Rev. Cub. Física vol .26 No.2B (2009) p.257-262
ISSN: 0253-9268. Original paper

Revista Cubana de Física
Calle I No. 302 e/ 15 y 17
Vedado, La Habana. CP 10400
www.fisica.uh.cu/biblioteca/revcubfi/index.htm

Ondas cinemáticas regulares por piezas: análisis de las cadenas de Maslov I

José R. Talavera Hurtado

Facultad de Matemática, Universidad de La Habana, Cuba. talavera@matcom.uh.cu

Recibido el 12/12/08. Aprobado en versión final el09/07/2009.

Sumario. Estudiamos las condiciones de cadena de Maslov para las ondas cinemáticas regulares por piezas, con un enfoque analítico. Se demuestra que los órdenes de ruptura asociados a los puntos singulares permanecen constantes a lo largo de cada intervalo temporal estructurado. Luego de esto focalizamos nuestra atención en el estudio de los órdenes de ruptura no nulos de forma que los restantes resultados se restringen a tal área de estudio. Se demuestra entonces que las trayectorias singulares quedan restringidas a evolucionar en el tiempo a lo largo de segmentos de rectas características. Con esto, se realizan simplificaciones significativas en las cadenas de Maslov. Algunos desarrollos adicionales nos conducen a la conclusión de que las condiciones de cadena simplificadas se pueden resolver como dos sucesiones recursivas independientes de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. A todo lo largo del presente artículo la única hipótesis hecha sobre el flujo es que el mismo es una función entera de la densidad.

Abstract. An analytical study of the Maslov chain conditions for regular by pieces kinematics waves is performed. The constancy -along each one of the structured time intervals- of the rupture orders associated to the singular points is mathematically proved. Attention is then focused into the study of non-cero rupture orders and the remaining results are restricted to this area. The singular paths are then proved to be restricted to evolve in time along segments of characteristics lines. Significant simplifications are then performed into the Maslov chains. Some further developments lead to the conclusion that the simplified chain conditions can be solved as two independent iterative sequences of linear first order ordinary differential equations. Trough the totality of the present study the only assumption about the flux is that it is an entirely function of the density.

Palabras clave. Conservation laws fluid dynamics 47.10.ab, Kinematics deformation (rheology) 83.10 Bb, Optical Ray Tracing, 42.15 Dp, Perturbation theory applied to continuum mechanics 46.15 Pf. Distribution Theory 02.50 Ng.

1 Introducción

Son muy diversas las investigaciones, científicas y tecnológicas, donde surge la necesidad de estudiar ondas cinemáticas suaves por piezas[1]. Todos estos problemas guardan una profunda analogía mutua y pueden comprenderse partiendo de un único modelo físico sencillo[1]. Este nos conduce directamente a una ley de conservación integral[1]:

$$\oint_{\partial R} \Phi\left[\rho(t,x)\right]dt - \rho(t,x)dx = 0$$

Tal condición se cumple para toda región rectangular R del plano (t,x) -en dependencia del problema concreto puede interesarnos tan solo una parte del mismo- con bordes paralelos a dichos ejes. Aquí $\rho = \rho(t,x)$ es la densidad por unidad de longitud del "material[1] conservativo" que se propaga y $\Phi[\rho(t,x)]$ es el flujo del mismo por unidad de tiempo. El hecho de que el flujo dependa (directamente) tan solo de la densidad, es justamente lo que caracteriza a las ondas cinemáticas[1, 3] (dentro de otros procesos de propagación conservativos).

Consideremos una onda cinemática suave por piezas[1]

$\rho = \rho(t,x)$. El eje temporal –o la parte del mismo que nos interese según el caso concreto- se subdivide en una colección $\{I_\alpha\}$ de lapsos temporales estructurados[1] disjuntos y rampantes. Esto induce[1] de modo natural una partición del plano (t,x) -o de la parte correspondiente del mismo- en un conjunto de bandas $\{I_\alpha \times \mathbb{R}_x\}$. En cada una de tales bandas encontramos un conjunto (a lo sumo numerable) de trayectorias singulares[1] $\{x = \chi_{\alpha,\beta}(t); t \in I_\alpha\}$ sin puntos comunes entre si. A cada una de dichas trayectorias singulares le corresponde entonces una región de suavidad superior y otra inferior[1].

En las regiones donde la densidad varía suavemente, la función $\rho = \rho(t,x)$ satisface la EDP[1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Phi(\rho) = 0 \qquad (1)$$

donde $\Phi = \Phi(\rho)$ -el flujo por unidad de tiempo- es, en cada problema, una función conocida y suave de la densidad –por unidad de longitud-. La ecuación anterior se escribe fácilmente en forma cuasilineal y homogénea; lo que facilita su estudio por el método de las características[1-4]:

$$x - x_0 = (t - t_0)\Phi'[\rho(t_0, x_0)] \qquad (2)$$

es la recta característica que pasa por el punto (t_0, x_0) y a lo largo de la misma la densidad es constante[1]:

$$\rho(t,x) \equiv \rho(t_0, x_0) \qquad (3)$$

En cambio, el estudio global de las ondas cinemáticas suaves por piezas solo puede completarse apelando a la información adicional que podamos extraer de la ley de conservación integral (y en ocasiones, a información adicional de carácter físico). Luego, dichas ondas deben entenderse como soluciones generalizadas en sentido clásico[1] (o si se prefiere físico) de la EDP (1).

En todo lo que sigue –a menos que se indique explícitamente lo contrario- centraremos nuestra atención en un intervalo temporal estructurado I y una trayectoria singular $x = \chi(t)$ ($t \in I$).

Los puntos singulares[1] de los perfiles de onda tienen asociados un orden de ruptura[1] definido. Siendo $t_0 \in I$, se dice que el perfil de onda $\rho = \rho(t_0, x)$ tiene orden de ruptura N en el punto singular $x = \chi(t_0)$, si:

$$\frac{\partial^N \rho}{\partial x^N}(t_0, \chi(t_0) - 0) \neq \frac{\partial^N \rho}{\partial x^N}(t_0, \chi(t_0) + 0) \qquad (4)$$

y si además (en caso de ser $N \neq 0$):

$$\frac{\partial^m \rho}{\partial x^m}(t_0, \chi(t_0) - 0) = \frac{\partial^m \rho}{\partial x^m}(t_0, \chi(t_0) + 0) \qquad (5)$$

para $m = 0, \cdots, N-1$.

Como hemos dicho, conjuntamente con la trayectoria singular existen las regiones de suavidad superior e inferior S_χ^+ y S_χ^-. A estas se corresponden, respectivamente, las piezas suaves de la densidad[1] (provistas de sentido físico) $\rho^+(t,x)$ y $\rho^-(t,x)$. Combinando (1) con la ley de conservación integral[1] puede darse una demostración rigurosa[1] de la condición de Hugoniot:

$$\left[\rho^+(t,\chi(t)) - \rho^-(t,\chi(t))\right]\dot{\chi}(t) =$$
$$= \Phi[\rho^+(t,\chi(t))] - \Phi[\rho^-(t,\chi(t))] \quad (t \in I) \qquad (6)$$

El método de las características suele combinarse con la condición de Hugoniot para estudiar la propagación de ondas de choque en ejemplos concretos[3, 4], para dilucidar bajo que condiciones pueden formarse ondas de choque partiendo de condiciones iniciales suaves[1], etc. Por otra parte, cuando el perfil de onda tiene (al menos) un punto singular con orden de ruptura no nulo, la condición de Hugoniot (6) deja indeterminada la velocidad de traslación $d\chi(t)/dt$ de tal punto singular.

La aplicación del método de las cadenas de Maslov[5] requiere de suposiciones adicionales sobre el comportamiento de las piezas suaves de la densidad en la vecindad de la trayectoria singular; para destacar que cierta onda cinemática suave por piezas se aviene a tales hipótesis, decimos que la misma es regular por piezas[2].

Concretamente, se supone que para cada $t \in I$ fijo, la función $\rho^+(t,x)$ acepta un desarrollo en serie del tipo:

$$\rho^+(t,x) = \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^+(t)\left[x - \chi(t)\right]^s \qquad (7)$$

válido para $|x - \chi(t)| < \varepsilon^+(t)$, con $\varepsilon^+(t) > 0$ para todo $t \in I$. Los coeficientes de tal desarrollo vienen dados por[2]:

$$\rho_s^+(t) = \frac{1}{s!}\frac{\partial^s \rho^+}{\partial x^s}(t,\chi(t)) = \frac{1}{s!}\frac{\partial^s \rho}{\partial x^s}(t,\chi(t)+0) \qquad (8)$$

Similarmente, se supone que para cada $t \in I$ fijo, la función $\rho^-(t,x)$ acepta un desarrollo en serie del tipo:

$$\rho^-(t,x) = \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^-(t)\left[x - \chi(t)\right]^s \qquad (9)$$

válido para $|x - \chi(t)| < \varepsilon^-(t)$, con $\varepsilon^-(t) > 0$ para todo $t \in I$. Los coeficientes de tal desarrollo vienen dados por[2]:

$$\rho_s^-(t) = \frac{1}{s!}\frac{\partial^s \rho^-}{\partial x^s}(t,\chi(t)) = \frac{1}{s!}\frac{\partial^s \rho}{\partial x^s}(t,\chi(t)-0) \qquad (10)$$

Los desarrollos en serie (7) y (9) son conjuntamente válidos en la región $\{|x - \chi(t)| < \varepsilon(t); t \in I\}$ donde $\varepsilon(t) = \min\{\varepsilon^+(t), \varepsilon^-(t)\} > 0$ para todo $t \in I$. Claro está que los valores físicos de la densidad coinciden con (7) –con (9)- solo en la parte de esta región que queda contenida en la región de suavidad superior -inferior- correspondiente a la trayectoria singular.

Para flujos que sean funciones enteras de la densidad:

$$\Phi(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\rho^n \quad (\rho \in \mathbb{R}) \qquad (11)$$

las condiciones de cadena en forma standard quedan[2] (véase la aclaración al inicio de la próxima sección):

$$\overset{\bullet}{\chi}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}[\rho_0^{+}(t)]^{n-1-i}[\rho_0^{-}(t)]^{i} \qquad (12)$$

$$\frac{d\rho_s^{+}(t)}{dt}=(s+1)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\times$$
$$\times\left\{\rho_{s+1}^{+}(t)\sum_{i=0}^{n-1}[\rho_0^{+}(t)]^{n-1-i}[\rho_0^{-}(t)]^{i}+\right.$$
$$\left.-\sum_{|m|=s+1}\rho_{m_1}^{+}(t)\cdots\rho_{m_n}^{+}(t)\right\} \qquad (13)$$

$$\frac{d\rho_s^{-}(t)}{dt}=(s+1)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\times$$
$$\times\left\{\rho_{s+1}^{-}(t)\sum_{i=0}^{n-1}[\rho_0^{+}(t)]^{n-1-i}[\rho_0^{-}(t)]^{i}+\right.$$
$$\left.-\sum_{|m|=s+1}\rho_{m_1}^{-}(t)\cdots\rho_{m_n}^{-}(t)\right\} \qquad (14)$$

donde (13) y (14) son válidas para $s=0,1,\cdots,+\infty$.

En diversos problemas[5-7] las condiciones de cadena de Maslov han sido el punto de partida para encontrar buenas aproximaciones de las soluciones generalizadas correspondientes a distintas EDP no lineales, por métodos analíticos y numéricos (buscando truncamientos apropiados de las series y las cadenas).

El presente trabajo tiene un carácter relativamente general. Exploramos la vía analítica (sin el empleo de truncamientos) para tratar las condiciones de cadena, asociadas a las ondas cinemáticas regulares por piezas, dentro de la clase de los flujos que son funciones enteras de la densidad. No hacemos por tanto suposiciones adicionales a aquellas bajo la cuales tales condiciones de cadena fueron deducidas[2]. No obstante, el énfasis recae en el estudio de las rupturas de orden no nulo.

Comenzamos con una breve observación sobre la forma de escribir las condiciones de cadena, luego de lo cual revisamos y simplificamos las relaciones recursivas asociadas al salto de la solución en la vecindad (faja) de una trayectoria singular. Empleando dichas relaciones recursivas (ya simplificadas) para el salto de la solución, damos una demostración inductiva de un resultado de carácter general: el orden de ruptura asociado a un punto singular no cambia cuando el tiempo fluctúa dentro de un intervalo temporal estructurado.

Tiene gran importancia interpretar el orden de ruptura en términos de la diferencia entre los coeficientes de los desarrollos en serie (7) y (9). Esto incide tanto en el resultado general anterior, como en el desarrollo ulterior del trabajo, que se concentra en el estudio de las rupturas de orden no nulo.

Gracias a dicha interpretación la condición de cadena (12) se simplifica notoriamente. Así, su contenido nos expresa justamente que los puntos singulares con orden de ruptura no nulo se trasladan a lo largo de rectas características (2); los valores de la solución sobre una tal recta se sobreentienden de modo natural (apelando a la continuidad de ser necesario) y -de tal suerte- se demuestra que son constantes (3).

La interpretación aludida del orden de ruptura en términos de los coeficientes de los desarrollos en serie, nos permite también simplificar considerablemente las condiciones de cadena (13) y (14) para órdenes de ruptura no nulos. En consecuencia, ellas se separan en dos conjuntos de relaciones recursivas independientes (salvo en el primer paso $s=0$ que no ofrece dificultad alguna). A su vez cada una de estas cadenas admite solución recursiva. Para $s=0$ la solución resulta constante. Para $s=1$ se obtienen EDO de primer orden de las que ofrecemos soluciones explícitas. Para $s\geq 2$ reducimos las cadenas a secuencias recursivas de EDO lineales de primer orden.

2 Condiciones de cadena y relaciones recursivas: revisión preliminar

Tanto (13) como (14) pueden igualmente ser escritas[2] comenzando las sumas con $n=1$; expliquemos porque. La expresión $\sum_{i=0}^{n-1}[\rho_0^{+}(t)]^{n-1-i}[\rho_0^{-}(t)]^{i}$ proviene de la factorización -véase explicación de la ecuación (13) en la referencia [2] - :

$$[\rho_0^{+}(t)]^{n}-[\rho_0^{-}(t)]^{n}=$$
$$=\left[\rho_0^{+}(t)-\rho_0^{-}(t)\right]\sum_{i=0}^{n-1}[\rho_0^{+}(t)]^{n-1-i}[\rho_0^{-}(t)]^{i}$$

Por tanto:

$$\left.\sum_{i=0}^{n-1}[\rho_0^{+}(t)]^{n-1-i}[\rho_0^{-}(t)]^{i}\right|_{n=1}\equiv 1$$

Por otra parte:

$$\left.\sum_{|m|=s+1}\rho_{m_1}^{+}(t)\cdots\rho_{m_n}^{+}(t)\right|_{n=1}\equiv\rho_{s+1}^{+}(t)$$

Y de las dos últimas identidades se concluye inmediatamente que el sumando que correspondería a $n=1$ en (13) resulta ser nulo. Similarmente ocurre con (14).

Conclusión I: Resulta equivalente escribir las condiciones de cadena (13) y (14) comenzando las sumas con $n=1$ *o con* $n=2$*, pues los sumandos correspondientes a* $n=1$ *son idénticamente nulos.*

En el proceso para obtener las condiciones de cadena en forma standard necesitamos[2] resolver la indeterminación que aparece en la condición de Hugoniot (6) cuando el orden de ruptura es no nulo, estudiando el "salto de la solución" en la vecindad de la trayectoria singular:

$$\rho^{\pm}(t,x)=\rho^{+}(t,x)-\rho^{-}(t,x) \qquad (15)$$

En la región de validez común a los desarrollos (7) y

(9), dicho "salto" se desarrolla igualmente en serie:

$$\rho^{\pm}(t,x)=\sum_{s=0}^{\infty}\rho_s^{\pm}(t)\left[x-\chi(t)\right]^s \tag{16}$$

donde:

$$\rho_s^{\pm}(t)=\rho_s^{+}(t)-\rho_s^{-}(t) \tag{17}$$

Vinculada a (15) aparece la función auxiliar[2]:

$$F(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}[\rho^{+}(t,x)]^{n-1-i}[\rho^{-}(t,x)]^{i} \tag{18}$$

que admite el desarrollo:

$$F(t,x)=\sum_{s=0}^{\infty}F_s(t)\left[x-\chi(t)\right]^s \tag{19}$$

y, como es fácil notar:

$$F_0(t)=F(t,\chi(t))=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}[\rho_0^{+}(t)]^{n-1-i}[\rho_0^{-}(t)]^{i} \tag{20}$$

Además, los coeficientes de los desarrollos (16) y (19) satisfacen las relaciones recursivas[2]:

$$\frac{d\rho_s^{\pm}(t)}{dt}=(s+1)\frac{d\chi(t)}{dt}\rho_{s+1}^{\pm}(t)+$$

$$-(s+1)\sum_{j=0}^{s+1}\rho_{s+1-j}^{\pm}(t)F_j(t) \tag{21}$$

para $s=0,1,\cdots,+\infty$. Comparando (12) y (20):

$$\overset{\bullet}{\chi}(t)=F_0(t) \tag{22}$$

Sustituyendo (22) en (21) y agrupando:

$$\frac{d\rho_s^{\pm}(t)}{dt}=-(s+1)\sum_{j=1}^{s+1}\rho_{s+1-j}^{\pm}(t)F_j(t) \tag{23}$$

para $s=0,1,\cdots,+\infty$.

Conclusión II: Las relaciones recursivas (21) (asociadas al salto de la solución) pueden escribirse en la forma simplificada equivalente (23). Además, la condición de cadena (12) puede escribirse -en términos de la función auxiliar (18)- en la forma equivalente (22).

3 Constancia del orden de ruptura

Fijemos $t_0\in I$. Tomando $s=0$ en (23):

$$d\rho_0^{\pm}(t)\big/dt=-\rho_0^{\pm}(t)F_1(t)$$

De donde:

$$\rho_0^{\pm}(t)=\rho_0^{\pm}(t_0)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}F_1(\tau)d\tau\right\}\qquad(\forall\, t\in I)$$

Por lo que $\rho_0^{\pm}(t)$ no se anula en ningún punto del intervalo I, o bien, es idénticamente nula en I.

Supongamos que $\rho_0^{\pm}(t)\equiv 0$ ($t\in I$). Tomando $s=1$ en (23):

$$d\rho_1^{\pm}(t)\big/dt=-2\rho_1^{\pm}(t)F_1(t)$$

De donde:

$$\rho_1^{\pm}(t)=\rho_1^{\pm}(t_0)\exp\left\{-2\int_{t_0}^{t}F_1(\tau)d\tau\right\}\qquad(\forall\, t\in I)$$

Por lo que $\rho_1^{\pm}(t)$ no se anula en ningún punto del intervalo I, o bien, es idénticamente nula en I.

Supongamos que $\rho_0^{\pm}(t)\equiv\rho_1^{\pm}(t)\equiv 0$ ($t\in I$). Tomando $s=2$ en (23):

$$d\rho_2^{\pm}(t)\big/dt=-3\rho_2^{\pm}(t)F_1(t)$$

De donde:

$$\rho_2^{\pm}(t)=\rho_2^{\pm}(t_0)\exp\left\{-3\int_{t_0}^{t}F_1(\tau)d\tau\right\}\qquad(\forall\, t\in I)$$

Por lo que $\rho_2^{\pm}(t)$ no se anula en ningún punto del intervalo I, o bien, es idénticamente nula en I.

Continuando así, obtenemos la siguiente:

Conclusión III: La función $\rho_0^{\pm}(t)$ no se anula en ningún punto del intervalo I, o bien, es idénticamente nula en I. Si $\rho_0^{\pm}(t)\equiv\cdots\equiv\rho_{N-1}^{\pm}(t)\equiv 0$ ($t\in I$), entonces $\rho_N^{\pm}(t)$ no se anula en ningún punto del intervalo I, o bien, es idénticamente nula en I.

Supongamos que el perfil $\rho=\rho(t_0,x)$ tiene orden de ruptura N para $x=\chi(t_0)$. Entonces, usando (4) y (5):

$$\frac{\partial^N\rho}{\partial x^N}(t_0,\chi(t_0)-0)\neq\frac{\partial^N\rho}{\partial x^N}(t_0,\chi(t_0)+0) \tag{24}$$

y además (en caso de ser $N\neq 0$):

$$\frac{\partial^s\rho}{\partial x^s}(t_0,\chi(t_0)-0)=\frac{\partial^s\rho}{\partial x^s}(t_0,\chi(t_0)+0) \tag{25}$$

para $s=0,\cdots,N-1$. Y por (17), (8) y (10):

$$(s!)\,\rho_s^{\pm}(t)=\frac{\partial^s\rho}{\partial x^s}(t,\chi(t)+0)-\frac{\partial^s\rho}{\partial x^s}(t,\chi(t)-0)$$

Evaluemos la última expresión en $t=t_0\in I$. Aplicando (25) vemos que $\rho_s^{\pm}(t_0)=0$ para $s=0,\cdots,N-1$. Si en cambio aplicamos (26) vemos que $\rho_N^{\pm}(t_0)\neq 0$. Usando la *conclusión III*:

$$(s!)\,\rho_s^{\pm}(t)\equiv\frac{\partial^s\rho}{\partial x^s}(t,\chi(t)+0)-\frac{\partial^s\rho}{\partial x^s}(t,\chi(t)-0)\equiv 0$$ Para todo $t\in I$ y todo $s=0,\cdots,N-1$; además:

$$(N!)\,\rho_N^{\pm}(t)\equiv\frac{\partial^N\rho}{\partial x^N}(t,\chi(t)+0)-\frac{\partial^N\rho}{\partial x^N}(t,\chi(t)-0)\neq 0$$

Para todo $t\in I$. Luego el perfil $\rho=\rho(t,x)$ tiene orden de ruptura N en el punto $x=\chi(t)$ ($\forall\, t\in I$).

Conclusión IV: El orden de ruptura de un punto singular se mantiene invariable con el tiempo ($t\in I$); o sea, *no cambia cuando t varía dentro de un lapso temporal estructurado.*

4 Singularidades de orden no nulo: desplazamiento de las singularidades y simplificación de las cadenas

Para el caso de una trayectoria singular con orden de ruptura no nulo (ya sabemos que, cuando el tiempo varía dentro de un intervalo temporal estructurado, el orden de ruptura permanece constante) $\rho_0^+(t) \equiv \rho_0^-(t)$ y por tanto:

$$\sum_{i=0}^{n-1} [\rho_0^+(t)]^{n-1-i} [\rho_0^-(t)]^i \equiv n[\rho_0^+(t)]^{n-1} \qquad (26)$$

Luego, sustituyendo (26) en (12) y recordando (11):

$$\dot{\chi}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi^{(n)}(0)}{(n-1)!} [\rho_0^+(t)]^{n-1} = \Phi'\left[\rho_0^+(t)\right] \qquad (27)$$

Por otra parte es obvio que:

$$\sum_{|m|=s+1} \rho_{m_1}^+(t) \cdots \rho_{m_n}^+(t) = n\left[\rho_0^+(t)\right]^{n-1} \rho_{s+1}^+(t) +$$

$$+ \sum_{\substack{|m|=s+1 \\ 0 \le m_i \le s}} \rho_{m_1}^+(t) \cdots \rho_{m_n}^+(t) \qquad (28)$$

Luego, sustituyendo (26) y (28) en (13) y simplificando:

$$\frac{d\rho_s^+(t)}{dt} =$$

$$= -(s+1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!} \sum_{\substack{|m|=s+1 \\ 0 \le m_i \le s}} \rho_{m_1}^+(t) \cdots \rho_{m_n}^+(t) \qquad (29)$$

Como $\rho_0^+(t) \equiv \rho_0^-(t)$ ($t \in I$); se demuestra similarmente que, para rupturas de orden no nulo (14) queda:

$$\frac{d\rho_s^-(t)}{dt} =$$

$$= -(s+1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!} \sum_{\substack{|m|=s+1 \\ 0 \le m_i \le s}} \rho_{m_1}^-(t) \cdots \rho_{m_n}^-(t) \qquad (30)$$

Tanto (29) como (30) son válidas para todo $s \in \mathbb{N}$. En particular, para $s = 0$ ellas significan que:

$$\frac{d\rho_0^+(t)}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{d\rho_0^-(t)}{dt} = 0$$

Recordando que $\rho_0^+(t) \equiv \rho_0^-(t)$ se concluye que:

$$\rho_0^+(t) \equiv \rho_0^-(t) \equiv cte\ (= \rho_0) \qquad (31)$$

Y sustituyendo (31) en (27):

$$\dot{\chi}(t) \equiv \Phi'[\rho_0] = cte'$$

De donde, siendo $t_0 \in I$:

$$\chi(t) = \chi(t_0) + \Phi'[\rho_0](t - t_0) \qquad (32)$$

para todo $t \in I$. De (32) concluimos que la singularidad se traslada a lo largo de una recta característica (2). Además, de (31) vemos que, a lo largo de tal característica, la densidad queda definida de modo natural (por continuidad) y resulta constante (2). Con esto, la condición de cadena (12) queda resuelta.

Por su parte, las condiciones de cadena (13) y (14) se simplifican a la forma (29) y (30) respectivamente.

Conclusión V: Las singularidades con orden de ruptura no nulo se trasladan a lo largo de rectas características (32). A lo largo de tales trayectorias la densidad se define de modo natural por continuidad y resulta constante (31). En este caso –orden de ruptura no nulo- las condiciones de cadena se simplifican a la forma (29) y (30).

5 Singularidades de orden no nulo: solubilidad recursiva de las cadenas

Obsérvese que:

$$\sum_{\substack{|m|=2 \\ 0 \le m_i \le 1}} \rho_{m_1}^+(t) \cdots \rho_{m_n}^+(t) = \frac{n(n-1)}{2} \left[\rho_1^+(t)\right]^2 [\rho_0]^{n-2}$$

Tomando $s = 1$ en (30) y usando la identidad anterior:

$$\frac{d\rho_1^+(t)}{dt} = -\left[\rho_1^+(t)\right]^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Phi^{(n)}(0)}{(n-2)!} [\rho_0]^{n-2}$$

Es decir:

$$\frac{d\rho_1^+(t)}{dt} = -\left[\rho_1^+(t)\right]^2 \Phi''(\rho_0) \qquad (33)$$

Separando variables:

$$\rho_1^+(t) = \frac{\rho_1^+(t_0)}{1 + \rho_1^+(t_0)\Phi''(\rho_0)(t - t_0)} \qquad (34)$$

Si $\rho_1^+(t_0)\Phi''(\rho_0) \neq 0$ la solución tiene una asíntota vertical en $t = t_0 - \dfrac{1}{\rho_1^+(t_0)\Phi''(\rho_0)}$; de lo contrario la solución es idénticamente constante.

Estudiemos ahora (29) para $s \ge 2$. En este caso:

$$\sum_{\substack{|m|=s+1 \\ 0 \le m_i \le s}} \rho_{m_1}^+(t) \cdots \rho_{m_n}^+(t) =$$

$$= n(n-1)\rho_s^+(t)\rho_1^+(t)[\rho_0]^{n-2} +$$

$$+ \sum_{\substack{|m|=s+1 \\ 0 \le m_i \le s-1}} \rho_{m_1}^+(t) \cdots \rho_{m_n}^+(t)$$

Sustituyendo dicha identidad en (29):

$$\frac{d\rho_s^+(t)}{dt} = -(s+1)\rho_s^+(t)\rho_1^+(t) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Phi^{(n)}(0)}{(n-2)!} [\rho_0]^{n-2} +$$

$$-(s+1)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\sum_{\substack{|m|=s+1\\0\le m_i\le s-1}}\rho_{m_1}^{+}(t)\cdots\rho_{m_n}^{+}(t)$$

De donde obtenemos:

$$\frac{d\rho_s^{+}(t)}{dt}+(s+1)\Phi''(\rho_0)\rho_1^{+}(t)\rho_s^{+}(t)=$$

$$=-(s+1)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\sum_{\substack{|m|=s+1\\0\le m_i\le s-1}}\rho_{m_1}^{+}(t)\cdots\rho_{m_n}^{+}(t) \qquad (35)$$

válida para $s\ge 2$. Obsérvese que, para cada $s\ge 2$ fijo, en el miembro derecho de (35) solo aparecen las funciones $\rho_{\alpha}^{+}(t)$ con $\alpha=0,\cdots,s-1$. Pero ya conocemos las expresiones analíticas (31) y (34) de $\rho_0^{+}(t)$ y $\rho_1^{+}(t)$. Luego (35) constituye una sucesión de EDO lineales de primer orden que puede emplearse –al menos en principio- para hallar en forma recursiva las restantes funciones incógnitas $\left\{\rho_{\beta}^{+}(t):\beta=2,\cdots,+\infty\right\}$

Conclusión VI: Para singularidades con orden de ruptura no nulo, las condiciones de cadena (29) admiten solución analítica recursiva. Para $s=0$ la solución es constante y viene dada por (31). Para $s=1$ la solución viene dada por (34). Para $s\ge 2$ se necesita resolver en forma recursiva la sucesión de EDO lineales de primer orden (35).

El estudio de las condiciones de cadena (30) es completamente análogo. Ya en (31) vimos que $\rho_0^{-}(t)\equiv\rho_0$. Además, siguiendo la analogía:

$$\rho_1^{-}(t)=\frac{\rho_1^{-}(t_0)}{1+\rho_1^{-}(t_0)\Phi''(\rho_0)(t-t_0)} \qquad (36)$$

Y:

$$\frac{d\rho_s^{-}(t)}{dt}+(s+1)\Phi''(\rho_0)\rho_1^{-}(t)\rho_s^{-}(t)=$$

$$=-(s+1)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\sum_{\substack{|m|=s+1\\0\le m_i\le s-1}}\rho_{m_1}^{-}(t)\cdots\rho_{m_n}^{-}(t) \qquad (37)$$

para $s\ge 2$.

Conclusión VII: Para singularidades con orden de ruptura no nulo, las condiciones de cadena (30) admiten solución analítica recursiva. Para $s=0$ la solución es constante y viene dada por (31). Para $s=1$ la solución viene dada por (36). Para $s\ge 2$ se necesita resolver en forma recursiva la sucesión de EDO lineales de primer orden (37). Los procedimientos aludidos para resolver las condiciones de cadena (29) y (30) son análogos pero mutuamente independientes.

6 Conclusiones

Los desarrollos en serie centrados en una trayectoria singular (cualquiera) permiten estudiar las prolongaciones de las piezas suaves de la solución, operando conjuntamente con desarrollos formales de las mismas en una vecindad de tal curva. Las relaciones recursivas, que enlazan los coeficientes del desarrollo en serie de la diferencia entre tales piezas prolongadas de la solución, nos permitieron alcanzar el resultado de mayor generalidad dentro del presente trabajo: la constancia del orden de ruptura de cada punto singular a lo largo del intervalo temporal estructurado correspondiente.

Otro resultado a destacar es que las singularidades con orden de ruptura no nulo se propagan a lo largo de rectas características y que a lo largo de las mismas la densidad (redefinida por continuidad de ser necesario) resulta constante. Este es el punto de partida para la resolución recursiva de las condiciones de cadena. El resultado es totalmente natural (y provechoso) en el contexto del método de las características.

Resulta muy llamativo el hecho de que las condiciones de cadena (para órdenes de ruptura no nulos) puedan resolverse como dos secuencias iterativas independientes de EDO lineales de primer orden. Esto nos lleva a proponer un nuevo método de trabajo que puede potenciarse con el empleo de asistentes matemáticos “inteligentes”. No obstante, se hace evidente la necesidad de resolver ejemplos concretos, donde puedan estudiarse las regiones de convergencia de las series y la validez de las soluciones así obtenidas.

Referencias

1. J. R. Talavera, Ondas cinemáticas suaves por piezas: condiciones de Hugoniot. Rev. Cub. Física vol.24 No.2 (2007) p.154-160.
2. J. R. Talavera, Ondas cinemáticas regulares por piezas: obtención de las cadenas de Maslov. Rev. Cub. Física vol.24 No.2 (2007) p.148-153.
3. G. B. Whitham, Linear and Nonlinear Waves (John Wiley & Sons, 1974).
4. A.N. Tikhonov, A. B. Vasil´eva and A.G. Svesnikhov, Differential Equations (Springer, 1985).
5. V. P. Maslov, Propagation of a shock wave in a non viscous isentropic gas (VINITI 199-271, 1977).
6. V. G. Danylov and G. A. Omelyanov, Truncation of a chain Hugoniot-type conditions and its justification for the Hopf equation (Preprint ESI 502, Vienna, E. Schrödinger Inst. for Math Phys, 1997).
7. R. Ravindran and P. Prasad, A New Theory of Shock Dynamics I and II (Applied Math Letters, Vol.3, 1990).