Rev. Cub. Física vol.26, No.2B (2009) p.262-266
ISSN: 0253-9268. Original paper

Revista Cubana de Física
Calle I No. 302 e/ 15 y 17
Vedado, La Habana. CP 10400
www.fisica.uh.cu/biblioteca/revcubfi/index.htm

Distribuciones estadísticas "generalizadas" a partir del principio de máxima entropía

O. Sotolongo-Costa, A. González y F. Brouers[a]

Facultad de Física, Universidad de La Habana, Cuba; osotolongo@fisica.uh.cu; alexglez@fisica.uh.cu†
a) Institute of Physics, Liège University. B5, 4000 Liège, Belgium.
†autor para la correspondencia

Recibido el 15/01/2009. Aprobado en versión final el 29/06/2009.

Sumario. Teniendo como base el Principio de Máxima Entropía desarrollado por E. Jaynes en el marco de la Física Estadística, realizamos una modificación del mismo tomando como funcional de entropía el propuesto por C. Tsallis con índice entrópico q $\in \Re^n$ y encontramos las expresiones analíticas de las versiones "generalizadas" de algunas de las densidades de probabilidad continuas más conocidas. Se demuestra que estas versiones "generalizadas" tienden a las densidades "clásicas" generadas por la estadística de Boltzmann-Gibbs-Shannon cuando q $\to$1. La aplicación de este procedimiento a otras densidades continuas y discretas es directa y se espera que en el futuro aparezcan aplicaciones prácticas del mismo.

Abstract. We use a modification of the Maximum Entropy Principle developed by E. Jaynes within the framework of Statistical Mechanics by taking the entropy functional of C. Tsallis with entropic index q $\in \Re^n$ and we found generalized versions of some well known statistical densities. We show that this results are in agreement with the classical ones when we take the limit q $\to$1 and we recover the usual densities obtained by maximization of the Boltzmann-Gibbs-Shannon entropic functional. The extension of this line of reasoning to other discrete or continuous densities is straightforward and we expect to find some useful applications of these models in the future..

Palabras clave. Sistemas complejos 89.75.-k., Entropía 05.70.-a, 65.40.gd.

1 Introducción

Las distribuciones de probabilidad tienen un papel central en las teorías estadísticas ya que ellas constituyen los modelos físico-matemáticos de ciertos fenómenos bajo análisis. Las distribuciones conocidas como la Normal o Gaussiana, Exponencial, Laplace, etc., pueden obtenerse mediante el Principio de Máxima Entropía (PME)[1,2] bajo ciertas restricciones apropiadas junto con la condición de normalización de las probabilidades[3,4,5,6]. El funcional de entropía empleado en este enfoque es el denominado de Boltzmann-Gibbs-Shannon (BGS) ó Entropía Termodinámica:

$$S_{BGS} = -k\int_{\Omega} p(x)\ln p(x)dx \qquad (1)$$

No obstante han aparecido algunas alternativas para sustituir el funcional convencional de la entropía BGS. Entre ellos el más atractivo ha sido el propuesto por C. Tsallis:

$$S_q = k\frac{1}{q-1}\left[1-\int_{\Omega} p^q(x)dx\right] \ ,q\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

debido a que la física estadística basada en esta medida no extensiva ha sido aplicada con éxito en la descripción de sistemas anómalos con interacciones de largo alcance, efectos de memoria de largo plazo, y estructura autosemejante o (multi)fractal[7,8]. Véase que en el límite $q \to 1$, se obtiene la entropía BGS.

En este artículo se repasa la idea vista en [3] y se encuentran las distribuciones de probabilidad "generalizadas" obtenidas mediante el PME donde se sustituye la entropía S_{BGS} por la S_q y las restricciones se dan en forma de q-valores promedio según se definen en [8,9]. En aquellos casos donde aparezcan funciones logarítmicas o exponenciales en los q-valores promedio, se utilizarán los q-exponenciales o q-logaritmos según se definen en [10]. El artículo está organizado de la manera siguiente: en la sección 2 se expone el PME para el funcional BGS y da una caracterización de algunas de las distribuciones continuas más conocidas de la estadística matemática: la Uniforme, Exponencial, Normal, de Laplace, y de Weibull; en la sección 3 se expone el PME para el funcional de Tsallis y se obtienen las mismas distribuciones antes mencionadas en sus versiones "generalizadas", dependientes del parámetro real q. Se demuestra en cada caso como obtener una distribución más apropiada para calcular los q-valores medios (distribución acompañante) y se halla que cuando $q \to 1$ se obtienen las distribuciones clásicas. La sección 4 está dedicada a las aplicaciones donde se relacionan dos ejemplos de aplicación exitosa del formalismo no extensivo. La sección 5 estará dedicada a las conclusiones.

2 Caracterización de las distribuciones continuas "clásicas"

El problema planteado para encontrar las distribuciones de probabilidad llamadas "clásicas" es de extremos condicionados, soluble mediante los multiplicadores de Lagrange. En cada caso x es una variable aleatoria perteneciente a cierto conjunto $\Omega \in \Re^n$ que representa el "estado" del sistema, y $p(x)$ es su densidad de probabilidad de forma tal que $p(x)dx$ es la probabilidad de que el sistema se encuentre entre los "estados" x y $x+dx$. De esta forma hay que maximizar el funcional:

$$\begin{aligned}\Phi[p(x)] = -\int_\Omega p(x)\ln p(x)dx - \\ -\lambda_0\left(\int_\Omega p(x)dx - 1\right) - \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\left(\int_\Omega g_k(x)p(x)dx - G_k\right)\end{aligned} \tag{3}$$

donde los λ_k son los multiplicadores de Lagrange y $g_k(x)$ son las N restricciones (información conocida sobre el sistema) y los G_k son los valores obtenidos sobre las g_k a través de la distribución obtenida:

$$G_k = \int_\Omega g_k(x)p(x)dx \tag{4}$$

Este es el contenido físico del PME para la Entropía Termodinámica[7]. En las subsecciones siguientes se aplica esta metodología para obtener algunas de las distribuciones continuas más conocidas, lo cual se ha reportado ya en [4] y [5].

Distribución Uniforme Ω=(0,1). En este caso la única restricción es la condición de normalización $\int_\Omega p(x)dx = 1$, y se obtiene:

$$p(x) = \frac{1}{b-a}; \quad \forall x \in (a,b) \subset (0,1) \tag{5}$$

Distribución Exponencial Ω=(0,∞). En este caso las restricciones son:

$$\begin{aligned}&1.\int_0^\infty p(x)dx = 1,\\ &2.\int_0^\infty x\,p(x)dx = m > 0\end{aligned} \tag{6}$$

y se obtiene:

$$p(x) = me^{-mx}; \quad \forall x \in \Omega\,, \tag{7}$$

donde m es el valor medio de la variable x.

Distribución Normal Ω=(-∞,∞). Las restricciones son:

$$1.\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1, \qquad 2.\int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)dx = \mu > 0,$$

$$3.\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, p(x)dx = \sigma^2 > 0,$$

y se obtiene:

$$p(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, \qquad \forall x \in \Omega = (-\infty,\infty) \tag{8}$$

Distribución de Laplace Ω=(-∞,∞). Las restricciones son:

$$1.\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1,$$

$$2.\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,p(x)dx = w$$

y se obtiene:

$$p(x) = \frac{1}{2w}e^{-\frac{|x|}{w}}; \quad \forall x \in \Omega \tag{9}$$

Distribución de Weibull Ω=(0,∞). Las restricciones son:

$$1.\int_0^\infty p(x)dx = 1,$$

$$2.\int_0^\infty x^\alpha\, p(x)dx = g_1,$$

$$3.\int_0^\infty \ln(x)p(x)dx = g_2, \quad 0 < \alpha < 1$$

y en este caso los multiplicadores de Lagrange son $\lambda_1 = \lambda^{-\alpha}$ y $\lambda_2 = 1-\alpha$, por lo que se obtiene:

$$p(x) = \frac{\alpha}{\lambda^\alpha}e^{-\left(x/\lambda\right)^\alpha}x^{\alpha-1} \tag{10}$$

donde para los casos particulares de $\lambda = 1,2,\infty$ se obtienen las distribuciones: Exponencial, de Rayleigh y Delta de

Dirac respectivamente.

3 Caracterización de las distribuciones continuas "generalizadas"

El Principio de Máxima Entropía se puede modificar sustituyendo el funcional BGS por el de Tsallis y cambiando la forma de plantear las restricciones para obtener las distribuciones generalizadas. De esta forma será necesario maximizar:

$$\Phi_q[p(x)] = \frac{1}{q-1}\left[1-\int_\Omega p^q(x)dx\right] - \\ -\lambda_0\left(\int_\Omega p(x)dx-1\right)-\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\left(\frac{\int_\Omega g_k(x)p^q(x)dx}{\int_\Omega p^q(x)dx}-\langle G_k\rangle_q\right) \tag{11}$$

donde la forma de calcular las restricciones se da mediante:

$$\langle G_k\rangle_q = \int_\Omega g_k(x)P_{esc}(x)dx \tag{12}$$

$$\text{donde } P_{esc}(x)\frac{p^q(x)}{\int_\Omega p^q(x)dx} \tag{13}$$

donde $P_{esc}(x)$ es la llamada probabilidad acompañante (escort). En lo que sigue se aplica esta metodología para obtener las versiones "generalizadas" de las distribuciones anteriores. Nótese en algunos casos como las funciones logarítmica y exponencial se han cambiado por sus homólogos generalizados (q-exponencial y q-logaritmo) definidos por:

$$\exp_q(x) = [1+(1-q)x]^{\frac{1}{1-q}}, \\ \log_q(x) = \frac{x^{1-q}-1}{1-q} \tag{14}$$

Distribución Uniforme Generalizada Ω=(0,1). En este caso la única restricción es la condición de normalización y la distribución acompañante obtenida es la misma que la anterior (clásica).

$$P_{esc}(x) = \frac{p^q(x)}{\int_{\Omega=(a,b)} p^q(x)dx} \\ = \frac{1}{b-a};\quad \forall x\in(a,b)\subset(0,1) \tag{15}$$

Distribución Exponencial Generalizada Ω=(0,∞). En este caso las restricciones son:

$$1.\int_0^\infty p(x)dx = 1,$$

$$2.\int_0^\infty x\,P_{esc}(x)dx = \mu > 0$$

Obteniéndose:

$$p(x) = \frac{1}{\mu}\left[1+\left(\frac{q-1}{2-q}\right)\frac{x}{\mu}\right]^{\frac{1}{1-q}} \\ \forall x\in\Omega,\ 1<q<2 \tag{16}$$

$$P_{esc}(x) = \frac{1}{\mu(2-q)}\left[1+\left(\frac{q-1}{2-q}\right)\frac{x}{\mu}\right]^{\frac{q}{1-q}} \\ \xrightarrow[q\to1]{} \frac{1}{\mu}e^{-x/\mu} \tag{17}$$

que como puede verse tiende a la distribución exponencial cuando q→1 si tomamos $m=\mu^{-1}$.

Distribución Normal Generalizada Ω=(-∞,∞). Las restricciones son:

$$1.\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1,$$

$$2.\int_{-\infty}^{\infty} x\,P_{esc}(x)dx = \mu > 0,$$

$$3.\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,P_{esc}(x-\mu)dx = \sigma^2 > 0,$$

y se obtiene:

$$p(x) = C_0\left[1+\lambda(q-1)\left[(x-\mu)^2-\mu^2\right]\right]^{\frac{1}{1-q}} \tag{18}$$

$$con \quad C_0 = \sqrt{\frac{\lambda(q-1)}{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}-\frac{1}{2}\right)}\left[1+(1-q)\lambda\mu^2\right]^{\frac{q-3}{2(1-q)}}$$

$$P_{esc}(x) = \frac{\left[\sigma^2(3-q)\right]^{\frac{q+1}{2(q-1)}}\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\sqrt{\pi(q-1)}\Gamma\left(\frac{1}{q-1}+\frac{1}{2}\right)\left[\mu^2(q-1)+\sigma^2(3-q)\right]^{\frac{q}{q-1}}}\times \\ \times\left[1+\frac{(q-1)\left((x-\mu)^2-\mu^2\right)}{\mu^2(q-1)+\sigma^2(3-q)}\right]^{\frac{q}{q-1}} \\ para\quad \lambda\mu^2(q-1)<1 \quad y \quad 1<q<2 \tag{19}$$

la cual en el límite q→1 da como resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{20}$$

Distribución de Laplace Generalizada Ω=(-∞,∞). Las restricciones son:

$$1.\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1,$$

$$2.\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,P_{esc}(x)dx = w$$

obteniéndose:

$$p(x) = \frac{\lambda(2-q)}{2}\left[1+\lambda(q-1)|x|\right]^{\frac{1}{1-q}} \tag{21}$$

$$P_{esc}(x)=\frac{1}{2w(2-q)}\left[1+\frac{(q-1)|x|}{w(2-q)}\right]^{\frac{q}{1-q}} \qquad (22)$$

Véase que $\lim_{q\to 1} P_{esc}(x)=\frac{1}{2w}e^{-\frac{|x|}{w}}$.

Distribución de Weibull Generalizada Ω=(0,∞). Las restricciones son:

$$1.\int_0^\infty p(x)dx=1,$$

$$2.\int_0^\infty x^\alpha P_{esc}(x)dx=g_1,$$

$$3.\int_0^\infty \ln_q(x)P_{esc}(x)dx=g_2, \quad 0<\alpha<1$$

con lo cual se obtiene:

$$p(x)=\frac{\alpha}{\lambda_{esc}}x^{\alpha-1}\left[1+\left(\frac{q-1}{2-q}\right)\frac{x^\alpha}{\lambda_{esc}}\right]^{\frac{1}{1-q}} \qquad (23)$$

$$P_{esc}(x)=\frac{\alpha\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)\left(\frac{q-1}{(2-q)\lambda_{esc}}\right)^{\frac{1+q(\alpha-1)}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{1+q(\alpha-1)}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{q-1}+q\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)-\frac{1}{\alpha}\right)}\times$$

$$\times\left[1+\left(\frac{q-1}{2-q}\right)\frac{x^\alpha}{\lambda_{esc}}\right]^{\frac{q}{1-q}} \qquad (24)$$

Siendo λ_{esc} un parámetro de escala. Se verifica que:

$\lim_{q\to 1} P_{esc}(x)=\frac{\alpha}{\lambda_{esc}}x^{\alpha-1}e^{-x^\alpha/\lambda_{esc}}$ la cual es la distribución "clásica" si tomamos $\lambda_{esc}=\lambda^\alpha$.

4 Aplicaciones

Ejemplo 1. En [11] Sotolongo y cols., siguen el formalismo antes expuesto (ecuación (11)) identificando la variable "x" con un volumen adimensional igual a la relación entre el volumen del cluster (V) y un volumen (V_m) característico de la distribución (por ejemplo el volumen que tiene las dimensiones lineales de una longitud característica de correlación), o sea, $v = V/V_m$. Tomando como restricciones la condición de normalización (multiplicador λ_0) y una especie de q-conservación de la masa:

$$\langle G_1\rangle_q=\frac{\int_0^\infty vp^q(v)dv}{\int_0^\infty p^q(v)dv}=1 \qquad (25)$$

se obtiene la función de distribución de los tamaños de cluster:

$$p(v)=\left[1-\frac{1-q}{2-q}v\right]^{\frac{1}{1-q}} \qquad (26)$$

que corresponde a una exponencial generalizada (ecuación (16) para $\mu=1$). Esta distribución ha sido utilizada también con éxito en la descripción del tamaño de fragmentos en el proceso de fragmentación. Se puede suponer, sobre la base de argumentos físicos simples, que el tiempo de relajación de un cluster está relacionado con el volumen (número de unidades relajantes) mediante:

$$\tau=v^{1/\alpha} \qquad (27)$$

donde 0<α<1 representa macroscópicamente la geometría "fractal" y la naturaleza dinámica de la relajación. Entonces a partir de aquí y siguiendo la línea de razonamiento típica en el estudio de la relajación, en donde la función de relajación es un promedio ponderado de caídas exponenciales tipo Debye, se obtiene la función de relajación macroscópica del sistema $\phi(t)$ y la función de respuesta $f(t)$ mediante:

$$\phi(t)=\int_0^\infty p(\tau)e^{-1/\tau}d\tau \qquad (28)$$

$$f(t)=-\frac{d\phi(t)}{dt} \qquad (29)$$

donde $p(\tau)$ estará dado por la ecuación (26) teniendo en cuenta (27). Al analizar los comportamientos asintóticos de $f(t)$ se obtiene que los exponentes del modelo (α,q) se pueden relacionar con los exponentes de las leyes de potencia experimentales de la relajación dieléctrica (m,n). Además se demuestra que la distribución obtenida en (26) pertenece al dominio de atracción de las distribuciones estables de Levy con parámetro:

$$\mu=\frac{2-q}{q-1} \quad . \qquad (30)$$

Ejemplo 2. En [12] se trata el mismo problema de la relajación dieléctrica y se obtienen los mismos resultados pero mediante la aplicación de la ecuación (11) directamente al problema de la relajación sin utilizar el enfoque tradicional de una promediación por caídas exponenciales tipo Debye. En este caso se obtiene la distribución de Weibull generalizada (ecuación (23)), usando las restricciones vistas allí. En este caso la variable "x" debe identificarse con el tiempo de espera macroscópico necesario para que el sistema efectúe un cambio de estado (θ) tal como se define en [13]. Para este problema se obtiene la función de relajación ϕ(t) como:

$$\phi(t)=\mathrm{P}(\theta>t)=\int_t^\infty p(t)dt=\left[1+\xi(At)^\alpha\right]^{-\frac{1}{\xi}} \qquad (31)$$

$$\xi=\frac{q-1}{2-q}\ ; \quad A\equiv\omega_p=\langle\theta^\alpha\rangle_q^{-1/\alpha} \qquad (32)$$

donde la escala A está directamente relacionada con la frecuencia del máximo de pérdidas (ω_p) de la función de respuesta y es dependiente del tipo de material y del parámetro de no extensividad de la entropía (q) a través de una distribución acompañante.

5 Conclusiones

Como puede apreciarse, las distribuciones "generalizadas", en el caso límite q→1, tienden a las distribuciones "clásicas" de la misma manera que la entropía de Tsallis tiende a la entropía BGS, lo cual añade un elemento de estabilidad para las distribuciones generalizadas obtenidas. En cada caso físico de interés donde sea posible la aplicación de la estadística no extensiva, hay que identificar los valores medios generalizados (q-valores medios) con el conocimiento de alguna propiedad y/u observable del sistema bajo estudio. Además en cada sistema, la variable adimensional "x" debe ser identificada con alguna magnitud física relacionada con la definición del "estado" del sistema.

En los ejemplos analizadas en la sección de Aplicaciones se muestra como se puede emplear el formalismo no extensivo en dos casos de interés relacionados entre sí acerca del estudio de la relajación dieléctrica en sistemas con respuesta dipolar. Esperamos que en trabajos futuros sea posible encontrar otras aplicaciones donde aparezcan algunas de estas distribuciones aquí obtenidas. Además es necesario añadir que el procedimiento seguido en este trabajo es posible aplicarlo a todas las distribuciones de la estadística matemática, las cuales no se obtienen aquí por razones obvias de espacio.

Referencias

1. E. T. Jaynes, "Information Theory and Statistical Mechanics", Phys. Rev. 106, pp. 620-630, (1957).
2. E. T. Jaynes, "Information Theory and Statistical Mechanics. II", Phys. Rev. 108, pp.171-190, (1957).
3. D. V. Gokhale, "Maximum Entropy Characterization of Some Distributions", In Statistical Distributions in Scientific Work, edited by Patil, Kotz and Ord., Boston, M.A. Reidel, vol. 3, pp. 299-304, (1975)
4. A. M. Kagan, Yu. V. Linnik, and C. R. Rao, "Characterization Problems in Mathematical Statistics" (J. Wiley and Sons, New York, 1973).
5. J. N. Kapur, "Maximum-Entropy Models in Science and Engineering" (Wiley Eastern Limited, New Delhi, 1989).
6. J. N. Kapur and H. K. Kesavan, "Entropy Optimization Principles with Applications" (Academic Press, New York, 1992).
7. C. Tsallis, "Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics" J. Stat. Phys., 52, pp. 479-487, (1988).
8. C. Tsallis, R. S. Mendes and A. R. Plastino, "The role of constraints within generalized nonextensive statistics" Physica A., 261, pp. 534-554, (1998).
9. S. Abe, "Why q-expectation values must be used in nonextensive statistical mechanics", Astrophys Space Sci., 305, pp. 241-245, (2006).
10. G. Kaniadakis, M. Lissia, A. M. Scarfone, "Deformed logarithms and entropies", Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 340 pp. 41-49, (2004).
11. F. Brouers and O. Sotolongo-Costa, "Universal relaxation functions in nonextensive systems", Europhys Lett. 62(6), pp 808, (2003).
12. F. Brouers, O. Sotolongo-Costa, A. González and J. Pirard, "Entropic origin of dielectric relaxation universalities in heterogeneous materials (polymers, glasses, aerogel catalysts)", Phys. Stat. Sol. (c) 10, pp. 3529-3531, (2005).
13. F.Brouers, O. Sotolongo-Costa, K. Weron, "Burr, Lévy, Tsallis" Physica A 344, pp. 409-416 (2004).