostremos el recíproco. Supongamos que toda sucesión en A que sea convergente, converge en A. Requerimos verificar que $A = \overline{A}$. Procedamos por contradicción. Luego, la hipótesis nos garantiza la existencia de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \in \overline{A} \setminus A$, lo cual contradice nuestra suposición. De aquí que $A = \overline{A}$ y por lo tanto X es secuencial. $\square$

En base a la proposición anterior, obtenemos que los espacios discretos son secuenciales. En efecto, sea X un espacio discreto. Dado que la afirmación $A \neq \overline{A}$ es falsa para todo $A \subset X$ se satisface la hipótesis en la proposición 2.2, y por lo tanto X es secuencial. Otra clase importante de espacios secuenciales, son los primero numerable.

Proposición 2.3. Todo espacio primero numerable es secuencial.

Demostración. Sea $A \subset X$ con $A \neq \overline{A}$. Tomemos $x \in \overline{A} \setminus A$ y una base numerable $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en x. Para cada $i \in \mathbb{N}$, elijamos un $x_i \in A \cap U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_i$. De esta forma, obtenemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ que por construcción converge a x. Es decir, el espacio X es secuencial.

Corolario 2.4. Todo espacio métrico es secuencial.

Demostración. Sean (X, d) un espacio métrico y $x \in X$. Como la familia $\{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable en x, de la proposición anterior deducimos que (X, d) es secuencial.

Una pregunta natural es cuestionarse si la clase de los espacios secuenciales es diferente a la de los primero numerables. Enseguida proporcionamos un espacio secuencial que no es primero numerable.

Ejemplo 2.5. El espacio cociente $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ es secuencial y no posee base local numerable en el punto $\mathbb{N}$.

Solución. Recordemos que $G \subset \mathbb{R}/\mathbb{N}$ es un conjunto abierto si y sólo si $\pi^{-1}(G)$ es abierto en $\mathbb{R}$, donde $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{N}$ está dada por $\pi(x) = D$ si y sólo si $x \in D$, y que en este caso es una función cociente y cerrada al mismo tiempo (Ver definiciones 2.9 y 2.10). Supongamos que $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j\in\omega}$ es una base numerable en $\mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots$ Fijémos $k_0 \in \mathbb{N}$. Para cada $\xi \in A = (0, \frac{1}{2}) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ consideremos $I_\xi = (k_0 - \xi, k_0 + \xi)$. Luego, el conjunto

$$H_\xi = \pi((-\infty, \xi) \cup I_\xi \cup (\xi, \infty))$$

es un abierto en $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ que contiene al punto $\mathbb{N}$. Por consiguiente, dado $\xi \in A$ existe $n(\xi)$ tal que $\pi^{-1}(B_n) \subset \pi^{-1}(H_\xi)$ para todo $n \geq n(\xi)$. En particular, como $k_0 \in \pi^{-1}(B_n)$ podemos elegir un intervalo abierto $J_n \subset \pi^{-1}(B_n)$ tal que $k_0 \in J_n \subset I_\xi$ para todo $n \geq n(\xi)$. Puesto que el conjunto A es no numerable, existe $\xi_0 \in A$ con $J_n \nsubseteq I_{\xi_0}$ y todo $n \in \mathbb{N}$, es decir $B_n \nsubseteq H_{\xi_0}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, la familia $\mathcal{B}$ no puede ser base local en $\mathbb{N}$

Para verificar que $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ es secuencial, sólo basta recordar que π es una función cociente y emplear el teorema 2.13 que aparece más adelante. □

Sea X un espacio topológico. Recordemos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ está *finalmente* en $A \subset X$, si existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para todo $n \geq N$.

Definición 2.6. Sean X un espacio topológico y $U \subset X$. Se dice que U es *secuencialmente abierto* si cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \in U$, está finalmente en U.

Definición 2.7. Sea X un espacio topológico. Decimos que un subconjunto A de X es *secuencialmente cerrado* si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$, entonces $x \in A$.

Es claro que todo abierto (cerrado) es secuencialmente abierto (secuencialmemte cerrado). Los correspondientes recíprocos nos proporcionan caracterizaciones de los espacios secuenciales.

Teorema 2.8. Un espacio topológico X es secuencial, si y sólo si todo subconjunto secuencialmente abierto es abierto.

Demostración. Sea $U \subset X$ secuencialmente abierto. Probemos que $X \setminus U$ es cerrado. Supongamos lo contrario, es decir, el conjunto $X \setminus U$ no es cerrado. Por hipótesis, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (X \setminus U)$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \in \overline{(X \setminus U)} \setminus (X \setminus U)$. De esta manera obtenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \nsubseteq U$, en particular $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está finalmente en U, y además $x \in U$. Esto contradice que U es secuencialmente abierto y por consiguiente $X \setminus U$ es cerrado. Ahora probemos el recíproco del teorema. Para ello, utilicemos la proposición 2.2. Sea $A \subset X$ con $A \neq \overline{A}$. De esta manera, $X \setminus A$ no es abierto y, por hipótesis tampoco es secuencialmente abierto. De aquí se desprende que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \in X \setminus A$ y que no está finalmente en $X \setminus A$, es decir, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está finalmente en A. Así que, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n)_{n\geq N} \subset A$. De lo anterior, concluimos que $x \in \overline{A} \setminus A$ y por lo tanto el espacio X es secuencial. □

Teorema 2.9. Un espacio topológico X es secuencial si y sólo si, todo subconjunto secuencialmente cerrado es cerrado.

Demostración. Sea $F \subset X$ secuencialmente cerrado. Si $F \neq \overline{F}$ entonces, la hipótesis garantiza la existencia de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ para la cual $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \in \overline{F} \setminus F$, lo que contradice que F sea secuencialmente cerrado. De aquí obtenemos que F es cerrado. Para probar el recíproco, recurrimos a la proposición 2.2. Tomemos un $A \subset X$ con $A \neq \overline{A}$. Dado que A no es cerrado, se sigue que tampoco es secuencialmente cerrado. En consecuencia, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ y $x \in \overline{A} \setminus A$, es decir, el espacio X es secuencial. □

Más adelante, en el ejemplo 2.15, garantizamos la existencia de un espacio (Z, τ) no secuencial. Como una consecuencia inmediata de este resultado, podemos deducir que la secuencialidad no se preserva bajo funciones continuas. En efecto, cualquier función $f : (Z, \tau_{Dis}) \to (Z, \tau)$ es continua y por la observación hecha a la proposición 2.2, el espacio (Z, τ_{Dis}) es secuencial.

Definición 2.10. Una función $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ continua y sobreyectiva se llama *abierta* si la imagen de todo conjunto abierto es abierta, y recibe el nombre de *cerrada* si la imagen de todo conjunto cerrado es cerrada.

Definición 2.11. Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ continua y sobreyectiva se llama *cociente*, si $f^{-1}(U) \in \tau(X)$ implica que $U \in \tau(Y)$ para todo $U \subset Y$.

Proposición 2.12. Toda función abierta o cerrada es cociente.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Consideremos el conjunto $f^{-1}(U) \in \tau(X)$.

Supongamos que f es abierta. Luego, se cumple que $f(f^{-1}(U)) = U \in \tau(Y)$. Ahora bien, si f es cerrada, entonces $f(X \setminus f^{-1}(U)) = f(X) \setminus f(f^{-1}(U)) = Y \setminus U$ es un subconjunto cerrado, es decir, $U \in \tau(Y)$. De esta manera hemos probado que si f es una función cerrada o abierta, entonces f es una función cociente. □

Como mencionamos líneas arriba, la imagen continua de un secuencial no es necesariamente secuencial. Pero la secuencialidad sí se preserva bajo funciones cocientes, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 2.13. La imagen cociente de un espacio secuencial es secuencial.

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos tales que X es secuencial y $f : X \to Y$ es una función cociente. Probemos que Y es secuencial. Tomemos un $U \subset Y$ secuencialmente abierto. En virtud del teorema 2.8, basta mostrar que $U \in \tau(Y)$. Afirmamos que $f^{-1}(U)$ es secuencialmente abierto. En efecto, sea $s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ con $s \to x_0 \in f^{-1}(U)$. Por ser f una función continua, obtenemos que $f(s) \to f(x_0) \in U$. Como U es secuencialmente abierto, la sucesión $f(s)$ está finalmente en U. Luego, la sucesión s está finalmente en $f^{-1}(U)$ y por consiguiente, la afirmación es verdadera. Dado que X es secuencial, obtenemos que $f^{-1}(U) \in \tau(X)$ y por ser f una función cociente, el conjunto U es abierto. □

Corolario 2.14. La imagen bajo una función abierta o cerrada de un espacio secuencial, es secuencial.

Demostración. La conclusión se desprende de la proposición 2.12 y del teorema 2.13. □

El siguiente resultado consiste en mostrar que la secuencialidad no se hereda.

Proposición 2.15. La secuencialidad no es una propiedad herediaria

Demostración Sea la familia

$$\delta = \left\{ \{0\} \cup U : \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{está finalmente en } U \text{ con } U \in \tau(\mathbb{R}) \right\}.$$

Probemos que $\beta = \delta \cup \tau(\mathbb{R})$ es base para una única topología μ en $\mathbb{R}$. Es claro que $\cup\beta = \mathbb{R}$. Sean $V, W \in \beta$ y $x \in V \cap W$. Debemos mostrar un $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset V \cap W$.

Caso 1: $V, W \in \tau(\mathbb{R})$. Haciendo $B = V \cap W \in \beta$ se satisface lo pedido.

Caso 2: $V \in \tau(\mathbb{R})$ y $W = \{0\} \cup U \in \delta$. Si $x \neq 0$, entonces $x \in V \cap U$ y se aplica el caso anterior. Para $x = 0$, existe un $G \in \tau(\mathbb{R})$ tal que $x \in G \subset V$, pues $x \in V$ y $V \in \tau(\mathbb{R})$. Luego,

$$x \in G \cap (\{0\} \cup U) \subset V \cap (\{0\} \cup U) = V \cap W.$$

Así, el conjunto $B = G \cap (\{0\} \cup U) \in \beta$ posee la propiedad requerida.

Por consiguiente, de ambas posibilidades concluimos que β es base para una única topología μ en $\mathbb{R}$. Verifiquemos que $X = (\mathbb{R}, \mu)$ es un espacio secuencial. Para ello, consideremos el subespacio de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$Y = \{(x, 0) : x \neq 0, x \in \mathbb{R}\} \cup (s \cup q_0)$$

donde $s \subset \mathbb{R}^2$ es la sucesión dada por $s = \left(\frac{1}{n}, 1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y $q_0 = \{(0, 1)\}$. Puesto que Y es primero numerable, en virtud de la proposición 2.3, se desprende que el espacio Y es secuencial. Ahora fijémonos en la función $p : Y \to X$, dada por

$$p(y) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } y = (\frac{1}{n}, 1) \\ \\ 0 & \text{si } y = (0,1) \\ \\ x & \text{si } y = (x,0) \end{cases}$$

y verifiquemos que es cociente para que así, gracias al teorema 2.13, deduzcamos que X es secuencial.

Es claro que p es una función sobreyectiva. Probemos que p es continua. Sea $U \in \beta$. Tomemos

$$\begin{aligned} &Y_1 = s \cup q_0 = Y \cap \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\} \text{ y} \\ &Y_2 = \{(x,0) : x \neq 0, x \in \mathbb{R}\} = Y \cap \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \in \mathbb{R} \text{ y } \mid v \mid < \frac{1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Observemos que Y_1 y Y_2 son abiertos y ajenos en Y, tales que $Y = Y_1 \cup Y_2$. Para probar que $p^{-1}(U)$ es abierto en Y, basta justificar que $p^{-1}(U) \cap Y_i$ es abierto en Y_i con $i = 1, 2$, pues $Y = Y_1 \oplus Y_2$. Si $0 \notin U$, entonces $U \in \tau(\mathbb{R})$. Puesto que todo subconjunto de Y_1, que no contiene al punto $(0,1)$ es un subespacio abierto de Y_1 obtenemos que $p^{-1}(U) \cap Y_1$ es abierto en Y_1. Ahora demostremos que la otra intersección es abierta en Y_2. Dado que $p^{-1}(U) \cap Y_2 = U \times \{0\}$ y como éste es un conjunto homeomorfo a $U \in \tau(\mathbb{R})$, obtenemos que $p^{-1}(U) \cap Y_2$ es abierto en $\mathbb{R}$. Por otra parte, como $0 \notin U$ el conjunto U es abierto en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ que a su vez es homeomorfo a Y_2. En consecuencia, el conjunto $p^{-1}(U) \cap Y_2$ es abierto en Y_2. Por lo dicho anteriormente, obtenemos que $p^{-1}(U) \in \tau(Y)$. Ahora si $0 \in U$, entonces

$$p^{-1}(U) \cap Y_1 = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 1\right)_{n \geq n_0} \text{ para algún } n_0 \in \mathbb{N} \right\} \cup q_0,$$

que es un abierto en Y_1. Notemos que $p^{-1}(U) \cap Y_2 = (U \setminus \{0\}) \times \{0\}$ y $U \setminus \{0\} \in \tau(\mathbb{R})$. Procediendo de forma idéntica cuando $0 \notin U$, concluimos que $p^{-1}(U) \cap Y_2$ es abierto en Y_2. Finalmente hemos justificado la continuidad de p. Para concluir nuestra demostración de que p es una función cociente, falta justificar que si $p^{-1}(U) \in \tau(Y)$ entonces $U \in \tau(X)$. Como $p^{-1}(U) \in \tau(Y)$, se sigue que $p^{-1}(U) \cap Y_2 \in \tau(Y_2)$. Por ser Y_2 homeomorfo a $\mathbb{R} \setminus \{0\} \in \tau(\mathbb{R})$, podemos considerar que $p^{-1}(U) \cap Y_2 \in \tau(\mathbb{R})$.

Caso 1: $0 \notin U$. En este caso, tenemos que $p^{-1}(U) \cap Y_2 = U$ y por tanto $U \in \tau(X)$.

Caso 2: $0 \in U$. Dado que $(0,1) \in p^{-1}(U) \cap Y_1$ y como $(\frac{1}{n}, 1)_{n \in \mathbb{N}} \to (0,1)$ y $p^{-1}(U) \cap Y_1 \in \tau(Y_1)$ podemos afirmar que $(\frac{1}{n}, 1)_{n \geq n_0} \subset p^{-1}(U) \cap Y_1$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. En virtud de la definición de p obtenemos $(\frac{1}{n}, 0)_{n \geq n_0} \subset p^{-1}(U) \cap Y_2$. Como $p^{-1}(U) \cap Y_2$ es homeomorfo a $U \setminus \{0\} \in \tau(\mathbb{R})$, se sigue que $(\frac{1}{n})_{n \geq n_0} \subset U \setminus \{0\}$. En consecuencia $U = (U \setminus \{0\}) \cup \{0\} \in \tau(X)$. De esta forma hemos probado que p es una función cociente. Para concluir con nuestro ejemplo, exhibiremos un subespacio de X que no es secuencial. Pero antes, necesitamos un concepto previo y una afirmación relativa al mismo.

Definición 2.16. Dadas las sucesiones convergentes $s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $t = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, decimos que s *finalmente* t si el conjunto $s \cap t$ es infinito.

Afirmación 2.17. Si $s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es no constante tal que $s \to 0$, entonces s es finalmente la sucesión $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración (De la afirmación). Primero verifiquemos que $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \to 0$. Sea $G \in \tau(X)$ tal que $0 \in G$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $G \in \beta = \delta \cup \tau(\mathbb{R})$. Si $G \in \tau(\mathbb{R})$ entonces $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ está finalmente en G. Ahora asumamos que $G \in \delta$. Luego, tenemos que $G = \{0\} \cup U$ para algún $U \in \tau(\mathbb{R})$. Por la definición de δ, la sucesión $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ está finalmente en U y en consecuencia también en G. Ahora procedemos a demostrar nuestra afirmación. Para ello, supongamos lo contrario. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_n \neq \frac{1}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Para cada n escojamos un $U_n \in \tau(\mathbb{R})$ tal que $x_n \in U_n$, $\frac{1}{n} \notin U_n$ y además, también que se cumpla $U_n \cap U_m = \emptyset$ con $x_n \neq x_m$ para $n \neq m$. Tomemos $U = \{0\} \cup (\underset{m\in\mathbb{N}}{\cup} U_m)$. Luego $0 \in U \in \tau(X)$ y $U \cap (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} = \emptyset$, lo cual contradice que $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.

$\varDelta$

Para continuar con la demostración de nuestro ejemplo, consideremos el subespacio $Z = X \setminus (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. De acuerdo a nuestra afirmación, sabemos que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Z$ converge a cero, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es constante e igual a cero. De aquí que $\{0\}$ es un conjunto secuencialmente abierto en Z, pero también $\{0\} \notin \tau(Z)$, pues de lo contrario existiría un $U \in \tau(\mathbb{R})$ con $U \setminus (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \{0\}$, o bien $U = \{0\}$, lo cual es falso. En virtud del teorema 2.8, el subespacio Z de X no es secuencial y en consecuencia, la secuencialidad no es una propiedad hereditaria.

$\square$

Sin embargo, la secuencialidad sí se hereda a abiertos y cerrados.

Proposición 2.18. Todo subespacio abierto o cerrado de un espacio secuencial, es secuencial.

Demostración. Sea X un espacio secuencial y $U \subset X$ abierto. Tomemos un subconjunto secuencialmente abierto V en U. Afirmamos que V es secuencialmente abierto en X. En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \in V \subset U$. Como todo conjunto abierto es secuencialmente abierto, tenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está finalmente en U. Por ser V secuencialmente abierto en U, deducimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está finalmente en V. Por lo tanto, V es abierto en X y en consecuencia también lo es en U. De esta manera concluimos que U es secuencial. Sea $F \subset X$ cerrado. Para probar que F es secuencial, utilizaremos el teorema 2.9. Sea $K \subset F$ secuencialmente cerrado y probemos que $X \setminus K$ es abierto. Por la primera parte de esta proposición, basta verificar que $X \setminus K$ es secuencialmente abierto. Consideremos una sucesión $s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $s \to x \in X \setminus K$. Si $x \notin F$, como $X \setminus F$ es secuencialmente abierto, entonces s está finalmente en $X \setminus F \subset X \setminus K$. Ahora fijémonos en el caso cuando $x \in F$. Supongamos que existe una subsucesión s' de s tal que $s' \subset K$ y $s' \to x$. Debido a que K es secuencialmente cerrado, la sucesión s' converge en K, pero $x \notin K$. Por lo tanto, la sucesión s está finalmente en $X \setminus K$. $\square$

3. Espacios de Fréchet Urysohn

Definición 3.1. Un espacio topológico X se llama espacio *de Fréchet Urysohn*, si para cualquier $A \subset X$ y $x \in X$ se cumple que $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$.

Por ejemplo, los espacios métricos son de Fréchet Urysohn y también lo son los discretos. Así como para el caso de los secuenciales, los primero numerables también son espacios de Fréchet Urysohn, como enseguida lo mostramos

Teorema 3.2. Todo espacio primero numerable es de Fréchet Urysohn.

Demostración. Sea X un espacio primero numerable y sea $A \subset X$. Tomemos un $x \in \overline{A}$. Por hipótesis, existe una base numerable $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ en x. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $U_{n+1} \subset U_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Como $U_n \cap A \neq \emptyset$ con $n \in \mathbb{N}$, escogemos $x_n \in U_n \cap A$ para cada n. Luego $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ y por construcción, esta sucesión converge a x. $\square$

El siguiente resultado nos muestra que la clase de los espacios Fréchet Urysohn forma parte de la de los secuenciales

Proposición 3.3. Todo espacio de Fréchet Urysohn es secuencial.

Demostración. Sea X un espacio de Fréchet Urysohn y sea $A \subset X$. Supongamos que $A \neq \overline{A}$. Tomemos $x \in \overline{A}$. Por hipótesis, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \in \overline{A} \setminus A$. Por lo tanto, de acuerdo a la proposición 2.2, el espacio X es secuencial. $\square$

Ejemplo 3.4. El espacio secuencial X proporcionado en la proposición 2.15, no es de Fréchet Urysohn.

Demostración. Sea $A = X \setminus ((\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\})$. Probemos que $0 \in \overline{A}$. Sea U un abierto en X tal que $0 \in U$. Supongamos que U es de la forma $\{0\} \cup V \in \delta$. De aquí que $\frac{1}{n_0} \in V$ para algún $n_0 \in N$. Como $V \in \tau(\mathbb{R})$, existe $\epsilon > 0$ tal que $W = (\frac{1}{n_0} - \epsilon, \frac{1}{n_0} + \epsilon) \subset V$ y $\frac{1}{n_0} - \epsilon > 0$. Luego, existe un $x \in W$ con $x \neq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De aquí que, $x \in (X \setminus ((\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\})) \cap W = A \cap W$. Como $A \cap W \subset A \cap V \subset A \cap U$, obtenemos que $0 \in \overline{A}$. Ahora bien, para el caso $U \in \tau(\mathbb{R})$, basta hacer $U = V$ del caso anterior y proceder de forma idéntica para obtener que $0 \in \overline{A}$. Ahora demostremos que ninguna sucesión en A que sea convergente, converge a cero. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$. Como $0 \notin A$, esta sucesión no puede ser la sucesión constante cero. Debido a la afirmación 2.17, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es finalmente la sucesión $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Como $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \not\subseteq A$, llegamos a una contradicción. Por consiguiente, el espacio X no es de Fréchet Urysohn. $\square$

A diferencia de los secuenciales, los espacios de Fréchet Urysohn sí son hereditarios. En lo que sigue, el símbolo $\overline{A}^X$ significará la cerradura de $A \subset X$ en (X, τ).

Proposición 3.5. Todo subespacio de un espacio de Fréchet Urysohn, también es un espacio de Fréchet Urysohn.

Demostración. Sea (X, τ) un espacio de Fréchet Urysohn y $Y \subset X$ un subespacio. Tomemos $Z \subset Y$ y $x \in \overline{Z}^Y$. Como $\overline{Z}^Y = \overline{Z}^X \cap Y$, tenemos que $x \in \overline{Z}^X$. Por hipótesis existe una sucesión $s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Z$ tal que $s \to x$. Por lo tanto, el subespacio Y es de Fréchet Urysohn. $\square$

Observemos que la propiedad de ser de Fréchet Urysohn no se preserva bajo funciones continuas. Para ello, basta con tomar el espacio (X, μ) del ejemplo 3.4 e $I : (X, \tau_{Dis}) \to (X, \mu)$, la función identidad que es una función continua. Sin embargo, esta propiedad s se conserva para otras funciones, como lo mostraremos enseguida.

Definición 3.6. Sean $f : X \to Y$ y $A \subset X$. El conjunto

$$f^\sharp(A) = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subset A\}$$

recibe el nombre de f *sostenido de* A.

El siguiente resultado nos proporciona una relación entre los conjuntos $f(A)$ y $f^\sharp(A)$.

Lema 3.7. Sean $f : X \to Y$ y $A \subset X$. Entonces $f(A) = Y \setminus f^\sharp(X \setminus A)$.

Demostración. Como

$$Y \setminus f^\sharp(X \setminus A) = \{y \in Y : f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset\},$$

se sigue que $y \in Y \setminus f^\sharp(X \setminus A)$, si y sólo si $f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset$, si y sólo si $y = f(a)$ para algún $a \in A$, si y sólo si $y \in f(A)$.

Lema 3.8. Sea $f : X \to Y$ sobreyectiva. Entonces la función f es cerrada si y sólo si $f^\sharp(U)$ es un conjunto abierto para todo $U \subset X$ abierto.

Demostración. Probemos la necesidad. Sea $U \subset X$ abierto. Por el lema anterior obtenemos que $f^\sharp(U) = Y \setminus f(X \setminus U)$. Luego, dado que f es una función cerrada, el conjunto $f(X \setminus U)$ es cerrado y por lo tanto $f^\sharp(U)$ es abierto. Ahora, para demostrar la suficiencia, consideremos un conjunto cerrado $A \subset X$. Del lema anterior se sigue que $f(A) = Y \setminus f^\sharp(Y \setminus A)$. Por hipótesis, el conjunto $f^\sharp(Y \setminus A)$ es abierto y en consecuencia $f(A)$ es cerrado.

Corolario 3.9. Sea $f : X \to Y$ cerrada. Entonces $f^\sharp(U) = int\, f(U)$ para todo $U \subset X$ abierto.

Demostración. Tomemos un conjunto abierto $U \subset X$. De la hipótesis y de los dos lemas anteriores, se desprende que

$$f^\sharp(U) = Y \setminus f(X \setminus U) = Y \setminus \overline{f(X \setminus U)} = Y \setminus \overline{f(X) \setminus f(U)} = Y \setminus \overline{Y \setminus f(U)} = int\, f(U).$$

$\square$

Definición 3.10. Una función $f : X \to Y$ sobreyectiva y continua, recibe el nombre de *pseudoabierta* si y sólo si para toda $y \in Y$ y para toda vecindad abierta U de $f^{-1}(y)$, se cumple que $y \in int\, f(U)$.

Proposición 3.11. Sea $f : X \to Y$ sobreyectiva. Si f es cerrada o abierta entonces f es una función pseudoabierta.

Demostración. Sean $y \in Y$ y $U \subset X$ abierto para el cual $f^{-1}(y) \subset U$. Para el caso en que f es cerrada, la conclusión se sigue del corolario y de la definición del conjunto $f^{\sharp}(U)$. Ahora, si f es una función abierta entonces $y \in f(U) = int\, f(U)$. □

En el siguiente resultado probamos que la propiedad de ser Fréchet Urysohn se preserva bajo funciones pseudoabiertas.

Teorema 3.12. Si X es un espacio de Fréchet Urysohn y $f : X \to Y$ una función pseudoabierta, entonces el espacio Y es de Fréchet Urysohn.

Demostración. Sean $y \in Y$ y $B \subset Y$ para los cuales $y \in \overline{B}$. Afirmamos que $f^{-1}(y) \cap \overline{f^{-1}(B)} \neq \emptyset$. En efecto, si sucede lo contrario entonces para cada $x \in f^{-1}(y)$ existe un abierto U_x que contiene a x tal que $U_x \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Consideremos el conjunto abierto

$$U = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} U_x.$$

Observemos que $U \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Como $f^{-1}(y) \subset U$ y por ser f pseudoabierta, se tiene que $y \in int\, f(U)$. Luego, existe un abierto $G \subset Y$ para el cual $y \in G \subset f(U)$ y, como $G \cap B \neq \emptyset$ obtenemos que $f(U) \cap B \neq \emptyset$. Tomemos un $b \in f(U) \cap B$. Así que, $b = f(z)$ para algún $z \in U$, lo que nos lleva a una contradicción, pues $z \in U \cap f^{-1}(B)$. Por consiguiente, nuestra afirmación ha sido demostrada. Ahora, elijamos un $x \in f^{-1}(y) \cap \overline{f^{-1}(B)}$. Dado que X es un espacio de Fréchet Urysohn, existe una sucesión $s = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset f^{-1}(B)$ para la cual $s \to x$. De la continuidad de f se desprende que $f(s) \to f(x) = y$ y como $f(s) \subset B$, el espacio Y es de Fréchet Urysohn. □

De la proposición 3.11 y del teorema 3.12 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.13. La imagen cerrada o abierta, de un espacio de Fréchet Urysohn es un espacio de Fréchet Urysohn.

□

Una pregunta natural que surge del anterior teorema, es que si X es de Fréchet Urysohn y $f(X)$ también lo es bajo cierta función f, entonces, f es pseudoabierta? La respuesta es negativa, de acuerdo al siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.14. Sean $X = (\mathbb{R}, \tau_{Dis})$ y $Y = (\mathbb{R}, \tau(\mathbb{R}))$, donde τ_{Dis} y $\tau(\mathbb{R})$ son la topología discreta y usual en $\mathbb{R}$ respectivamente. Entonces, la función identidad $I : X \to Y$ no es pseudoabierta y los espacios X y Y son de Fréchet Urysohn.

Demostración. Los espacios X y Y son de Fréchet Urysohn debido a que los discretos y los métricos lo son. Ahora, tomemos un $y \in Y$. Escojamos $U = \{y\} \in \tau_{Dis}$, que es una vecindad abierta de $I^{-1}(y) = \{y\}$. Pero $y \notin int\, I(U)$, ya que $int\, I(U) = int\,\{y\} = \emptyset$. De esta forma deducimos que la función I no es pseudoabierta. $\square$

El siguiente resultado responde afirmativamente a nuestra pregunta, siempre y cuando la función f sea cociente y se trabaje con espacios de Hausdorff.

Proposición 3.15. Sean X y Y espacios de Hausdorff. Supongamos que X es un espacio de Fréchet Urysohn y $f : X \to Y$ una función cociente. Entonces, el espacio Y es de Fréchet Urysohn si y sólo si, la función f es pseudoabierta.

Demostración. Probemos primero la suficiencia. Supóngase que f es pseudoabierta. Puesto que X es de Fréchet Urysohn, en virtud del teorema anterior, el espacio Y resulta ser de Fréchet Urysohn. Ahora probemos el enunciado recíproco. Sea Y un espacio de Fréchet Urysohn. Tomemos un $y \in Y$ y una vecindad abierta U de $f^{-1}(y)$. Supongamos que $y \notin int\,(f(U))$. Como $int\,(f(U)) = Y \setminus \overline{Y \setminus f(U)}$ obtenemos que $y \in \overline{Y \setminus f(U)}$. Por hipótesis, existe una sucesión $s = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y \setminus f(U)$ tal que s converge a y. La continuidad de f nos garantiza la contención $\overline{f^{-1}(s)} \subset f^{-1}(\overline{s})$. Como Y es un espacio de Hausdorff, tenemos que $\overline{s} = s \cup \{y\}$ y por ende $\overline{f^{-1}(s)} \subset f^{-1}(s) \cup f^{-1}(y)$. Además, se cumple $U \cap f^{-1}(s) = \emptyset$, pues de lo contrario existe un $x \in U \cap f^{-1}(s)$ y de aquí $f(x) = y_m \in f(U)$ donde $m \in \mathbb{N}$. Entonces $y_m = f(u)$ para alguna $u \in U$, lo cual es una contradicción, ya que $y_m \in Y \setminus U$. Dado que $f^{-1}(y) \subset U$ obtenemos $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(s) = \emptyset$. Por lo tanto $\overline{f^{-1}(s)} \subset f^{-1}(s)$, es decir, el conjunto $f^{-1}(s)$ es cerrado. De aquí se desprende que $X \setminus f^{-1}(s) = f^{-1}(Y \setminus s)$ es abierto y, como f es cociente, obtenemos que $Y \setminus s$ es abierto. Lo anterior contradice que s converge a y, y en consecuencia la función f es pseudoabierta. $\square$

4. Aplicaciones de los espacios de Fréchet Urysohn

En esta sección se muestran algunas de las aplicaciones de los espacios de Fréchet Urysohn. Es conocido que todo compacto en un Hausdorff es cerrado. Sin embargo, este resultado no es válido para los espacios topológicos en general, incluso en espacios regulares o normales, por ejemplo, para cualquier espacio indiscreto con dos puntos.

Se proporcionan condiciones para que en un espacio de Fréchet Urysohn y no de Hausdorff, todo subconjunto numerablemente compacto sea cerrado. La propiedad de ser de Fréchet Urysohn también tendrá un papel importante para que la unión arbitraria de cerrados sea cerrada. Asimismo, demostraremos que todo compacto en un espacio S_2 y de Fréchet Urysohn, es cerrado.

4.1 Condiciones para que un numerablemente compacto sea cerrado

En esta parte recordaremos el resultado de que un compacto en un espacio regular es cerrado. Posteriormente, al debilitar la hipótesis a numerablemente compacto y no necesariamente compacto, probaremos que la conclusión sigue siendo válida siempre que el espacio sea de Fréchet Urysohn. También abordaremos este problema para el caso en que el espacio sea normal. Empezaremos recordando algunos conceptos y resultados que utilizaremos.

Definición 4.1. Un espacio topológico X se llama *numerablemente compacto*, si cada cubierta abierta numerable de X tiene una subcubierta finita.

Las siguientes caracterizaciones, estudiadas en un curso básico de topología, nos serán de utilidad.

Teorema 4.2. Sea X un espacio topológico. Entonces

(1) X es regular, si y sólo si para cada $x \in X$ y todo $U \in \tau(X)$ tal que $x \in U$, existe un $V \in \tau(X)$ para el cual $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

(2) X es normal, si y sólo si para todo $F \subset X$ cerrado y cada $U \in \tau(X)$ tal que $F \subset U$, existe un $V \in \tau(X)$ para el cual $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

□

Teorema 4.3. Un espacio topológico X es numerablemente compacto, si y sólo si todo subconjunto infinito numerable de X posee un punto de acumulación.

□

Lema 4.4. Sea X un espacio topológico regular. Si $A \subset X$ es compacto y U es una vecindad de A, entonces existe una vecindad cerrada V de A tal que $V \subset U$.

Demostración. Sea $x \in A$. Luego $x \in U$ y, por ser X regular, existe un $V_x \in \tau(X)$ para el cual $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U$. De esta forma, la familia $\{V_x : x \in A\}$ es una cubierta abierta de A. Dado que A es compacto, existen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en A para los cuales $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_{x_i}} \subset U$. El conjunto $V = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_{x_i}}$ es cerrado, por ser unión finita de conjuntos cerrados, y satisface $A \subset V \subset U$. □

El primer resultado se refiere a cuándo un numerablemente compacto en un Hausdorff es cerrado.

Proposición 4.5. Todo subconjunto numerablemente compacto en un espacio de Hausdorff y de Fréchet Urysohn, es cerrado.

Demostración. Sea X un espacio de Hausdorff y de Fréchet Urysohn. Tomemos $Y \subset X$ numerablemente compacto. Supongamos que $y \in \overline{Y} \setminus Y$. Como X es de Fréchet Urysohn, existe una sucesión $s \subset Y$ tal que $s \to y$. Dado que Y es numerablemente compacto, la sucesión s tiene un punto de acumulación en Y, digamos $z \in Y$. De aquí y, por ser X de Hausdorff, obtenemos que $z = y \notin Y$, lo cual es una contradicción. Por consiguiente, el subespacio Y es cerrado. □

En adelante, denotaremos por $\mathcal{F}$ a la familia de subconjuntos cerrados del espacio X en consideración.

Teorema 4.6. Sea X un espacio regular. Entonces para todo $K \subset X$ compacto, las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) K es cerrado;

(2) K y $X \setminus K$ son uniones de conjuntos cerrados;

(3) K o $X \setminus K$ es unión de conjuntos cerrados.

Demostración. Probemos (1) $\Rightarrow$ (2). Sea K cerrado. Debemos demostrar que $X \setminus K$ es unión de conjuntos cerrados. Debido a que X es regular, se cumple que para cada $x \in X \setminus K$ existe un $V_x \in \tau(X)$ tal que $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset X \setminus K$. Lo anterior implica $X \setminus K = \underset{x \in X \setminus K}{\cup} \overline{V_x}$ y hemos concluido con lo deseado. La verificación de (2) $\Rightarrow$ (3) es inmediata. Para demostrar (3) $\Rightarrow$ (1), primero supongamos que $K = \cup \mathcal{C}$ donde $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Sea $x \in X \setminus K$. Luego, se sigue que $x \notin C$ para todo $C \in \mathcal{C}$. Por la regularidad de X, se desprende que para cada $C \in \mathcal{C}$ existen abiertos U_C y V_C, para los cuales $x \in U_C$, $C \subset V_C$ y $U_C \cap V_C \neq \emptyset$. De aquí que, la familia $\{V_C\}_{C \in \mathcal{C}}$ es una cubierta abierta del compacto K. En consecuencia, existen $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ tales que $K \subset \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} V_{C_i}$. Consideremos el conjunto abierto $U_x = \overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} U_{C_i}$ que contiene a x. Afirmamos que $U_x \cap K = \emptyset$. En efecto, supóngase que existe $y \in U_x \cap K$. Entonces $y \in \overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} U_{C_i}$ y $y \in \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} V_{C_i}$. Luego, para todo C_i existe j tal que $y \in U_{C_i}$ y $y \in V_{C_j}$. Si hacemos $i = j$ se tiene que $y \in U_{C_j} \cap V_{C_j}$ y, por consiguiente $U_{C_j} \cap V_{C_j} \neq \emptyset$, que es una contradicción. Por lo tanto, la afirmación es verdadera. Luego, tenemos que $X \setminus K = \cup U_x$ es un conjunto abierto, es decir, K es cerrado. Para completar la prueba, suponemos que $X \setminus K$ es unión de conjuntos cerrados, es decir $X \setminus K = \cup \mathcal{C}$ donde $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Entonces $K = \underset{C \in \mathcal{C}}{\cap} (X \setminus C)$. Por el lema 4.4, para cada $C \in \mathcal{C}$, existe una vecindad cerrada V_C de K tal que $V_C \subset (X \setminus C)$. Como $K \subset V_C$ para toda $C \in \mathcal{C}$ se desprende que $K \subset \underset{C \in \mathcal{C}}{\cap} V_C$ y $V_C \subset X \setminus C$ implica que $\underset{C \in \mathcal{C}}{\cap} V_C \subset \underset{C \in \mathcal{C}}{\cap} (X \setminus C) = K$. De aquí tenemos que $K = \underset{C \in \mathcal{C}}{\cap} V_C$ donde cada V_C es cerrado en X. Por consiguiente, el conjunto K es cerrado, y (1) ha quedado demostrado. $\square$

Corolario 4.7. Sea X regular. Entonces, todo compacto que sea unión de cerrados o intersección de abiertos es un subconjunto cerrado de X.

Demostración. Este resultado es consecuencia de la implicación (3) $\Rightarrow$ (1) en el teorema 4.6. $\square$

La conclusión del teorema 4.6 sigue siendo válida cuando debilitamos la hipótesis de compacto a numerablemente compacto, para el caso de espacios regulares y de Fréchet Urysohn.

Teorema 4.8. Sea X un espacio de Fréchet Urysohn y regular. Entonces, para todo $K \subset X$ numerablemente compacto, las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) K es cerrado.

(2) K y $X \setminus K$ son uniones de conjuntos cerrados.

(3) K o $X \setminus K$ es unión de conjuntos cerrados.

Demostración. La prueba de (1) $\Rightarrow$ (2) es idéntica a la realizada en el teorema 4.6 y la de (2) $\Rightarrow$ (3) es obvia. Probemos (3) $\Rightarrow$ (1). Sea $K \subset X$ numerablemente compacto. Primero supongamos que $K = \cup\mathcal{C}$ donde $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Tomemos un $x \in \overline{K} \setminus K$. Como X es de Fréchet Urysohn existe una sucesión $s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en K tal que $s \to x$. Puesto que K es numerablemente compacto, la sucesión s tiene un punto de acumulación, digamos y, en K. Luego, existe un $C \in \mathcal{C}$ tal que $y \in C$ y $x \notin C$. Debido a la regularidad de X, podemos encontrar abiertos ajenos U y V que contienen a x y C respectivamente. Pero esto es una contradicción con la elección de y, debido a que todo abierto que lo contenga, debe contener una infinidad de elementos de la sucesión s, lo cual no es posible, pues $s \to x \in U$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto K es cerrado. En el segundo caso, supongamos que $X \setminus K$ es unión de conjuntos cerrados, es decir, $X \setminus K = \cup\mathcal{C}$ donde $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Supongamos también que $\overline{K} \setminus K \neq \emptyset$ y tomemos $x \in \overline{K} \setminus K$. Dado que X es un espacio de Fréchet Urysohn, existe una sucesión $s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ tal que s converge a x. Puesto que K es numerablemente compacto, la sucesión s tiene un punto de acumulación $y \in K$. Por consiguiente, para todo $C \in \mathcal{C}$, se cumple que $y \in X \setminus C$. Como además $x \in X \setminus K$, existe algún $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$ y $y \notin C$. Debido a que X es regular, existen conjuntos abiertos U, V de tal manera que $y \in U$, $C \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Contradiciendo de esta forma que $s \to x$, pues el complemento de toda vecindad que contenga al punto y, en este caso U, sólo debe contener un número finito de elementos de s, en particular V que contiene al límite x. $\square$

De forma análoga al corolario 4.7, tenemos la siguiente consecuencia de este último teorema.

Corolario 4.9. La unión de conjuntos cerrados o la intersección de conjuntos abiertos, que sea numerablemente compacto en un espacio de Fréchet Urysohn y regular, es cerrado.

$\square$

Decimos que $A \subset X$ es un conjunto F_σ en X si $A = \cup\mathcal{C}$ donde $\mathcal{C}$ es una familia numerable de cerrados en X.

Teorema 4.10. Sean X un espacio regular y $K \subset X$ numerablemente compacto. Entonces K es cerrado si y sólo si K es un conjunto F_σ.

Demostración. Dado que todo cerrado es un conjunto F_σ, sólo resta demostrar la suficiencia. Sea K un conjunto numerablemente compacto en un espacio regular X. Supongamos que K es un conjunto F_σ, es decir, se cumple la igualdad $K = \cup\mathcal{C}$ para una familia numerable $\mathcal{C}$ de cerrados en X. Tomemos $x \in X \setminus K$. Luego, $x \notin C$ para toda $C \in \mathcal{C}$. Debido a que X es regular, para cada $C \in \mathcal{C}$ existen abiertos U_C y V_C, tales que $x \in V_C$ y $C \subset U_C$. De aquí que $K = \cup\mathcal{C} \subset \bigcup_{C\in\mathcal{C}} U_C$. Como K es numerablemente compacto, existe un número finito de elementos de $\mathcal{C}$, digamos $C_1, C_2, \ldots, C_n$, con $K = \bigcup_{i=1}^{n} U_{C_i} = U$. Consideremos el abierto $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{C_i}$ que contiene al punto x y además $V \cap U = \emptyset$. De aquí que $V \cap K = \emptyset$, y en consecuencia $x \in V \subset X \setminus K$, es decir, el conjunto K es cerrado. $\square$

Corolario 4.11. En un espacio regular X, un conjunto F_σ es cerrado siempre que sea numerablemente compacto.

□

El siguiente teorema, nos muestra el resultado análogo a los teoremas 4.6 y 4.8 para el caso de espacios normales.

Teorema 4.12. Sean X un espacio normal y $K \subset X$ compacto. Entonces K es cerrado si K y $X \setminus K$ son uniones de conjuntos cerrados.

Demostración. Supongamos que $K = \cup\mathcal{C}$ y $X \setminus K = \cup\mathcal{D}$, donde $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathcal{F}$. Debido a que X es normal, para toda $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$, existen abiertos y ajenos U_C, V_C^D, para los cuales se cumple $C \subset U_C$ y $D \subset V_C^D$. De aquí que $K \underset{C\in\mathcal{C}}{\cup} U_C$ y, por ser K un conjunto compacto, existen $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ tales que $K \subset \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} U_{C_i} = U$. De lo anterior se desprende que $V_D = \overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} V_{C_i}^D$ es un abierto que contiene a D y además $V_D \cap K = \emptyset$, ya que $V_D \cap U = \emptyset$. Por consiguiente, tenemos que $X \setminus K = \underset{D\in\mathcal{D}}{\cup} V_D$ que es un conjunto abierto, es decir, hemos demostrado que K es cerrado. □

Corolario 4.13. En un espacio normal, todo subconjunto compacto que se represente como unión de cerrados e intersección de abiertos, es cerrado.

□

Al debilitar la hipótesis a numerablemente compacto en el teorema 4.12, necesitamos aadir la hipótesis adicional de que el espacio también sea de Fréchet Urysohn para que la conclusión siga siendo válida.

Teorema 4.14. Sea X un espacio de Fréchet Urysohn y normal. Entonces todo $K \subset X$ numerablemente compacto es cerrado si K y $X \setminus K$ son uniones de conjuntos cerrados.

Demostración. Supóngase que X es un espacio de Fréchet Urysohn, normal y $K = \cup\mathcal{C}$, $X \setminus K = \cup\mathcal{D}$ donde $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ son como en la demostración del teorema 4.12. Elijamos $x \in \overline{K} \setminus K$. Como X es un espacio de Fréchet Urysohn, existe una sucesión $s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ tal que $s \to x$. Puesto que K es numerablemente compacto, la sucesión s tiene un punto de acumulación $y \in K$. Es decir, cualquier vecindad de y contiene un número infinito de puntos de s. Como $y \in K$, se sigue que para algún $C \in \mathcal{C}$ tenemos que $y \in C$. Dado que $x \notin K$, se sigue que $x \notin C$ y $x \in D$ para algún $D \in \mathcal{D}$. De acuerdo a la normalidad de X, existen conjuntos abiertos U y V, tales que $y \in C \subset U$, $x \in D \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$ y, en este caso, se cumple que $s \cap U$ es infinito, ya que y es un punto de acumulación de s. Esto es una contradicción, pues por convergencia, el conjunto $s \cap U$ debería ser finito. Por lo tanto, el numerablemente compacto K es cerrado en X. □

Corolario 4.15. En un espacio de Fréchet Urysohn y normal, todo conjunto numerablemente compacto que sea unión de cerrados e intersección de abiertos es cerrado.

□

Cuando en lugar de compacto, tenemos numerablemente compacto en el teorema 4.12, la conclusión sigue siendo válida si en lugar de añadir que el espacio sea de Fréchet Urysohn, al igual que en el teorema 4.14, pedimos que K sea unión numerable de cerrados, como lo probamos enseguida.

Teorema 4.16. Sea X un espacio normal. Entonces todo $K \subset X$ numerablemente compacto, es cerrado si K es un conjunto F_σ y $X \setminus K$ es unión arbitraria de conjuntos cerrados.

Demostración. Un conjunto F_σ es en particular, unión de una familia de conjuntos cerrados. Así que la demostración es idéntica a la del teorema 4.12, salvo que en este caso, la familia de cerrados $\mathcal{C}$ que aparece en la mencionada prueba, la debemos tomar numerable. □

Como una consecuencia inmediata de este teorema, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.17. Todo conjunto $F_\sigma \subset$ en un espacio normal es cerrado siempre que sea numerablemente compacto e intersección de conjuntos abiertos.

□

El siguiente ejemplo muestra que las condiciones dadas en los teoremas 4.14 y 4.16 son suficientes pero no necesarias.

Ejemplo 4.18. Sea $X = (-\infty, 0]$ con la topología

$$\tau = \{G \subset X : G = X, \emptyset \text{ o } (-\infty, c) \text{ con } c \leq 0\}.$$

Entonces X es un espacio normal y de Fréchet Urysohn. Además el compacto $K = [-1, 0]$ es cerrado y $X \setminus K$ no se puede expresar como una unión de conjuntos cerrados.

Demostración. Dado que todo cerrado y no vacío contiene al 0, el espacio X es normal por vacuidad. Por otro lado,como la familia numerable $\mathcal{B} = \{(r, 0) : r \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]\} \cup \{X\}$ es base para X, tenemos que X es un espacio primero numerable y por lo tanto de Fréchet Urysohn. Ahora verifiquemos que $K = [-1, 0]$ es compacto. Sea $\mathcal{U} \subset \tau$ tal que $K \subset \cup\mathcal{U}$. Luego, existe un $U \in \mathcal{U}$ para el cual $0 \in U$. Por definición de τ, tenemos que $U = X$ y por consiguiente K es compacto. También K es cerrado, pues $X \setminus K = (-\infty, -1)$ es abierto. Debido a que $0 \notin X \setminus K$ y como cualquier cerrado y no vacío contiene a cero, el conjunto $X \setminus K$ no es unión de cerrados. □

4.2 Espacios S_i con $i = 1, 2$

En este apartado, abordamos los conceptos de espacios S_2 y S_1 y su relación existente con los T_i para $i = 0, 1$ y 2.

Definición 4.19. Un espacio topológico X se llama *espacio* S_1, (o, equivalentemente, $X \in S_1$), si dados cualesquier $x, y \in X$ con $y \notin \overline{\{x\}}$ entonces $x \notin \overline{\{y\}}$.

Definición 4.20. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es un *espacio* S_2, (o, equivalentemente, $X \in S_2$), si $x \notin \overline{\{y\}}$ entonces existen abiertos y ajenos U, V, tales que $x \in U$ y $y \in V$, para cualesquier $x, y \in X$.

Teorema 4.21. Todo espacio de Hausdorff es un espacio S_2.

Demostración. Sean $x, y \in X$ con $x \notin \overline{\{y\}}$ y $X \in T_2$. En particular $x \neq y$. Como X es de Hausdorff, existen abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$, y además $U \cap V = \emptyset$. Es decir, el espacio X es S_2. □

Teorema 4.22. Sea X un espacio S_2. Entonces X es un espacio S_1.

Demostración. Tomemos $x, y \in X$ con $y \notin \overline{\{x\}}$. Nuestra hipótesis garantiza la existencia de abiertos y ajenos U, V, para los cuales $x \in U$ y $y \in V$. De aquí que $x \notin \overline{\{y\}}$ y por lo tanto, el espacio X es S_1. □

Recordemos que un espacio X es T_1 (o bien $X \in T_1$) si el conjunto $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$.

Teorema 4.23. Si X es un espacio T_1 entonces X es S_1.

Demostración. Consideremos $x, y \in X$ con $y \notin \overline{\{x\}}$. Por consiguiente $x \notin \{y\}$. De aquí, y como $X \in T_1$, se desprende que $x \notin \{y\} = \overline{\{y\}}$. Es decir, $X \in S_1$. □

El siguiente ejemplo muestra que las clases S_1 y S_2 no son iguales.

Ejemplo 4.24. Sea $2\mathbb{N}$ el conjunto de números naturales pares. Consideremos $X = \mathbb{N}$ y la familia de subconjuntos de X dada por $\tau = \{G \subset X : G = \emptyset$ o $(X \setminus G) \cap 2\mathbb{N}$ es finito$\}$. Entonces (X, τ) es un espacio topológico S_1 y no S_2.

Demostración. Verifiquemos que τ es una topología para X. Es inmediato que $X, \emptyset \in \tau$. Ahora tomemos $\mathcal{U} \subset \tau$. Luego, $(X \setminus \cup\mathcal{U}) \cap 2\mathbb{N} = (X \setminus \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U) \cap 2\mathbb{N} = (\bigcap_{U\in\mathcal{U}} (X \setminus U)) \cap 2\mathbb{N} = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} ((X \setminus U) \cap 2\mathbb{N}) \subset (X \setminus U) \cap 2\mathbb{N}$ para toda $U \in \mathcal{U}$, y como éste es un conjunto finito, se sigue que $\cup\mathcal{U} \in \tau$. Por último, sean $G_1, G_2 \in \tau$. Como $(X \setminus (G_1 \cap G_2)) \cap 2\mathbb{N} = ((X \setminus G_1) \cup (X \setminus G_2)) \cap 2\mathbb{N} = ((X \setminus G_1) \cap 2\mathbb{N}) \cup ((X \setminus G_2) \cap 2\mathbb{N})$ y esta unión es finita, obtenemos que $G_1 \cap G_2 \in \tau$. Puesto que $X \setminus \{m\}$ es abierto, se sigue que $\{m\} = \overline{\{m\}}$ para todo $m \in X$, es decir, el espacio X es T_1, y en virtud del teorema 4.23 X es un espacio S_1. Sean $n, m \in X$ con $n \notin \overline{\{m\}}$. Afirmamos que no existen abiertos U y V, para los cuales $n \in U$, $m \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Ya que de lo contrario, tendríamos que $U \subset X \setminus V$ y en consecuencia $U \cap 2\mathbb{N} \subset (X \setminus V) \cap 2\mathbb{N}$, lo cual implica que $U \cap 2\mathbb{N}$ es finito. Dado que $U \neq \emptyset$, esto último contradice que U es abierto. Por consiguiente, el espacio X no es S_2. □

Ejemplo 4.25. Sea (X, τ) un espacio indiscreto, con cardinalidad mayor que 1. Afirmamos que $X \in S_2$ y $X \notin T_2$. En efecto, como $\{x\} \neq \overline{\{x\}}$ para todo $x \in X$, obtenemos que $X \notin T_1$ y por lo tanto $X \notin T_2$. Ahora bien, dado que $x \notin \overline{\{y\}}$ *para cualesquier* $x, y \in X$, es una proposición falsa, concluimos que $X \in S_2$. Por lo anterior y del teorema 4.22 deducimos también que $X \in S_1$ y $X \notin T_1$.

Del ejemplo 4.24, obtenemos un espacio X tal que $X \in T_1$ y $X \notin S_2$ y el ejemplo 4.25 proporciona un X para el cual $X \notin T_1$ y $X \in S_2$. De esta forma concluimos que los axiomas T_1 y S_2 son independientes entre sí.

Hasta estos momentos tenemos el siguiente diagrama concerniente a los axiomas de separación T_i y S_i con $i = 1, 2$.

$$\begin{array}{ccccc} T_2 & \longrightarrow & S_2 & \longrightarrow & S_1 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & T_1 & & \end{array}$$

Teorema 4.26. Un espacio X es T_0 y S_2, si y sólo si X es de Hausdorff.

Demostración. La suficiencia se sigue del teorema 4.21 y del resultado bien sabido de que todo espacio T_2 es T_0. Para probar la necesidad, tomemos $x, y \in X$ con $x \neq y$. Dado que X es un espacio T_0, existe un abierto U tal que el conjunto $U \cap \{x, y\}$ consta de un punto, digamos $U \cap \{x, y\} = \{x\}$. De aquí se desprende que $x \notin \overline{\{y\}}$ y por ser X un espacio S_2, existen abiertos V y W, para los cuales $x \in V$, $y \in W$ y $V \cap W = \emptyset$. De esta forma hemos probado que X es de Hausdorff. $\square$

Teorema 4.27. Sea X un espacio topológico. Entonces X es T_0 y S_1 si y sólo si X es T_1.

Demostración. Supongamos $X \in T_1$. En virtud del teorema 4.23, el espacio X es S_1 y dado que todo espacio T_1 es un espacio T_0, obtenemos que X es T_0 y S_1. Ahora probemos el recíproco. Sea X un espacio T_0 y también S_1. Sea $x \in X$. Tenemos que demostrar la contención $\overline{\{x\}} \subset \{x\}$. Sea $y \in \overline{\{x\}}$. Luego, por ser $X \in S_1$ obtenemos $x \in \overline{\{y\}}$. Supongamos $x \neq y$. Como $X \in T_0$, existe un abierto U tal que el conjunto $U \cap \{x, y\}$ consta de un sólo punto, lo cual indica que $y \notin \overline{\{x\}}$ o $x \notin \overline{\{y\}}$. Así que $x = y$, y por lo tanto $\overline{\{x\}} = \{x\}$ para todo $x \in X$. $\square$

Recordemos que $\mathcal{F}$ denota la familia de subconjuntos cerrados de X.

Proposición 4.28. Un espacio topológico X es S_1 si y sólo si para todo $A \subset X$ con $X \setminus A = \cup\mathcal{C}$ se cumple que $A = \cup\mathcal{C}'$, donde $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son subfamilias de $\mathcal{F}$.

Demostración. Sea $A \subset X$ con $X \setminus A = \cup\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C} = \{\emptyset\}$ entonces, al tomar $\mathcal{C}' = \{X\}$ obtenemos lo pedido. Supongamos que $\mathcal{C} \neq \{\emptyset\}$. Luego $X \setminus A \neq \emptyset$. Tomemos un $x \in A$. Para cada $y \in X \setminus A$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $y \in C$. Como $x \in X \setminus C$, la hipótesis garantiza la existencia de un abierto U_y para el cual $y \in U_y$ y $x \notin U_y$. De aquí, el conjunto cerrado

$$C_x = \bigcap\{X \setminus U_y : y \in (X \setminus A) \cap U_y\}$$

satisface $x \in C_x \subset A$, y por lo tanto $A = \bigcup_{x \in C_x} C_x$. Ahora probemos la suficiencia. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, y un abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Como $X \setminus U$ es cerrado, por hipótesis sabemos que $U = \cup\mathcal{C}$ donde $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Sea $C \in \mathcal{C}$ para el cual $x \in C$. Luego, el abierto $X \setminus C$ cumple que $y \in (X \setminus C) \setminus U$ y $x \in U \setminus (X \setminus C)$. De este modo obtenemos que X es un espacio S_1. $\square$

Corolario 4.29. Un espacio X es S_1 si y sólo si cualquier abierto es unión de conjuntos cerrados.

Demostración. Supongamos que X es S_1 y sea $U \in \tau(X)$. Como $X \setminus U$ es cerrado, de la proposición 4.28 se desprende que $U = \cup\mathcal{C}$, donde $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Para probar el recíproco, sean $x \neq y$ con $x \notin \overline{\{y\}}$. Luego, existe un $U \in \tau(X)$ con $x \in U$ y $y \notin U$. Por hipótesis, tenemos que $U = \cup\mathcal{C}$, donde $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Sea $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. Luego, el abierto $X \setminus C$ satisface $x \notin X \setminus C$ y $y \in X \setminus C$, es decir, $y \notin \overline{\{x\}}$. De esta forma obtenemos que X es un espacio S_1. $\square$

4.3 Cuándo un numerablemente compacto es cerrado en un S_2

En esta sección se demuestra cuándo un conjunto compacto en un espacio S_2 es cerrado. Para el caso en que los numerablemente compactos en un espacio S_2 sean cerrados, se debe añadir como hipótesis que el espacio sea de Fréchet Urysohn, tal y como se establece en el teorema 4.36

Necesitaremos del siguiente resultado concerniente a convergencia de redes y filtros, cuyas demostraciones puede consultarse en [8].

Teorema 4.30. Un subconjunto A de un espacio topológico X es cerrado en X si y sólo si el límite de cada red $s \subset A$ también pertenece a A.

$\square$

Teorema 4.31. (Caracterización de la compacidad mediante redes). Para cualquier espacio topológico X, las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) X es compacto;

(2) toda red en X tiene un punto de acumulación en X;

(3) para toda red en X existe una red más fina convergente.

$\square$

Teorema 4.32. Sea X un espacio topológico S_2. Entonces para todo $K \subset X$ compacto, las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) K es cerrado;

(2) K o $X \setminus K$ es unión de conjuntos cerrados;

(3) K y $X \setminus K$ son uniones de conjuntos cerrados.

Demostración. La demostración de (1) $\Rightarrow$ (2) es inmediata. Probemos (2) $\Rightarrow$ (3). Consideremos el caso $X \setminus K = \cup\mathcal{C}$ donde $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Como el espacio X es S_1, pues es S_2, de la proposición 4.28 obtenemos que K es unión de conjuntos cerrados. Ahora fijémonos cuando $K = \cup\mathcal{C}$ donde $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Entonces, aplicando nuevamente la proposición 4.28, obtenemos que $X \setminus K$ es unión de conjuntos cerrados. Ahora probemos (3) $\Rightarrow$ (1). Para ello, consideremos $K = \cup\mathcal{C}$, donde $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Supongamos que K no es cerrado. Entonces existe una red $s = (x_t)_{t\in S}$ en K tal que s converge a x y $x \notin K$ (ver teorema 4.30). Como K es compacto, la red s tiene un punto de acumulación y en K (ver teorema 4.31). Luego, existe un $C \in \mathcal{C}$ tal que $y \in C$ y $x \notin C$. En consecuencia $x \in X \setminus C$, es decir $X \setminus C$ es una vecindad abierta de x que no contiene a y. Como X es S_2, se sigue que x y y tienen vecindades ajenas. Esto es una contradicción, puesto que s converge a x y y es un punto de acumulación de s. Por lo tanto K es cerrado en X. $\square$

Este último teorema nos proporciona un resultado muy conocido.

Corolario 4.33. Todo conjunto compacto en un espacio T_2 es cerrado.

Demostración. Dado que X es un espacio T_1 y como $K = \underset{x\in K}{\cup}\{x\}$, obtenemos que K es unión de cerrados. Por otro lado, el espacio es S_2, pues él es de Hausdorff. Debido a lo anterior, el teorema 4.32 garantiza que el compacto K es cerrado. $\square$

A partir de aquí, a menos que se especifique lo contrario, denotaremos por G algún conjunto abierto y F algún conjunto cerrado en X.

Corolario 4.34. Sea X un espacio topológico S_2. Entonces

(1) Para todo $K \subset X$ compacto, las siguientes condiciones son equivalentes:

  (a) K es cerrado;

  (b) K o $X \setminus K$ son de la forma $G \cup F$, o equivalentemente, de la forma $G \cap F$;

  (c) K y $X \setminus K$ son de la forma $G \cup F$, o equivalentemente, de la forma $G \cap F$.

(2) Todo compacto de la forma $G \cup F$ o $G \cap F$ es cerrado.

(3) Todo conjunto compacto y abierto es cerrado.

Demostración. Prueba de (1). La demostración de (a) $\Rightarrow$ (b) resulta inmediata, pues podemos escribir $K = \emptyset \cup K$. Para probar (b) $\Rightarrow$ (c) primero consideremos el caso en que $K = G \cup F$. Como el espacio X es S_1 y G es abierto en X, en virtud de la proposición 4.28, tenemos que G es unión de conjuntos cerrados. En consecuencia, el cerrado K es unión de cerrados. De esta manera, al aplicar nuevamente la proposición 4.28, obtenemos que $X \setminus K$ también es unión de cerrados. Así, por el teorema 4.32, el conjunto K es cerrado, y lo podemos escribir como $K = \emptyset \cup K$. Puesto que $X \setminus K$ es abierto, ponemos $X \setminus K = (X \setminus K) \cup \emptyset$. En conclusión, hemos expresado a K y $X \setminus K$ de la forma $G \cup F$. Consideremos ahora el caso cuando $X \setminus K = G \cup F$. Análogamente obtenemos que $X \setminus K$ es unión de cerrados y, aplicando una vez más la proposición 4.28 conseguimos que K es unión de conjuntos cerrados. Nuevamente por el teorema 4.32, K es cerrado. Así, podemos escribir $K = \emptyset \cup K$ y $X \setminus K = (X \setminus K) \cup \emptyset$. De esta forma, hemos probado (c). Finalmente, probemos (c) $\Rightarrow$ (a). Para ello, supongamos que K y $X \setminus K$ son de la forma $G \cup F$. Notemos inmediatamente que K y $X \setminus K$ son uniones de conjuntos cerrados debido al corolario 4.29, puesto que G es abierto y el espacio X es S_1. Luego, por el teorema 4.32, K es cerrado. Hasta aquí, hemos concluido la demostración de (1). La prueba de (2) es consecuencia de (1) ya que se cumple (b). Por último, probemos (3). Dado K compacto y abierto, tenemos que $X \setminus K = \emptyset \cup (X \setminus K)$, es decir, el cerrado $X \setminus K$ lo podemos expresar como $G \cup F$. De esta manera, el conjunto K cumple con (b) de (1) y por consiguiente, obtenemos que K es cerrado. □

El siguiente ejemplo muestra que la hipótesis $X \in S_2$ en el teorema 4.32 es esencial para que todo compacto en X sea cerrado.

Ejemplo 4.35. Sea X el espacio dado en el ejemplo 4.24. Existe un compacto $K \subset X$ que no es cerrado.

Demostración. Sea $K = 2\mathbb{N}$. Consideremos una cubierta abierta $\{G_i\}_{i \in I}$ de K. Sea $i_0 \in I$.

Como $(X \setminus G_{i_0}) \cap K = \{k_1, \ldots, k_m\}$ para algún $m \in \mathbb{N}$, escojamos abiertos G_{i_j} tales que $k_j \in G_{i_j}$ para $j = 1, 2, \ldots, m$. De esta forma tenemos que $K \subset G_{i_0} \cup (\bigcup_{j=1}^{m} G_{i_j})$ y por lo tanto K es compacto. Con el objetivo de verificar que K no es cerrado, basta mostrar que $\overline{K} = X$. Para ello tomemos cualquier abierto G no vacío en X. De la definición de τ, se desprende que $G \cap K \neq \emptyset$, es decir, el compacto K es denso en X. □

Teorema 4.36. Sea X un espacio topológico de Fréchet Urysohn y S_2. Entonces para todo $K \subset X$ numerablemente compacto, las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) K es cerrado;

(2) K o $X \setminus K$ es unión de conjuntos cerrados;

(3) K y $X \setminus K$ son uniones de conjuntos cerrados.

Demostración. Las pruebas (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) son idénticas a las correspondientes del teorema 4.32 Para probar (3) $\Rightarrow$ (1) supongamos que $K = \cup\mathcal{C}$, donde $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Si K no es cerrado, entonces existe una red $s = (x_t)_{t \in S}$ en K tal que s converge a x y $x \notin K$. Como K es numerablemente compacto, la red s tiene un punto de acumulación $y \in K$. Luego, existe un $C \in \mathcal{C}$ tal que $y \in C$ y $x \notin C$. En consecuencia $x \in X \setminus C$, es decir $X \setminus C$ es una vecindad abierta de x que no contiene a y. Como además X es S_2, se sigue que x y y poseen vecindades abiertas y ajenas. Esto es una contradicción, puesto que s converge a x y y es un punto de acumulación de s. Por lo tanto K es cerrado en X. □

La hipótesis $X \in S_2$ en el teorema 4.36 es esencial para que todo numerablemente compacto en X sea cerrado, de acuerdo al siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.37. Sean $X = \mathbb{R}$ y

$$\tau = \{G \subset X : G = \emptyset,\ X \text{ o } (a, \infty) \text{ con } a \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces (X, τ) es un espacio de Fréchet Urysohn y no S_2, para el cual existe un $K \subset X$ numerablemente compacto y no cerrado.

Demostración. Probemos primero que la familia τ es una topología para X. Está dado que $\emptyset$, $X \in \tau$. Sea $\mathcal{U} \subset \tau$. Tomemos un $x \in \cup\mathcal{U}$ y verifiquemos que x es un punto interior de $\cup\mathcal{U}$. Para el caso en que $X \in \mathcal{U}$, no hay nada que probar. Si no es así, entonces $x \in (a, \infty)$ para algún $a \in \mathbb{R}$. De aquí obtenemos que $x \in (a, \infty) \subset \cup\mathcal{U}$. Esto último muestra lo que deseábamos y por consiguiente $\cup\mathcal{U} \in \tau$. Sean $G_1, G_2 \in \tau$ y demostremos que $G_1 \cap G_2 \in \tau$. El caso en que algún G_i sea $\emptyset$ o X, es evidente. Supongamos que $G_1 = (a_1, \infty)$, $G_2 = (a_2, \infty)$ donde $a_1 < a_2$. Así que $G_1 \cap G_2 = (a_2, \infty) \in \tau$. Por lo anterior concluimos que τ es topología. Para constatar que X es de Fréchet Urysohn, de acuerdo al teorema 2.2, basta mostrar que X es segundo numerable. Lo anterior se sigue debido a que $\mathcal{B} = \{(q, \infty) : q \in \mathbb{Q}\}$ es una base numerable para X. Ahora probemos que $X \notin S_1$. Para ello, tomemos $x, y \in X$ con $x \notin \overline{\{y\}}$. Como $\overline{y} = (-\infty, y]$ obtenemos $x > y$. Esto implica que $y \in \overline{\{x\}}$, ya que de lo contrario tendríamos que $x < y$, con lo que $X \notin S_1$. Para terminar nuestra demostración, sea $K = [0, 1] \subset X$. Afirmamos que K es numerablemente compacto. En efecto, sea $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una cubierta abierta numerable para K. Existe G_{i_0} para el cual $0 \in G_{i_0}$. De esta forma $K \subset G_{i_0}$ y $\{G_{i_0}\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{G}$. Además el conjunto K no es cerrado, pues $X \setminus K = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ no es abierto. □

El siguiente, es un resultado proporcionado en la proposición 4.5 que también lo podemos obtener a partir del teorema 4.36.

Corolario 4.38. Cualquier conjunto numerablemente compacto en un espacio de Fréchet Urysohn y T_2, es cerrado.

Demostración. Como $K = \bigcup_{x \in K} \{x\}$ y dado que cada conjunto $\{x\}$ es cerrado, pues X es T_1, tenemos que K es unión de conjuntos cerrados en X. Además, por ser T_2, el espacio X es S_2. De esta manera se cumple (2) del teorema 4.36 y por lo tanto, el conjunto numerablemente compacto K es cerrado. □

Corolario 4.39. Sea X un espacio topológico de Fréchet Urysohn y S_2. Entonces

(1) Para todo $K \subset X$ numerablemente compacto, las siguientes condiciones son equivalentes:

  (a) K es cerrado;

  (b) K o $X \setminus K$ es de la forma $G \cup F$, o equivalentemente, de la forma $G \cap F$;

  (c) K y $X \setminus K$ son de la forma $G \cup F$, o equivalentemente, de la forma $G \cap F$.

(2) Todo conjunto numerablemente compacto de la forma $G \cup F$ o $G \cap F$ es cerrado.

(3) Cualquier conjunto numerablemente compacto y abierto es cerrado.

Demostración. La demostración de este resultado es idéntica a la dada en el corolario 4.34, excepto que para este caso, empleamos el teorema 4.36 en lugar del teorema 4.32. □

El siguiente resultado nos será de gran utilidad para demostrar enseguida que la cerradura de un compacto (numerablemente compacto) en un espacio S_2 (S_2 y de Fréchet Urysohn), también es un compacto (numerablemente compacto).

Lema 4.40. Sean X un espacio S_1 y $x \in X$. Si U es un abierto tal que $x \in U$, entonces $\overline{\{x\}} \subset U$.

Demostración. Supongamos que $\overline{\{x\}} \nsubseteq U$, es decir, existe $y \in \overline{\{x\}} \setminus U$. Como X es un espacio S_1 y $x \in U$, podemos encontrar una vecindad abierta U_y de y tal que $x \notin U_y$. De aquí $U_y \cap \{x\} = \emptyset$, o bien $y \notin \overline{\{x\}}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\overline{\{x\}} \subset U$. □

Corolario 4.41. Sean X un espacio S_2 y $K \subset X$ compacto. Entonces

(1) $\overline{K} = \underset{x\in K}{\cup}\overline{\{x\}}$ y $\overline{K}$ es compacto.

(2) Si $S \subset X$ satisface $K \subset S \subset \overline{K}$, entonces S es compacto.

Demostración. Prueba de (1). Probemos que el conjunto $E = \underset{x\in K}{\cup}\overline{\{x\}} \subset \overline{K}$ es compacto. Sea $\mathcal{G}$ una cubierta abierta de E, es decir, $E \subset \cup\mathcal{G}$. Notemos que $K \subset E$ y por ende $K \subset \cup\mathcal{G}$. Entonces $\mathcal{G}$ es una cubierta abierta de K y dado que K es compacto, existen $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{G}$ tales que $K = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} G_i$. Esto último implica que para toda $x \in K$ existe $i_x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x \in G_{i_x}$. Como X es S_2, y por lo tanto es S_1. Del lema 4.4 se tiene que $\overline{\{x\}} \subset G_{i_x}$ para toda $x \in K$. Luego, $\underset{x\in K}{\cup}\overline{\{x\}} \subset \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} G_i$, es decir, $E \subset \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} G_i = K \subset E$. De aquí tenemos que $E = K$ y, de esta forma E es compacto. Además, E es unión de conjuntos cerrados, así que por el teorema 4.32, obtenemos que E es cerrado. Entonces $E = \overline{E} = \overline{K}$ y, por consiguiente $\overline{K}$ es compacto. Ahora probemos (2). Sea $\mathcal{G}$ una cubierta abierta de S. Afirmamos que $\mathcal{G}$ cubre a $\overline{K}$, de no ser así, existe un $x \in \overline{K} \setminus \cup\mathcal{G}$. Como $x \in \overline{K} = \underset{x\in K}{\cup}\overline{\{x\}}$, existe $x_0 \in K$ tal que $x \in \overline{\{x_0\}}$. Dado que $x_0 \in S$, hay un elemento U de la cubierta $\mathcal{G}$, de tal manera que $x_0 \in U$. Puesto que el espacio X es S_1, tenemos que $\overline{\{x_0\}} \subset U$, es decir, $x \in U$. Lo cual es una contradicción, ya que a x lo tomamos fuera de la cubierta. Por lo tanto, $\mathcal{G}$ también es cubierta abierta de $\overline{K}$. Por (1), el conjunto $\overline{K}$ es compacto, así que podemos encontrar una subcubierta finita de $\mathcal{G}$ que cubre a $\overline{K}$ y en consecuencia también cubre a S. De esta forma hemos probado que S es compacto. □

Corolario 4.42. Sea X un espacio de Fréchet Urysohn y S_2. Entonces para todo $K \subset X$ numerablemente compacto se cumple lo siguiente:

(1) $\overline{K} = \underset{x\in K}{\cup}\overline{\{x\}}$ y $\overline{K}$ es numerablemente compacto;

(2) Si $S \subset X$ satisface $K \subset S \subset \overline{K}$, entonces S es numerablemente compacto;

Demostración. Prueba de (1). Iniciemos probando que el conjunto $E = \underset{x\in K}{\cup}\overline{\{x\}} \subset \overline{K}$ es numerablemente compacto. Sea $\mathcal{G}$ una cubierta abierta y numerable de E. Puesto que $x \in \overline{\{x\}}$ para cada $x \in K$, obtenemos la contención $K \subset E$. Esto implica que $K \subset \cup\mathcal{G}$, es decir, $\mathcal{G}$ también es una cubierta de K. Como K es conjunto numerablemente compacto, existen conjuntos abiertos $G_1, \ldots, G_n$ de $\mathcal{G}$ de tal manera que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i$. Luego, si $x \in K$, podemos hallar un $i_x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x \in G_{i_x}$. Debido a que todo espacio S_2 es un espacio S_1 y a la proposición 4.40, obtenemos que $\overline{\{x\}} \subset G_{i_x}$. En consecuencia $E = \bigcup_{x\in K} \overline{\{x\}} \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ y esto prueba que E es numerablemente compacto. Ahora observemos que E es unión de conjuntos cerrados. En virtud del teorema 4.46, el conjunto E es cerrado. De aquí se sigue que $\overline{K} \subset \overline{E} = E$. Por lo tanto $\overline{K} = E$ y, en consecuencia $\overline{K}$ es numerablemente compacto. Prueba de (2). Sea $\mathcal{G}$ una cubierta abierta numerable de S. Probemos que $\mathcal{G}$ cubre a $\overline{K}$. Supongamos que existe un $x \in \overline{K} \setminus \cup\mathcal{G}$. Como $x \in \overline{K} = \bigcup_{x\in K} \overline{\{x\}}$, existe $x_0 \in K$ tal que $x \in \overline{\{x_0\}}$. Dado que $x_0 \in S$, existe un elemento U_j de la cubierta, de tal manera que $x_0 \in U_j$. Puesto que el espacio X es S_1, tenemos que $\overline{\{x_0\}} \subset U_j$, es decir, $x \in U_j$. Lo cual es una contradicción, ya que a x lo tomamos fuera de la cubierta. Por lo tanto, $\mathcal{G}$ es también cubierta abierta de $\overline{K}$. Por (1) tenemos que $\overline{K}$ es numerablemente compacto, así que podemos encontrar una subcubierta finita de $\mathcal{G}$ que cubre a $\overline{K}$ y en consecuencia también cubre a S. De aquí que, S numerablemente compacto. □

Una familia $\mathcal{E}$ de subconjuntos de un espacio X se llama *localmente finita* si para todo $x \in X$ existe un abierto U para el cual $x \in U$ y el conjunto $\{E \in \mathcal{E} : U \cap E \neq \emptyset\}$ es finito. Es sabido que $\overline{\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E} = \bigcup_{E\in\mathcal{E}} \overline{E}$ siempre que la familia $\mathcal{E}$ de subconjuntos de X sea localmente finita ([3]. Teorema 1.1.11). La anterior igualdad también se sigue si el espacio X es S_2 y la familia $\mathcal{E}$ es como en (2) del siguiente corolario.

Corolario 4.43. Sea X un espacio S_2. La siguientes proposiciones son verdaderas

(1) Si $K \subset X$ es compacto tal que si puede expresar como unión de cerrados o intersección de abiertos, entonces K es cerrado;

(2) Si $\mathcal{E}$ es una familia de subconjuntos de X tal que $\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E$ es compacto, entonces $\overline{\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E} = \bigcup_{E\in\mathcal{E}} \overline{E}$.

Demostración. Prueba de (1). Si la unión de conjuntos cerrados es compacto, por (2) del teorema 4.32, ésta es cerrada. Ahora supongamos que la intersección de conjuntos abiertos es compacto. Luego, su complemento es unión de conjuntos cerrados. Aplicando nuevamente (2) del teorema 4.32, tenemos que dicha intersección es un conjunto cerrado. Prueba de (2). Por hipótesis, el conjunto $\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E$ es compacto. Aplicando (1) del corolario 4.41 obtenemos la compacidad de $\overline{\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E}$. De la parte (2) de este resultado, se sigue que $\cup_{E\in\mathcal{E}}\overline{E}$ es compacto, ya que $\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E \subset \bigcup_{E\in\mathcal{E}} \overline{E} \subset \overline{\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E}$. Ahora ya estamos listos para demostrar lo requerido. Para ello basta probar que $\overline{\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E} \subset \bigcup_{E\in\mathcal{E}} \overline{E}$. Sea el compacto $K = \bigcup_{E\in\varepsilon} \overline{E}$, es decir, K es unión de conjuntos cerrados. Dado que el espacio X es S_2, por (2) del teorema 4.32 se desprende que K es cerrado. Como $\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E \subset K$, obtenemos $\overline{\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E} \subset \overline{K} = K$. Por lo tanto $\overline{\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E} = \bigcup_{E\in\mathcal{E}} \overline{E}$. □

Al debilitar la hipótesis de compacto a numerablemente compacto en (1) y (2) del corolario 4.43, y para conservar las respectivas condiciones en este caso, necesitamos pedirle al espacio que sea de Fréchet Urysohn.

Corolario 4.44. Sea X un espacio S_2 y de Fréchet Urysohn. Las siguientes proposiciones son verdaderas:

(1) Si $K \subset X$ es numerablemente compacto tal que si puede expresar como unión de cerrados o intersección de abiertos, entonces K es cerrado;

(2) Si $\mathcal{E}$ es una familia de subconjuntos de X tal que $\underset{E\in\mathcal{E}}{\cup} E$ es numerablemente compacto, entonces $\overline{\underset{E\in\mathcal{E}}{\cup} E} = \underset{E\in\mathcal{E}}{\cup} \overline{E}$.

Demostración. La prueba de este resultado, es idéntica a la del corolario 4.43, excepto que para este caso recurrimos al teorema 4.36 en lugar del teorema 4.32. □

4.4 Numerablemente compacto y cerrado en un normal

En esta sección proporcionamos condiciones suficientes y necesarias para que un conjunto compacto(numerablemente compacto) en un espacio normal (de Fréchet Urysohn y normal), sea cerrado.

Necesitaremos del siguiente resultado (ver [8] que será necesario para la demostración de nuestro próximo teorema.

Teorema 4.45. Sea X un espacio topológico. Entonces, para todo $A \subset X$ se tiene que $x \in \overline{A}$ si y sólo si, existe una red $s \subset A$ tal que $s \to x$.

□

Teorema 4.46. Sea X un espacio normal. Un conjunto compacto K es cerrado, si y sólo si K es unión de conjuntos cerrados y $X \setminus K$ es de la forma $G \cup F$.

Demostración. Probemos primero la necesidad. Para ello, consideremos que $K \subset X$ es cerrado. Es claro que K es unión de conjuntos cerrados y $X \setminus K = (X \setminus K) \cup \emptyset$ que es de la forma $G \cup F$. En este caso es irrelevante la compacidad de K y que X sea un espacio normal. Ahora demostremos la suficiencia. Sea $K = \cup\mathcal{C}$ donde $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, con $\mathcal{F}$ la familia de cerrados de X, como se había especificado con anterioridad, y $X \setminus K = G \cup F$. Supongamos que K no es cerrado. Tomemos un $x \in \overline{K} \setminus K$. Entonces, existe una red $s = (x_t)_{t\in S}$ en K tal que s converge a x (ver teorema 4.45) Como $x \notin K$, tenemos que $x \in G \cup F$. Luego $x \notin G$, pues de lo contrario $G \cap K \neq \emptyset$, lo cual no puede ser, ya que $G \subset X \setminus K$. De aquí se deduce que $x \in F$. Dado que K es compacto, la red s tiene un punto de acumulación $y \in K$ (ver teorema 4.31). Entonces existe $F_0 \in \mathcal{F}$ tal que $y \in F_0$. Como $F \cap F_0 = \emptyset$, de la normalidad de X se desprende la existencia de abiertos y ajenos, W y V, tales que $F \subset W$ y $F_0 \subset V$. Luego $x \in W$ y $y \in V$, lo cual contradice que $s \to x$ y que y sea punto de acumulación de s. Por consiguiente, hemos probado que K es cerrado. □

Corolario 4.47. Sea X un espacio normal. Las siguientes proposiciones son verdaderas

(1) Sea $K \subset X$ compacto y de la forma $G \cup F$. Si K es unión de cerrados en X entonces K es cerrado;

(2) Si $\mathcal{E}$ es una familia de subconjuntos de X, tal que $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} \overline{E}$ es compacto y es de la forma $G \cap F$, entonces $\overline{\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E} = \bigcup_{E \in \mathcal{E}} \overline{E}$.

Demostración. Sea $K \subset X$ un compacto tal que $K = \cup \mathcal{C}$, con $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, y $K = G \cap F$. De aquí que $X \setminus K = (X \setminus G) \cup (X \setminus F)$ que es de la forma de una unión de abierto con un cerrado. Del teorema 4.46 obtenemos que K es cerrado, con lo que (1) queda probado. Por demostrar (2). Consideremos una familia $\mathcal{E}$ de subconjuntos de X para la cual $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} \overline{E}$ es compacto y $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} \overline{E} = G \cap F$. Basta con verificar la contención $\overline{\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E} \subset \bigcup_{E \in \mathcal{E}} \overline{E}$. Sea $K = \bigcup_{E \in \mathcal{E}} \overline{E} = G \cap F$. Como el compacto K es unión de cerrados y $X \setminus K = X \setminus G) \cup (X \setminus F)$, que es unión de un abierto con un cerrado, el teorema 4.46 garantiza que K es cerrado. Por otro lado $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E \subset K$, lo cual implica que $\overline{\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E} \subset \overline{K} = K$, es decir, $\overline{\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E} \subset \bigcup_{E \in \mathcal{E}} \overline{E}$ que es lo deseado. □

El siguiente resultado nos ilustra la importancia de que un espacio sea de Fréchet Urysohn, para que todo numerablemente compacto sea cerrado.

Teorema 4.48. Sea X un espacio normal y de Fréchet Urysohn. Un conjunto numerablemente compacto K es cerrado si y sólo si K es unión de conjuntos cerrados y $X \setminus K$ es de la forma $G \cup F$.

Demostración. La prueba de la necesidad es análoga a la del teorema 4.46. Asimismo, observemos que la propiedad de que K sea numerablemente compacto y X normal, no se requieren en esta prueba. Ahora demostremos la suficiencia. Sea $K = \cup \mathcal{C}$ donde $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, y $X \setminus K = G \cup F$. Supongamos que K no es cerrado. Tomemos un $x \in \overline{K} \setminus K$. Puesto que X es de Fréchet Urysohn, existe una sucesión $s = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ tal que s converge a x. Luego $x \notin G$, pues de lo contrario $G \cap K \neq \emptyset$, lo cual contradice que $G \subset X \setminus K$. De aquí se deduce que $x \in F$. Dado que K es numerablemente compacto, la sucesión s tiene un punto de acumulación $y \in K$. Entonces existe $F_0 \in \mathcal{F}$ tal que $y \in F_0$. Como $F \cap F_0 = \emptyset$, la normalidad de X implica la existencia de abiertos y ajenos, W y V, para los cuales $F \subset W$ y $F_0 \subset V$. De aquí que $x \in W$ y $y \in V$, lo cual contradice que $s \to x$ y y sea punto de acumulación de s. En consecuencia, concluimos que K es cerrado. □

Corolario 4.49. Sea X un espacio de Fréchet Urysohn y normal. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas.

(1) Sea $K \subset X$ numerablemente compacto y de la forma $G \cup F$. Si K es unión de cerrados en X entonces K es cerrado;

(2) Si $\mathcal{E}$ es una familia de subconjuntos de X, tal que $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} \overline{E}$ es numerablemente compacto y es de la forma $G \cap F$ entonces $\overline{\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E} = \bigcup_{E \in \mathcal{E}} \overline{E}$.

Demostración. La demostración es idéntica, a la del corolario 4.47, salvo que para este caso se utiliza el teorema 4.48. $\square$

Al debilitar la hipótesis de K compacto a K numerablemente compacto en el teorema 4.46, la pregunta que surge inmediatamente es si K es un cerrado. La respuesta es negativa y está basada en el siguiente resultado.

Teorema 4.50. Sea X un espacio normal y K un subconjunto de X numerablemente compacto. Entonces K es cerrado si y sólo si K es un conjunto F_σ de X y $X \setminus K$ es de la forma $G \cup F$.

Demostración. La necesidad es inmediata ya que todo conjunto cerrado es un F_σ y su complemento es de la forma $G \cup F$. Como en la demostración de la necesidad del teorema 4.48 la compacidad numerable y la normalidad del espacio X no juegan papel alguno. Sea $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, donde cada F_n es cerrado en X y $X \setminus K = G \cup F$. Para probar la suficiencia verificamos que $X \setminus K$ es abierto en X. Para ello, sea $x \in X \setminus K$. Si $x \in G$, entonces $x \in G \subset X \setminus K$, con lo que $X \setminus K$ es abierto. Ahora supongamos que $x \in F$. Dado que X es normal, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen abiertos y ajenos U_n y V_n en X, para los cuales $F_n \subset U_n$ y $F \subset V_n$. De aquí que la familia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta numerable de K. Dado que K es numerablemente compacto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} U_i$ y de este modo $F \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} V_i$. Sean $U = \bigcup\limits_{i=1}^{N} U_i$ y $V = \bigcup\limits_{i=1}^{N} V_i$. Como los abierto U y V son ajenos, obtenemos que $x \in F \subset V \subset X \setminus U \subset X \setminus K$. De esta manera $X \setminus K$ es abierto. $\square$

Corolario 4.51. Sea X un espacio normal. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas.

(1) Sea $K \subset X$ numerablemente compacto y de la forma $G \cap F$. Si K es un conjunto F_σ, entonces K es cerrado.

(2) Si $\mathcal{E}$ es una familia de subconjuntos de X, tal que $\bigcup\limits_{E\in\mathcal{E}} \overline{E}$ es numerablemente compacto y es de la forma $G \cap F$ entonces $\overline{\bigcup\limits_{E\in\mathcal{E}} E} = \bigcup\limits_{E\in\mathcal{E}} \overline{E}$.

Demostración. Probemos (1). Dado que K es un F_σ y $X \setminus K$ es de la forma $G \cup F$, obtenemos del teorema 4.50 que K es cerrado. Para probar (2), hagamos $K = \bigcup\limits_{E\in\mathcal{E}} \overline{E}$. Por hipótesis, $X \setminus K$ es de la forma $G \cup F$. Nuevamente del teorema 4.50, se sigue que K es cerrado. Por otro lado, es claro que $\bigcup\limits_{E\in\mathcal{E}} E \subset K$. De aquí y de lo anterior, concluimos que $\overline{\bigcup\limits_{E\in\mathcal{E}} E} \subset \overline{K} = K$, es decir, hemos obtenido $\overline{\bigcup\limits_{E\in\mathcal{E}} E} \subset \bigcup\limits_{E\in\mathcal{E}} \overline{E}$. Como la contención inversa siempre es válida, tenemos que $\overline{\bigcup\limits_{E\in\mathcal{E}} E} = \bigcup\limits_{E\in\mathcal{E}} \overline{E}$. $\square$

Referencias

[1] Arhangel'skii, A. *Some types of factor mappings and the relations between classes of topological spaces.* Soviet Math. Dokl, 1963.

[2] Arhangel'skii, A.; Ponomarev, V. *Fundamentals of General Topology. Problems and Exercises.* Reidel P.C., Dordrecht, 1984.

[3] Engelking, R. *General Topology*. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[4] Franklin, S.P. *Spaces in which sequences suffice.* Fundamenta Mathematicae LVII., Gainesville, Florida, 1965.

[5] Franklin, S.P. *Spaces in which sequences suffice II.* Fundamenta Mathematicae LXI., Pittsburgh, Pennsylvania, 1967.

[6] Garg, G.L.; Goel A. *When compact(countably compact) sets are closed. vol. 64* Journal of the Indian Math. Soc.; Patiala, India, 1997.

[7] Garg, G.L.; Singh, N. *When a compact(countably compact) sets is closed.* Acta Math. Hungar.; Longowai(Punjab), India, 2002.

[8] Tkachuk V. *Curso básico de topología general*. UAM-Iztapalapa. México. D.F., 1999.