

Ondas acústicas en un fluido viscoso y rotatorio; difracción en una ranura

José Marín Antuña^a, Javier Pardo Vega^b

a) Facultad de Física, Universidad de La Habana. marin@fisica.uh.cu†

b) Facultad de Física, Universidad de La Habana

†autor para la correspondencia

Recibido el 1/02/2009. Aprobado en versión final el 20/07/2009

Sumario. Se describe la obtención de una ecuación no clásica en derivadas parciales de séptimo orden para describir las oscilaciones pequeñas en un fluido viscoso, rotatorio y compresible. A partir de las relaciones de dispersión de las ondas planas en tal fluido se sacan conclusiones sobre las características físicas de la propagación de las ondas en ese medio. Para un caso particular de fluidos ideales rotatorios, se estudia la difracción de una onda estabilizada en una ranura sumergida en el fluido.

Abstract. We describe the deduction of a non-classical seventh order partial differential equation to describe small oscillations in a viscous rotating compressible fluid. Starting from the dispersion relations of plane waves in such a fluid we conclude the physical characteristics of the wave propagation in that fluid. For a particular case of ideal rotating fluids we study the diffraction of a steady-state wave in a slot in the fluid.

Palabras clave. Hydrodynamics, applied fluid mechanics, 47.85.Dh, Partial differential equations, 02.30.Jr, Diffraction acoustical, *43.20.Fn.

1 Introducción

En la Hidrodinámica ha aparecido en los últimos tiempos un creciente interés por el estudio de los fluidos rotatorios¹, asociados a los modelos de estrellas y otros cuerpos celestes, así como también a modelos del propio universo². En el artículo que aquí presentamos se hace un estudio físico matemático de ecuaciones no clásicas para la descripción de ondas de pequeña amplitud en fluidos rotatorios viscosos e ideales. La complejidad de las ecuaciones, que resultan ser ecuaciones en derivadas parciales de séptimo orden para los fluidos viscosos rotatorios compresibles y de cuarto orden para los ideales rotatorios compresibles, respectivamente, hace pensar inicialmente en dificultades insalvables para su solución analítica, o siquiera para el estudio de las propiedades

esenciales de las ondas en tales medios, que pueden abordarse a partir del estudio de las relaciones de dispersión.

Sin embargo, con la ayuda de operaciones matemáticas convenientemente aplicadas se logra estudiar los procesos de propagación de ondas en tales medios y describir adecuadamente incluso los procesos de difracción ante determinadas barreras. En el artículo presentamos un análisis de las relaciones de dispersión en fluidos viscosos rotatorios compresibles y un ejemplo de la difracción de Fraunhofer de una onda plana en una ranura sumergida en un fluido ideal rotatorio compresible. El tema tratado en este artículo tiene importancia en la actualidad, debido a la posibilidad de modelación de problemas relacionados con la física de las estrellas y del

cosmos. Algunas ideas para un desarrollo ulterior de esta línea se esbozan al final del trabajo.

2 Ecuación de las ondas acústicas

Consideremos un fluido viscoso y compresible rotando como un todo con velocidad angular constante $\alpha/2$ alrededor de un eje dado. El movimiento del fluido está referido a un sistema cartesiano de coordenadas (x_1, x_2, x_3) que rota junto con el fluido. El eje Ox_3 está dirigido a largo del eje de rotación, y se consideran pequeñas oscilaciones de la presión y la densidad alrededor de su valor de equilibrio cuando el fluido está en reposo, que representan las ondas acústicas.

Las ecuaciones que gobiernan los movimientos en tal fluido son:

La ecuación de Navier Stokes:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \bar{v} + \frac{1}{\rho} \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \bar{v}) + \bar{f} \quad (1)$$

La ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \quad (2)$$

La ecuación de estado:

$$p = p(\rho, s) \quad (3)$$

Considerando procesos isentrópicos, se puede obtener para la ecuación de continuidad la expresión

$$\frac{1}{c^2} \frac{dp}{dt} + \rho \nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad (4)$$

donde

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (5)$$

y c tiene el sentido físico de la velocidad del sonido en el fluido. Expresamos la presión y la densidad como la suma de su valor en ausencia de la onda sonora (p_0 y ρ_0), más las pequeñas perturbaciones (p' y ρ') debido a esta

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho'$$

con $p' \ll p_0$ y $\rho' \ll \rho_0$. Se tomarán como cantidades de primer orden de pequeñez a p' , ρ' y \bar{v} , y se despreciarán los términos de orden superior. Además, para poder despreciar el término no lineal en la ecuaciones de Navier-Stokes, se exige que la velocidad de las partículas del fluido en la onda sea mucho menor que la velocidad de fase de la onda.

Se obtiene el sistema de ecuaciones linealizadas que describen las oscilaciones pequeñas en el fluido viscoso rotatorio compresible:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{\alpha} \times \bar{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' - \frac{\eta}{\rho_0} \nabla^2 \bar{v} - \frac{1}{\rho_0} \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \bar{v}) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad (7)$$

En lo adelante se denotará a p' y ρ_0 como p y ρ para simplificar la notación.

Operando con estas ecuaciones se llega a la expresión

$$\frac{1}{c^2} \hat{O}^3 \frac{\partial p}{\partial t} - \hat{O}^2 \hat{N} \nabla^2 p + \frac{\alpha^2}{c^2} \hat{O} \frac{\partial p}{\partial t} - \alpha^2 \hat{N} \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} = 0 \quad (8)$$

donde los operadores que aquí aparecen son:

$$\hat{O} = \left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \right] \quad \text{y} \quad \hat{N} = \left[1 + \frac{1}{\rho c^2} \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial}{\partial t} \right] \quad (9)$$

La ecuación (8) también la satisface las pequeñas variaciones de la densidad.

3 Casos particulares

Como casos particulares de la ecuación (8) tenemos que, si consideramos un fluido ideal rotatorio, es decir, si despreciamos los coeficientes de viscosidad ($\xi=0$, $\eta=0$), (8) se reduce a

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p + \frac{\alpha^2}{c^2} p \right] - \alpha^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} = 0 \quad (10)$$

La cual coincide con la ecuación cuya deducción fue publicada en la referencia [1]. Como se aprecia, es una ecuación no clásica de cuarto orden en derivadas parciales que satisfacen tanto la presión dinámica del fluido, como las componentes de la velocidad de las partículas del fluido. Para fluidos viscosos no rotatorios ($\alpha=0$) la ecuación (8) se transforma en la ecuación

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial p}{\partial t} - M \nabla^2 p \right] - \nabla^2 p = 0 \quad (11)$$

donde M es el parámetro fundamental de viscosidad y lo definimos como

$$M = \frac{1}{\rho} \left(\xi + \frac{4\eta}{3} \right) \quad (12)$$

La ecuación (11) fue publicada por J. Marín y O. Sotolongo³. En el caso de un fluido ideal en ausencia de rotación ($\alpha=0$, $\xi=0$, $\eta=0$), (8) se transforma en la conocida ecuación de las ondas en un medio:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = 0 \quad (13)$$

como era de esperar.

4 Relaciones de dispersión

A fin de estudiar las características de la propagación de las ondas acústicas en un fluido viscoso rotatorio cuyos movimientos se describen mediante la ecuación (10), propongamos una solución en forma de una onda monocromática plana

$$p = \tilde{p} \exp \left[i(\vec{k} \cdot \vec{r}) - \omega t \right] \quad (14)$$

donde \vec{k} es el vector de onda, ω es la frecuencia y \tilde{p} es la amplitud.

La relación de dispersión que se obtiene es

$$\frac{\omega}{c^2}O^3 + ik^2O^2N + \omega\frac{\alpha^2}{c^2}O + i\alpha^2Nk^2\cos^2\theta = 0 \quad (15)$$

donde O y N se expresan por

$$O = \left[\frac{\eta}{\rho}k^2 - i\omega \right] \quad \text{y} \quad N = \left[1 - \frac{i\omega}{\rho c^2} \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \right]$$

Hemos llamado θ al ángulo que forma el vector de onda con el eje de rotación del fluido.

La ecuación (15) es una ecuación algebraica de tercer grado en k^2 por lo que tiene 6 raíces, tres de las cuales dan resultados sin sentido físico, pues en un medio viscoso la amplitud de la onda que se propaga no puede ser creciente, por lo que las desechamos. De esta manera tenemos tres modos posibles $k = k(\omega)$ de propagación de las ondas en el fluido viscoso rotatorio compresible. La ecuación (15) debe tratarse numéricamente porque su solución analítica es de difícil interpretación.

La relación de dispersión (15) contiene como casos particulares la relación de dispersión de fluido ideal rotatorio [1] y de un fluido viscoso sin rotación [3]. La rotación del fluido ejerce su mayor influencia en la propagación de la onda sonora para frecuencias del orden de velocidad angular de rotación y menores, y es despreciable cuando $\omega \gg \alpha$. Mientras que la viscosidad es despreciable para frecuencias tales que $\omega \ll \frac{\rho c^2}{\xi}$ y $\omega \ll \frac{\rho c^2}{\eta}$,

y su influencia es notable para frecuencias que cumplan $\omega \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \sim \rho c^2$ o $\omega \eta \sim \rho c^2$, y mayores.

La razón entre los parámetros del fluido, determinará su comportamiento cualitativo en la propagación de las ondas acústicas. El segundo coeficiente de viscosidad ξ es usualmente del mismo orden de magnitud que el coeficiente de viscosidad, lo cual se tendrá en cuenta para el análisis de la relación de dispersión. Entonces, puede suceder que $\frac{\alpha\eta}{\rho c^2} \ll 1$, $\frac{\alpha\eta}{\rho c^2} \sim 1$ o $\frac{\alpha\eta}{\rho c^2} \gg 1$. Sea τ el tiempo característico de propagación de la onda sonora y se define las magnitudes adimensionales $\kappa = kc\tau$ y $\gamma = \omega\tau$.

Para $\frac{\alpha\eta}{\rho c^2} \ll 1$ (Figuras 1 y 2) tenemos que para ondas con frecuencias tales que $\frac{\omega\eta}{\rho c^2} \sim 1$ o mayores, la rotación deja de ser importante, y predomina una de las relaciones $k = k(\omega)$ que tiene un comportamiento similar al de un fluido viscoso no rotatorio. En caso de frecuencias que cumplan $\omega/\alpha \gg 1$ y $\frac{\omega\eta}{\rho c^2} \ll 1$ tanto la rotación como la viscosidad son poco relevantes y prevalece una relación del tipo $k = \omega/c$. Si $\omega/\alpha > \cos\theta$ y ω/α no es mucho mayor que 1, impera una de las funciones $k = k(\omega)$ con las características de un fluido ideal rotatorio (las otras dos se amortiguan rápidamente).

Para $\frac{\alpha\eta}{\rho c^2} \ll 1$ (Figuras 1 y 2) tenemos que para ondas con frecuencias tales que $\frac{\omega\eta}{\rho c^2} \sim 1$ o mayores, la rotación deja de ser importante, y predomina una de las relaciones $k = k(\omega)$ que tiene un comportamiento similar al de un fluido viscoso no rotatorio. En caso de frecuencias que cumplan $\omega/\alpha \gg 1$ y $\frac{\omega\eta}{\rho c^2} \ll 1$ tanto la rotación como la viscosidad son poco relevantes y prevalece una relación del tipo $k = \omega/c$. Si $\omega/\alpha > \cos\theta$ y ω/α no es mucho mayor que 1, impera una de las funciones $k = k(\omega)$ con las características de un fluido ideal rotatorio (las otras dos se amortiguan rápidamente).

torio (las otras dos se amortiguan rápidamente).

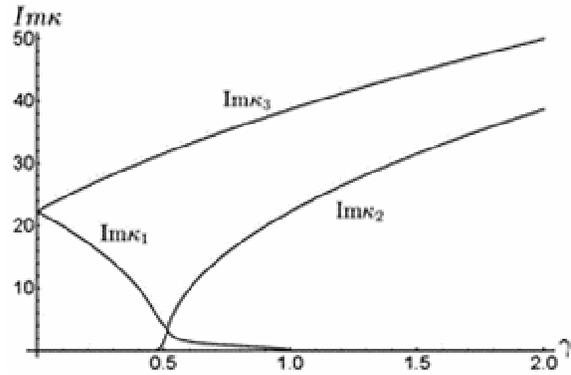


Figura 1. Parte real de los modos $k = k(\omega)$ para

$$\frac{1}{\rho c^2 \tau} \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) = 4 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{\eta}{\rho c^2 \tau} = 3 \cdot 10^{-3}, \quad \alpha\tau = 1 \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

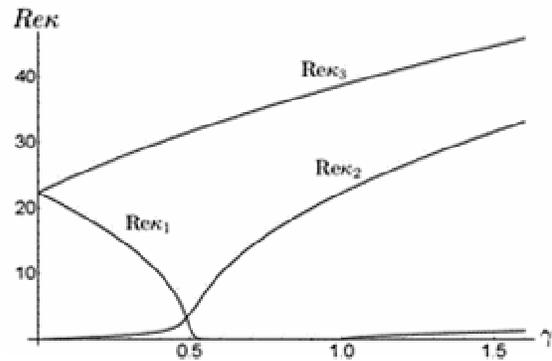


Figura 2. Parte imaginaria de los modos $k = k(\omega)$ para

$$\frac{1}{\rho c^2 \tau} \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) = 4 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{\eta}{\rho c^2 \tau} = 3 \cdot 10^{-3}, \quad \alpha\tau = 1 \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

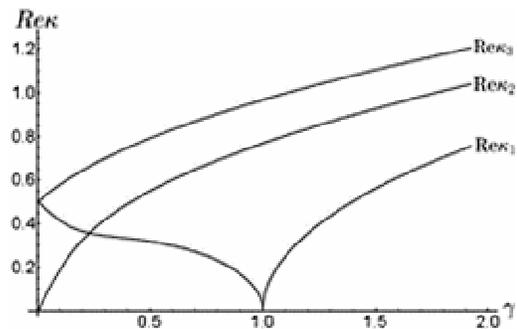


Figura 3. Relación de dispersión (parte real) para

$$\frac{1}{\rho c^2 \tau} \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) = 4/3, \quad \frac{\eta}{\rho c^2 \tau} = 1, \quad \alpha\tau = 1 \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

Para $\omega/\alpha \sim \cos\theta$, principalmente con $\omega/\alpha < \cos\theta$ la propagación de las ondas acústicas es distintiva de un fluido viscoso y rotatorio. En los fluidos ideales rotatorios se observa que para estas frecuencias la curva $k = k(\omega)$ presentaba una divergencia [1]. Pero esto no

ocurre aquí, porque incluso para viscosidad muy pequeña, esta ejerce una influencia notable en esta región de frecuencias. No puede existir esta divergencia porque ello implicaría gradientes demasiado pronunciados, lo cual es contrarrestado por la viscosidad. Por último, si $\omega/\alpha \ll \cos \theta$ prepondera una de las funciones $k = k(\omega)$ con las características de un fluido ideal rotatorio.

Cuando $\frac{\alpha\eta}{\rho c^2} \sim 1$ (Figuras 3 y 4) o $\frac{\alpha\eta}{\rho c^2} \gg 1$, resulta que para frecuencias que satisfacen la condición $\omega/\alpha \gg 1$, el medio se comporta como un fluido viscoso no rotatorio, aunque estas ondas se amortiguan rápidamente. Para frecuencias que cumplan $\frac{\omega\eta}{\rho c^2} \ll 1$ y $\omega/\alpha \ll \cos \theta$ la viscosidad no ejerce mucha influencia. Las ondas con las frecuencias restantes presentan el comportamiento propio de un fluido viscoso y rotatorio.

En general la onda sonora será una superposición de las tres relaciones $k = k(\omega)$.

5 Difracción de una onda plana en una ranura en un fluido ideal rotatorio

Como una aplicación sencilla de las ecuaciones estudiadas, proponemos el estudio de la difracción de una onda del tipo

$$u(\bar{x}, t) = \theta(t - x_1) e^{i(kx_1 - \alpha t)}$$

en donde $\theta(t)$ es la función de Heaviside de paso unitario que define un frente de onda que viaja de izquierda a derecha en el fluido rotatorio cuyos movimientos se describen por la ecuación (10). Aquí $u(x, t)$ tiene el sentido físico de la componente del vector de velocidad de las partículas del fluido en la dirección del eje Ox_1 , además se supone que $\omega > \alpha$. Coloquemos en el fluido una barrera $\Gamma_1 \Gamma_2$ que definen una ranura en ella de ancho l , como se muestra en la figura 4.

A fin de simplificar los cálculos consideraremos el estado estacionario de la onda, cuando $t \rightarrow \infty$. Es posible ver que en el régimen estabilizado que se obtiene la onda adopta la expresión estabilizada

$$u(\bar{x}, t) = u(\bar{x}) e^{i\alpha t} \quad (16)$$

y la ecuación (10) se convierte para este régimen estabilizado en

$$\nabla^2 u - \frac{\alpha^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\omega^2 - \alpha^2}{c^2} u = 0 \quad (17)$$

donde u es aquí la amplitud de las ondas estabilizadas.

La ecuación (17) permite un tratamiento sencillo mediante el cambio de variables siguiente:

$$x'_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\omega^2}} x_1, \quad x'_2 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\omega^2}} x_2, \quad x'_3 = x_3$$

Entonces la ecuación en las variables primadas adopta la forma de la siguiente ecuación de Helmholtz:

$$\nabla'^2 u + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0 \quad (18)$$

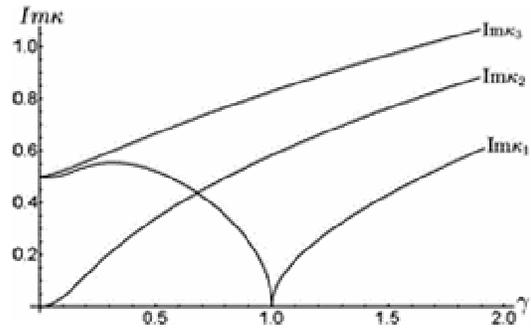


Figura 4 Relación de dispersión (parte imaginaria) con parámetros $\frac{1}{\rho c^2 \tau} \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) = 4/3$, $\frac{\eta}{\rho c^2 \tau} = 1$, $\alpha \tau = 1$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$

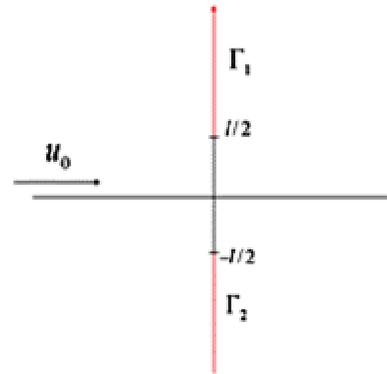
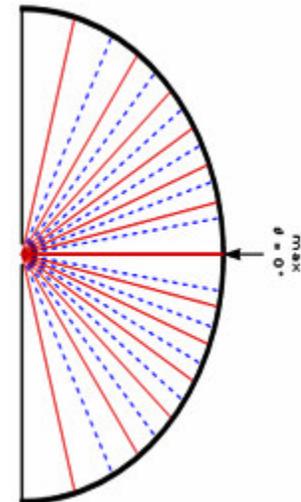


Figura 4. Ranura de ancho l en la pared $\Gamma_1 \Gamma_2$ sumergida en el fluido ideal rotatorio compresible.

Figura 5 Cuadro de difracción en la ranura de ancho l . Nótese el patrón en forma de elipse ►



En la ecuación (18) el laplaciano primado significa que las derivadas son calculadas con respecto a las variables x'_i con $i=1,2,3$. Un patrón típico de difracción dado por la solución del problema de difracción en la ranura puede verse en la figura 5.

Donde se aprecia que, a diferencia del cuadro de difracción en una ranura en un fluido no rotatorio, en el que se obtendría un cuadro de difracción esférico, aquí se obtiene un cuadro de difracción sobre una elipse detrás de la ranura, lo que se explica fácilmente por el cambio de variables realizado.

6 Conclusiones

En el tratamiento de los problemas de propagación de ondas en fluidos rotatorios nos enfrentamos a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no clásicas de cuarto y séptimo orden. Para determinadas geometrías y condiciones de régimen de ondas estabilizadas obtuvimos con facilidad el cuadro de difracción de tales ondas. En barreras de menor complejidad, tales como paredes simples sumergidas en el fluido hemos podido obtener los cuadros de difracción para etapas tempranas de la excitación de las ondas, bien lejos del estado estabilizado, lo que ha sido publicado en varios artículos anteriores⁶ y otros. En trabajos futuros incluiremos campos magnéticos en los procesos descritos por estas ecuaciones a fin de lograr un acercamiento mayor al tema de la modelación de estrellas.

Agradecimientos

Queremos agradecer a la Sociedad Cubana de Física y su revista la posibilidad de exponer estos resultados. Igual-

mente queremos agradecer a los colegas del Departamento de Física Teórica de la Facultad de Física de la Universidad de La Habana las interesantes discusiones sobre el tema durante las presentaciones del segundo autor de este trabajo en sus defensas de trabajo de curso y en la Jornada Científica Estudiantil de la carrera de Física.

Referencias

1. J. Marín-Antuña, R. L. Hall, N. Saad, *Physics Letters A* 362 (2007) 57.
2. Y. D. Chashechkin, *International Conference on Boundary and Interior Layers BAIL 2004*, Toulouse, France, July 2004.
3. J. Marín, O. Sotolongo, *RCF* 11, 1 (1991) 11.
4. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, second ed., Butterworth-Heinemann, 1987.
5. L. M. Brekhovskikh, V. Goncharov, *Mechanics of Continua and Wave Dynamics*, second ed., Springer Series on Wave Phenomena, Vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1994.
6. S. A. Gabov, J. Marín-Antuña. *Moscow Univ. News*, 3, 26 (1985).