

ACERCA DE LA ENSEÑANZA DEL MODELO ATÓMICO DE BOHR

E. Marín, Facultad de Física, Universidad de La Habana, Ciudad de La Habana, Cuba

RESUMEN

En el presente trabajo se presenta un enfoque alternativo para explicar el Modelo de Bohr, en el cual la condición de cuantización del momento angular es obtenida como consecuencia de aplicar el Principio de Correspondencia. Se pretende describir también cómo se puede extender dicho modelo, teniendo en cuenta consideraciones relativistas, para obtener las correcciones para el radio de las órbitas circulares y la energía de los electrones en ellas predichas por el modelo de Sommerfeld, e introducir el concepto de estructura fina. Presentaremos y discutiremos además, a nivel elemental, algunos ejemplos de fenómenos que ilustran cómo la teoría antigua de Bohr puede hacer una contribución importante a su comprensión.

ABSTRACT

In this paper we present an alternative approach for obtaining the mean results of the Bohr's model of the atom. The starting point in our analysis will be the Bohr's correspondence principle, and we will discuss how it predicts the angular momentum quantization rule. It is also our purpose here to show how relativistic corrections to the Bohr model of the atom can be easily obtained from our approach as well as the concept of fine structure. We will also provide and discuss at elementary level some examples of phenomena which can be used to illustrate that the old Bohr's theory can still make an important contribution to their understanding.

I. INTRODUCCIÓN

Pese a que su elegancia, relativa sencillez matemática y predicciones (principalmente con respecto a las líneas espectrales y las energías de ionización de átomos (ionizados) de un electrón o hidrogenoideos) hacen del Modelo atómico de Bohr un tema persistente en la mayoría de los cursos de Física Moderna, es bien conocido que el mismo es superado por la Mecánica Cuántica cuando se analizan sistemas multielectrónicos, incluyendo moléculas y sólidos. Por otra parte, el acelerado crecimiento del conocimiento científico que ha tenido lugar en los últimos años ha hecho necesaria la reformulación de los programas curriculares en las carreras de Ciencias e Ingeniería, donde se ha hecho necesaria la introducción de nuevos contenidos con la correspondiente reducción en el tratamiento de numerosos tópicos hasta ahora incluidos de manera reiterada. Los cursos de Física Moderna no son una excepción, y en particular, los temas correspondientes a los modelos clásicos y semiclásicos del átomo son candidatos potenciales a su eliminación o reducción debido a que sus principales resultados son explicados por las nuevas teorías. En este trabajo pretendemos mostrar algunos argumentos a favor de la necesidad de mantener el modelo de Bohr del átomo de un electrón en los cursos futuros de

Física y exponer algunos enfoques alternativos del tema que pueden ser utilizados en su enseñanza.

II. EL MODELO ATÓMICO DE BOHR

Lugar en los cursos de Física Moderna

En la mayoría de los cursos de Física Moderna [1-7] (precedidos invariablemente de los de Mecánica, Electromagnetismo, Óptica y Termodinámica), el Modelo Atómico de Bohr (N. Bohr, 1913 [8]) es generalmente presentado a continuación del Modelo Planetario debido a Rutherford, en el que tiene como precedentes fundamentales, en general, el estudio de los fundamentos de la Teoría Especial de la Relatividad (Einstein, 1905), el de la hipótesis de Planck (1901) acerca de la Cuantización de la Energía del Campo Electromagnético para describir el Espectro de Radiación Térmica del Cuerpo Negro, la presentación de los Postulados de Louis De Broglie (1924) y de las Relaciones de Indeterminación de Heisenberg (1926), pasando por los experimentos clásicos que demuestran la necesidad de nuevas teorías, como el del Efecto Fotoeléctrico, el Efecto Compton, los de Difracción de fotones y electrones por sólidos (Bragg, Laue, Davisson-Germer,..) y algunos más recientes relacionados con la interferencia de fotones, electrones y átomos. Después de presentar el Modelo de Bohr, la mayoría de los textos modernos pasan a presentar los fundamentos de

¹Actualmente en Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Legaria 694, Colonia Irrigación 11500, México D.F

E-mail: emarin@fisica.uh.cu, emarin63@yahoo.es

la mecánica cuántica ondulatoria de Schrödinger y su aplicación a la resolución de problemas sencillos como el movimiento de partículas sometidas a diversos tipos de campos de fuerza (como los que describen los pozos y barreras de potencial) con el objetivo de utilizar a continuación el modelo mecano-cuántico al estudio del átomo de un electrón, de sistemas más complejos como los átomos multielectrónicos, las moléculas y los sólidos, y de otros más sencillos, estructuralmente, como los núcleos atómicos. Algunos autores finalizan sus cursos con temas relacionados con la cosmología del universo en expansión [2-4, 6].

Enfoque más utilizado en su presentación

Aunque son bien conocidas para la mayoría de los lectores esbozaremos a continuación las principales ideas relacionadas con el Modelo de Bohr.

Postulados de Bohr

En los libros de texto citados arriba (presentamos solamente una selección de los más utilizados en la actualidad en diferentes universidades) se parte de algunos Postulados básicos para deducir las expresiones que permiten calcular la energía y el radio de las órbitas de Bohr. Estos postulados son:

- i. Los electrones solamente pueden encontrarse en órbitas discretas de energía E_n .
- ii. El movimiento de los electrones en estas órbitas tiene lugar sin emisión de energía. Solo se emite o absorbe energía al pasar el electrón de una órbita a otra y esta se emite o absorbe en forma de radiación electromagnética, es decir, de un fotón de energía $h\nu$ igual a la diferencia energética entre las órbitas $E_n - E_{n'}$.
- iii. El momento angular del electrón en la órbita n ésima es

$$|\vec{L}| = n \frac{h}{2\pi}, \quad (1)$$

donde h es la constante de Planck y n un número entero.

Veamos algunos antecedentes experimentales que justifican la necesidad de su imposición, y cómo son utilizados para explicarlos.

Series espectrales

La necesidad que tuvo Bohr de imponer las dos primeras condiciones puede ser justificada sobre la base de la Hipótesis de Planck en aras de evitar el "colapso" del Átomo de Rutherford (El modelo

nuclear del átomo desarrollado por Rutherford, y que explicaba los experimentos de dispersión de partículas cargadas por núcleos pesados, conducía a un átomo inestable debido a la radiación de energía de forma continua por el electrón acelerado en la órbita) y para justificar la existencia de espectros de energía discretos, para los cuales Balmer había encontrado hacia 1885 que las longitudes de onda, λ , de las líneas espectrales pueden expresarse mediante la fórmula:

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (2)$$

llamada **Fórmula de Balmer**, donde $n > 2$ es un número entero y $R_H = 109677.5810 \text{ cm}^{-1}$ es la llamada Constante de Rydberg en honor a quien generalizó en 1889 la expresión anterior a todo el espectro escribiéndola de la forma

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (3)$$

con $n' < n$, conocida como Fórmula de Rydberg para las Series Espectrales del Átomo de H, donde $R_H = 109677.5810 \text{ cm}^{-1}$. Para $n' = 2$ conduce a la Serie de Balmer, que se localiza en la región visible. Si $n' = 1$ la Serie se denomina de Lyman, y está en la región ultravioleta. $n' = 3$ se corresponde a la de Paschen y $n' = 4$ a la de Brackett (Estas últimas pertenecientes al infrarrojo).

Los espectros atómicos son diferentes para cada elemento, hecho que al ser descubierto dio origen a la rama de la Física conocida como espectroscopia atómica.

Deducción de la energía del electrón orbital en el átomo de Hidrógeno

En el Modelo de Bohr, atendiendo al primer postulado, se parte de igualar las fuerzas de Coulomb y Centrípeta que actúan sobre el electrón de masa m_0 en el átomo de Rutherford, suponiendo una órbita de radio r constante y en la cual la velocidad angular del electrón es ω , es decir,

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_0 r \omega^2, \quad (4)$$

donde e es la carga del electrón y ϵ la permitividad eléctrica del vacío. Por otra parte, la ley de conservación de la energía plantea que:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (5)$$

Hasta aquí todo se corresponde con el modelo de Rutherford. Sustituyendo (4) en (5) se obtiene

$$E = -\frac{e^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2(4\pi\epsilon_0)^{2/3}} (\epsilon^4 m_0 \omega^2)^{1/3} \quad (6)$$

Utilizando el Postulado (iii), es decir, la expresión (1), una condición empírica introducida para poder demostrar la validez de la Fórmula de Balmer, se obtienen entonces las expresiones para el radio de las órbitas electrónicas y la energía del electrón. Para la primera magnitud se tiene:

$$r_n = -\frac{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_0 e^2} \quad (7)$$

donde $\hbar = h/2\pi$. Para $n = 1$ se tiene $r_1 = a_0 = 0.529\text{Å}$, que es el radio de la primera órbita de Bohr, aquella que ocupa el electrón en su estado básico, y que es conocido como Radio de Bohr.

Por su parte, para la energía del electrón en la n -ésima órbita se obtiene

$$E_n = -\frac{1}{2(4\pi\epsilon_0)^{2/3}} \frac{(e^4 m_0 16\pi^2 R_\infty^2 c^2)^{1/3}}{n^2} \quad (8)$$

Para la órbita $n = 1$, $E_1 = -13.59\text{eV}$, y se conoce como **Energía de ionización**, aquella que es necesario suministrarle al átomo para ionizarlo, es decir, extraer al único electrón (Figura 1).

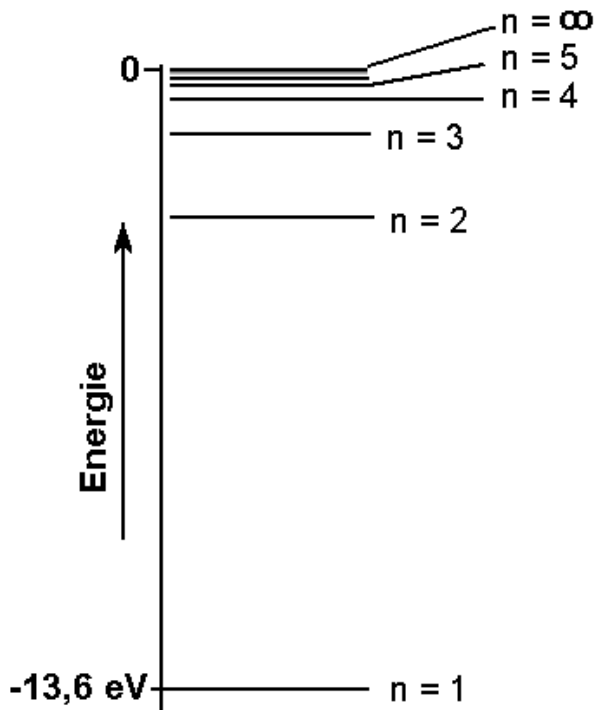


Figura 1. Niveles de energía del Hidrógeno según el modelo de Bohr.

Comparando esta ecuación con la fórmula de Rydberg (3), y utilizando el segundo Postulado (ii), se obtiene para la constante de Rydberg el valor

$$R_\infty = \frac{m_0 e^4}{8h^3 \epsilon_0^2 c} = 109737.318 \text{ cm}^{-1} \quad (9)$$

Este valor es ligeramente diferente del empírico para R_H , lo cual se debe a que en el razonamiento anterior se ha supuesto que el núcleo del átomo es mucho más pesado que el electrón orbital y que por ello está en reposo, es decir, no se ha tenido en cuenta el movimiento de ambas partículas alrededor del centro de masas del sistema que conduce a tener que sustituir m_0 por la masa reducida del sistema. En la Mecánica se demuestra que el movimiento de dos partículas de masas m_0 y M , separadas una distancia r tiene lugar alrededor de un centro de masas común. Si este centro está en reposo, la energía total de las dos partículas es igual a la de una partícula ficticia de masa reducida μ que se mueve a la distancia r del centro de masas:

$$\mu = \frac{m_0 M}{m_0 + M} \quad (10)$$

donde M es la masa del núcleo, en este caso el protón. Luego, puede demostrarse que en todos los resultados anteriores hay que sustituir m_0 por μ , obteniéndose:

$$R_H = R_\infty = \frac{1}{1 + \frac{m_0}{M}} \quad (11)$$

Este resultado permitió diferenciar espectroscópicamente al H ordinario de su isótopo más pesado, el Deuterio (a ambos isótopos los diferencia la presencia de un neutrón en el núcleo de este último). Además permitió determinar la razón entre las masas del protón y del electrón, $m_p/m_n \approx 1836.15$ toda vez que para el Hidrógeno $M = m_p$. Por supuesto que fue la demostración teórica de las fórmulas de Balmer y Rydberg.

Los resultados anteriores son extensibles a los llamados átomos hidrogenoideos, aquellos que solamente tienen un electrón, como los átomos ionizados de He^+ , Li^{++} , etc. Puede verse fácilmente que solamente es preciso hacer la sustitución

$$e^2 \rightarrow Ze^2 \quad (12)$$

en todas las expresiones anteriores.

III. UN ENFOQUE ALTERNATIVO

Pese a los éxitos del modelo, el tercer postulado, que expresa la Cuantización del Momento Angular, aunque puede interpretarse sobre la base del postulado de De Broglie (Louis De Broglie propuso hacia 1924 la relación $\lambda = h/mv$ para la longitud de onda asociada a una partícula de masa m moviéndose con velocidad v . Si la onda asociada a la partícula tiene que “entrar” en una órbita circular de radio r debe cumplirse que la longitud de la misma coincida con un múltiplo entero de longitudes de onda, es decir, $2\pi rn = nh/mv$, de donde se obtiene la condición de cuantización del momento angular, $L = mvr_n = nh/2\pi$), no tiene un fundamento histórico precedente en el momento en que Bohr desarrolló su modelo, lo que dificulta a veces su aceptación por parte del estudiante. Nótese, como planteamos antes, que el trabajo de Bohr fue desarrollado alrededor del 1913 mientras que De Broglie publicó sus ideas aproximadamente 10 años después. El mismo Bohr utilizó la cuantización del momento angular como condición **ad hoc** para reproducir la fórmula de Balmer en la primera parte de su famosa trilogía al respecto [8]. En los dos siguientes trabajos trató de buscar una justificación para la misma. Su tercera derivación, considerada la más profunda de todas [9], comienza estipulando la coincidencia asintótica, para grandes valores de n , entre la frecuencia clásica de revolución del electrón en la órbita y la frecuencia de la radiación emitida en el “salto” cuántico del electrón entre órbitas, lo que se conoce como su Principio de Correspondencia.

El principio de Correspondencia en el Modelo de Bohr

Este razonamiento es la base de un enfoque alternativo al presentado arriba para deducir las expresiones (6) y (7).

En esta formulación del problema se parte “solamente” de los dos primeros postulados, que escribiremos nuevamente:

- i. Los electrones solamente pueden encontrarse en órbitas discretas de energía E_n .
- ii. El movimiento de los electrones en estas órbitas tiene lugar sin emisión de Energía. Solo se emite o absorbe energía al pasar el electrón de una órbita a otra $n \rightarrow n'$. La energía se emite o absorbe en forma de radiación electromagnética, es decir, de un fotón de energía $h\nu$ igual a la diferencia energética entre las órbitas $E_n - E_{n'}$.

$$h\nu = E_n - E_{n'} \quad (13)$$

Si $E_n > E_{n'}$ el fotón es emitido mientras que si $E_n < E_{n'}$ el fotón es absorbido (Figura 2).

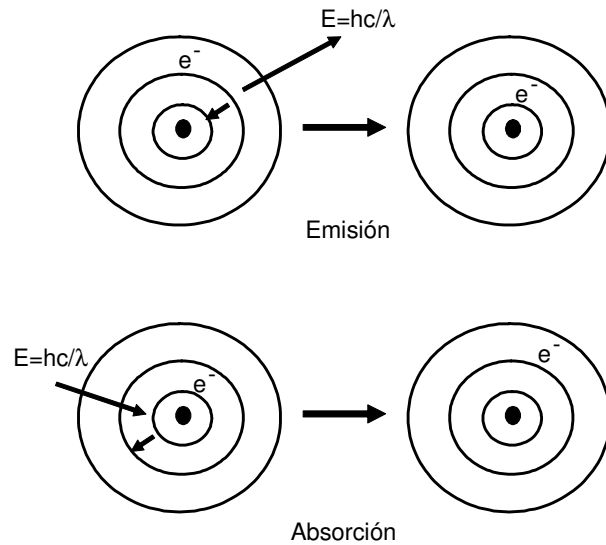


Figura 2. Procesos de emisión y absorción de la luz por un átomo.

Comparando esta expresión con la Fórmula de Rydberg (2) se obtiene:

$$E_n = - \frac{R_\infty hc}{n^2}, \quad E_{n'} = - \frac{R_\infty hc}{n'^2}, \quad (14)$$

Para calcular el valor de la constante R_∞ y compararla con R_H , se compara la frecuencia de revolución de los electrones en las órbitas con la de la radiación emitida o absorbida. En la física clásica estas frecuencias deben coincidir. La idea fundamental de Bohr fue que con el aumento de n las leyes de la física cuántica deben coincidir con las clásicas, que es, como hemos visto, la esencia de su Principio de Correspondencia.

Consideremos una transición electrónica entre órbitas vecinas ($n - n' = 1$):

Para ella:

$$\begin{aligned} \nu &= R_\infty c \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R_\infty c \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \\ &= \frac{R_\infty c}{n^2} \left(\frac{n^2}{(n-1)^2} - 1 \right) = \frac{R_\infty c}{n^2} \left(\frac{1}{(1-1/n)^2} - 1 \right) \quad (15) \end{aligned}$$

En el caso límite de n muy grande, o sea $x = 1/n$ muy pequeño, haciendo un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $x = 0$ al término $1/(1 - 1/n)^2 = 1/(1 - x)^2$ tenemos $1/(1 - x)^2 = 1 + 2x + \dots$, luego

$$v = \frac{R_\infty c}{h^2} \left[1 + \frac{2}{n} - 1 \right] = \frac{2R_\infty c}{n^3} \quad (16)$$

Sustituyendo $\omega = 2\pi v = 4\pi R_\infty c/n^3$ en la expresión para la energía (5) se obtiene

$$E_n = -\frac{1}{2(4\pi\epsilon_0)^{2/3}} \frac{(e^4 m_0 16\pi^2 R_\infty^2 c^2)^{1/3}}{n^2}, \quad (17)$$

que coincide con la ecuación (8).

Igualando a (14) se llega a

$$R_\infty = \frac{m_0 e^4}{8h^3 \epsilon_0^2 c} = 109737.318 \text{ cm}^{-1} \quad (18)$$

Igualando (14) a (6) y sustituyendo (18) se obtiene el radio orbital (7), que junto con (16) conduce para el momento angular del electrón que se mueve con velocidad v_n y con frecuencia angular ω_n sobre una órbita de radio r_n , a la Condición de Cuantización

$$|\vec{L}_n| = m_0 v_n r_n = m_0 r_n^2 \omega_n = n\hbar \quad (19)$$

La extensión a átomos hidrogenoideos se puede realizar de la misma manera expresada antes, es decir, haciendo los cambios expresados por (11) y (12).

Esta forma de presentar el problema constituye, en nuestro criterio, una variante útil para familiarizar a los estudiantes con las ideas fundamentales del principio de correspondencia, el cual es introducido en algunos cursos después de presentarse el modelo [1-7]. En la literatura consultada por el autor, un análisis similar al aquí presentado es realizado solamente por Haken y Wolf [10]. En las obras de Krane [2], Rohlf [4] y Eisberg & Resnick [1], estas ideas se discuten en ejemplos resueltos inmediatamente después de tratar el modelo, mientras que Halliday, Resnick & Walter [3], Beiser [5], Stierstadt [6] y Alonso & Finn [7] presentan el Principio de Correspondencia al discutir la aplicación del formalismo de la Mecánica Cuántica a casos sencillos como el movimiento de partículas en pozos de potencial infinitos. Una excelente discusión acerca de la historia de las primeras teorías de Bohr sobre la estructura atómica puede encontrarse en el artículo de Heilbron [10].

IV. APLICACIONES DEL MODELO DE BOHR

La mayoría de los cursos, aparte de ofrecer con el Modelo de Bohr una imagen intuitiva de cómo los electrones se mueven en el átomo, muestran varios ejemplos de aplicación y confirmación de la

Teoría. Entre otros podemos mencionar, sin seguir el orden lógico en que son o pueden ser enseñados:

- i. La Ley descubierta por Henry G. J. Moseley para describir los espectros característicos de Rayos X, es decir, el descubrimiento de que las líneas emitidas de mayor frecuencia satisfacen la ecuación $v = (3R/4)(Z-1)^2$, que puede ser derivada a partir del modelo de Bohr [1].
- ii. La descripción de los espectros de los metales alcalinos suponiendo que el movimiento del electrón óptico es "apantallado" por la carga del resto de los electrones e introduciendo el término llamado "defecto cuántico" o la "carga efectiva" en la expresión de la energía del electrón [10].
- iii. Los experimentos de J. Franck y G. Hertz, quienes en 1913, y aparentemente antes de los trabajos de Bohr, comprobaron la existencia de estados discretos de energía en el átomo en experimentos de colisión de electrones con átomos [1,7, 10].
- iv. La descripción de los niveles energéticos de los átomos muónicos [1, 10], descubiertos en la década del 50 del pasado siglo. El μ^- es una partícula elemental de carga $-e$ y masa 207 veces mayor que la del electrón. Este átomo se forma cuando un protón, u otro núcleo, capturan un muón antes de su posterior desintegración, tras haber sido producido, por ejemplo, mediante colisiones de neutrones con protones de alta energía (400MeV) (según esquemas como $p+n \rightarrow p+p+\pi^-$ y $\pi^- \rightarrow \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$).
- v. Algunas evidencias experimentales relacionadas con la interacción de los átomos con campos externos [1-7, 15], aunque en estos casos hay que considerar además algunos resultados de la teoría mecano-cuántica del átomo.

Limitaciones del modelo

Cuando se discuten estas cuestiones, no deben dejar de mencionarse las limitaciones de la teoría estudiada. El modelo de Bohr es incompleto. Solamente es aplicable, como hemos visto, en el caso de átomos que contienen un solo electrón, y no en el de sistemas multieletrónicos, pues no considera la fuerza que ejercen ellos entre sí. Si observamos con detenimiento el espectro de emisión del Hidrógeno vemos que muchas líneas están formadas por varias componentes. El modelo no es capaz de explicar la existencia de las mismas. Tampoco dice nada respecto de las intensidades de las líneas espectrales, es decir, acerca de la probabilidad de que una transición electrónica predomine sobre otra. Quizás la más

sería deficiencia del modelo radica en la violación que hace de las relaciones de indeterminación al determinar exactamente el valor del momento lineal y la posición del electrón en el átomo. Se puede argumentar en defensa de Bohr que su teoría precedió en una década la introducción de la mecánica ondulatoria y de las ideas relacionadas con la indeterminación, aunque estas son introducidas en la mayoría de los cursos antes de abordarse el tema de los modelos atómicos. Sin embargo, esto no puede ser causa de que deje de tratarse el modelo completamente en un curso de Física Moderna. Las aplicaciones que discutiremos a continuación son ejemplos que permiten afirmar lo anterior.

Aplicaciones:

i. Correcciones relativistas

Discutamos primeramente otro tópico interesante que no se aborda en los cursos tradicionales. Se trata de una manera relativamente simple de incluir correcciones relativistas en el modelo de Bohr [11] que conduce a resultados consistentes con los que se obtienen en el Modelo de Bohr-Sommerfeld para órbitas circulares. La brevedad de la deducción que presentaremos hace posible su inclusión en un curso estándar de Física Moderna a nivel universitario, teniendo en cuenta que el procedimiento seguido por Sommerfeld es largo y tedioso, por lo que muchos autores [1-8] simplemente se limitan a discutir sus resultados sin derivarlos. Hasta donde conocemos, solamente Alonso y Finn [7] parten de la expansión en serie de la relación energía-momento relativista para estimar el orden de magnitud de la corrección al valor de energía. Es nuestro propósito entonces, en lo que sigue, mostrar que es posible hacer correcciones relativistas en el modelo de Bohr sin tener que acudir al modelo de Sommerfeld o a la teoría cuántica relativista en un curso más avanzado de Mecánica Cuántica.

El punto de partida es la expresión relativista para la energía cinética que aparece en la expresión (5):

$$E_c = mc^2 - m_0c^2 \quad (20)$$

donde

$m = m_0[1 - \beta^2]^{-1/2}$ y $\beta = v/c$, v es la velocidad del electrón en la órbita y c la velocidad de la luz en el vacío.

El procedimiento es similar que el seguido en el caso no relativista en cualquiera de las dos formulaciones mostradas arriba. Comencemos eliminando, primero r , y después v , de las

ecuaciones (4) y (20) respectivamente. De esta manera se obtiene

$$v = \frac{Ze^2}{n\hbar} = \alpha \frac{Zc}{n}, \quad (21)$$

donde

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 1/137 \quad (22)$$

es la Constante de Estructura Fina.

y

$$r = \frac{\hbar n^2}{m_0\alpha Zc} \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{n^2 a_0}{Z} \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha Z}{n}\right)^2}, \quad (23)$$

con

$$r_1 = a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_0e^2} \quad (24)$$

es decir, el Radio de Bohr (Nótese que $r = r_n(1 - \beta^2)$ no expresa otra cosa que la Contracción Relativista de Lorentz –Fitzgerald del “radio propio” de la órbita. Todo estudiante que haya recibido un curso básico de relatividad especial conoce la expresión para la contracción de la longitud propia de un objeto moviéndose a velocidades cercanas a c).

En estas expresiones hemos introducido el número atómico Z para hacer extensible los resultados a otros átomos hidrogenoideos (estamos suponiendo que la masa nuclear es mucho mayor que la del electrón, aproximación que se hace más importante en la medida que Z aumenta, es decir, que los átomos de un electrón se hacen más pesados, pero introduce solamente pequeñas desviaciones en el caso de los más ligeros como el Hidrógeno. Tener en cuenta la masa reducida, lo que complica los cálculos, es innecesario para cumplir con el objetivo de nuestro análisis).

Sustituyendo las expresiones (20) a (24) en (5), y tras un procedimiento algebraico, obtenemos para la energía

$$E = m_0c^2 \left[\sqrt{1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2}} - 1 \right] \quad (25)$$

El parámetro $(\alpha Z/n)$ es mucho menor que 1, lo que permite hacer un desarrollo en serie de Taylor hasta el cuarto orden en la expresión anterior, lo cual conduce a:

$$E_n \approx -\frac{m_0 c^2}{2} \left(\frac{\alpha Z}{n}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha Z}{n}\right)^2 \right] \quad (26)$$

La teoría de Sommerfeld [12] conduce, por su parte, a

$$E_n \approx -\frac{m_0 c^2}{2} \left(\frac{\alpha Z}{n}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\alpha Z}{n}\right)^2 \left(\frac{n}{n_\phi} - \frac{3}{4}\right) \right] \quad (27)$$

con los números cuánticos radial y azimutal, n_r y n_ϕ relacionados mediante el número cuántico principal, n , a través de $n = n_r + n_\phi$. En el caso de órbitas circulares $n_r = 0$ y $n = n_\phi$, reduciéndose la Ecuación (27) a la (26). Similarmente puede demostrarse que la ecuación de Sommerfeld para la órbita elíptica

$$\frac{1}{r} = \frac{Z}{n_\phi^2 \Gamma^2 a_0} \left[1 + \frac{E}{m_0 c^2} \right] + A \cos(\Gamma \phi) \quad (28)$$

se reduce a la que encontramos para los radios permitidos de las órbitas circulares. En la ecuación anterior ϕ representa el ángulo azimutal, $\Gamma^2 = 1 - (\alpha Z/n_\phi)^2$ y A es una constante dependiente de la excentricidad de la órbita. En efecto, vemos que para órbitas circulares $A = 0$ y $n = n_\phi$, que sustituidos en (28) conduce a (24).

Aunque los cursos de Física General incluyen tradicionalmente algunas nociones básicas sobre Teoría Especial de la Relatividad, muy poco se discute sobre su combinación con el átomo de un electrón. Las razones de esto son evidentes: El análisis cuántico relativista no encuentra lugar en este tipo de cursos que, de acuerdo a [13], *...deben constituir una primera aproximación al contenido y aplicación de la Mecánica Cuántica, destacando primordialmente sus razones, postulados y operatividad para explicar autoconsistentemente estructura y procesos en el microcosmos, pero sin erigirse en un curso abreviado de dicha ciencia. ...y ...Los temas deben ser presentados de forma tal (en la Física General), que el aparato matemático utilizado no esconda el análisis físico correspondiente, brindando la base conceptual y fenomenológica que requiere la Física Teórica para la posterior matematización rigurosa de las mencionadas teorías.* Por otra parte, el Modelo de Sommerfeld, aparte de las cuestiones mencionadas anteriormente, presenta solamente un valor histórico-metodológico, por cuanto sus resultados más importantes se derivan de manera más natural y elegante resolviendo la ecuación de Schrödinger para el átomo de un electrón.

ii. Energía de ionización en átomos de dos electrones.

En un artículo reciente [14] se muestra cómo la teoría de Bohr puede ser aplicada en un modelo muy simplificado de un átomo de dos electrones para estimar sus energías de ionización con un error menor del 5% en la mayoría de los casos respecto del valor experimental (los estimados que se hacen en la mayoría de los cursos a partir del producto de dos funciones de onda para los estados 1s difieren en casi un 2%). En el modelo se considera que los dos electrones de cargas $-e$ se mueven en órbitas circulares y se encuentran en lugares opuestos, a ambos lados del núcleo de carga $+Ze$, ambos sobre una línea que incluye a este último (Figura 3).

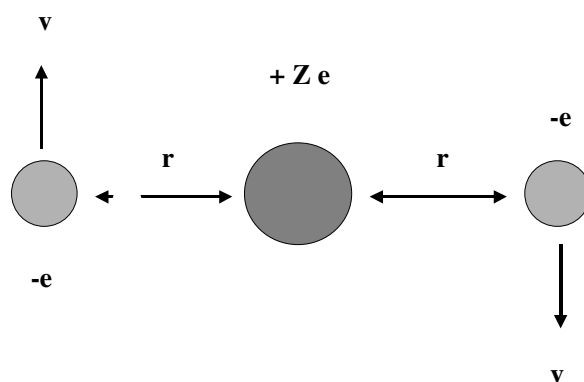


Figura 3. Dos electrones orbitan alrededor de un núcleo fijo.

Consideremos uno de los electrones. La fuerza neta de Coulomb que experimenta es debida a la suma de la fuerza de atracción hacia el núcleo y la repulsiva debida al otro electrón, que es fácil de demostrar que viene dada por:

$$F = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(Z - \frac{1}{4} \right) \quad (29)$$

Esta fuerza debe ser igual a la fuerza centrípeta $m_0 v^2/r$, pudiéndose determinar la dependencia de v^2 del radio orbital, r , la cual será de utilidad más adelante para calcular la energía cinética total del sistema $E_c = mv^2$ (estamos considerando el núcleo en reposo).

La energía potencial de la configuración mostrada en la Figura 3 agrupa dos contribuciones debidas a la interacción electrón-núcleo y una debida a la interacción electrón-electrón, y se expresa como:

$$E_p = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} - (4Z + 1) \quad (30)$$

Utilizando ahora la ecuación que describe la cuantización del momento angular para el estado básico $n = 1$ (estamos suponiendo que el átomo está en ese estado) puede demostrarse fácilmente que la Energía total del sistema, $E = E_c + E_p$ viene dada por:

$$E = -\frac{m_0 e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(2Z - \frac{1}{2}\right) \left(Z - \frac{1}{4}\right) \quad (31)$$

Nótese que utilizando esta expresión se obtiene, en el caso del He ($Z = 2$) el valor -83.3eV , mientras que el valor experimental es de -79eV , para una discrepancia de 5.4%. Para el Li ($Z = 3$) ionizado la discrepancia se reduce a 3.9% (-205.8 eV calculado por -198.1 eV experimental), disminuyendo para átomos más pesados [14], aunque para ellos la necesidad de introducir efectos relativistas se hace mayor. Bohr y sus contemporáneos deben haber realizado cálculos mucho más engorrosos tratando de hacer predicciones similares, teniendo en cuenta distribuciones de carga menos uniformes, movimiento del núcleo, efectos relativistas, etc, siendo para ellos el cálculo mostrado arriba un ejemplo trivial, pero que puede resultar un ejercicio interesante a realizar por los estudiantes y un recurso útil para hacer simples estimados de la energía de ionización de átomos más complejos (el tratamiento del ión molecular de H que se hace en la mayoría de los libros de texto no está lejos del análisis anterior).

iii. Átomos de Rydberg

Hay una aplicación del modelo que puede resultar muy interesante, y que si bien es mencionado recientemente por algunos autores [10], no se describe en la literatura más utilizada [1-7]. Se trata de átomos en los cuales un electrón es excitado a un nivel energético muy elevado y que

constituyen un ejemplo de la continuidad existente entre la Mecánica cuántica y la Física clásica expresada en el Principio de Correspondencia.

Los denominados Átomos de Rydberg tienen propiedades asombrosas: son extremadamente grandes, pudiendo tener radios del orden de 10^2mm , es decir, unas 100 mil veces el Radio de Bohr. Por otra parte, mientras el tiempo de vida de un electrón en un estado excitado de un átomo convencional es del orden de 10^{-8} s , los átomos de Rydberg pueden “vivir” algunos segundos. La causa radica en que para grandes valores de n , la separación energética entre dos estados consecutivos es muy pequeña, y según los resultados formulados primeramente por Einstein al analizar las características de la interacción de un campo de radiación electromagnética con un sistema atómico de dos niveles, la probabilidad de una transición espontánea es proporcional a la tercera potencia de la frecuencia de emisión [1]).

El electrón que se encuentra en el estado excitado se mueve prácticamente en el campo eléctrico del núcleo apantallado por el del resto de los electrones, es decir, en el campo debido a una carga e , exactamente igual a la del núcleo del átomo de Hidrógeno, de manera que se comporta como si perteneciera a un átomo de este elemento.

Semejantes átomos se han encontrado en nebulosas gaseosas, nubes de gases ionizados rarificados que rodean a algunas estrellas calientes, y cuyos espectros se han observado mediante radiotelescopios. La Figura 4 muestra el espectro medido en la Nebulosa de Orión A en el cual predomina la línea 109 α del Hidrógeno (transición $n = 110 \rightarrow n = 109$, $\Delta n = 1$). La emisión de radiación por otros átomos se observa también, por ejemplo en los picos correspondientes a las

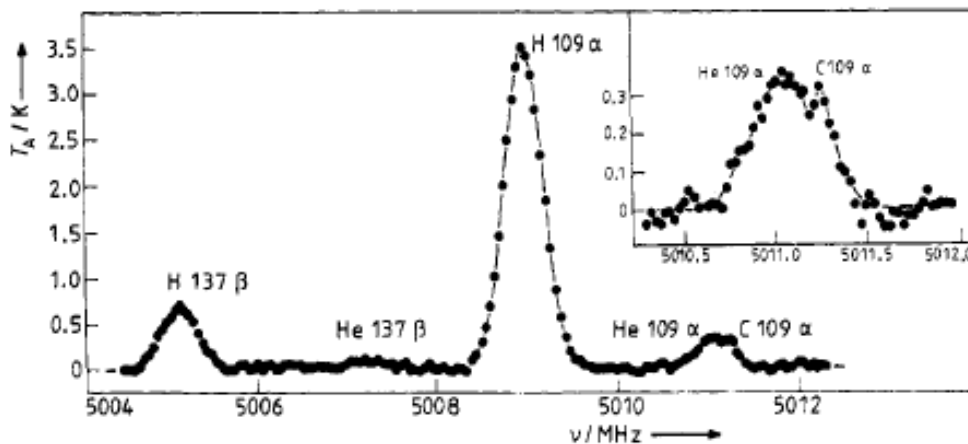


Figura 4. Parte del espectro de radiofrecuencia de Orion A observado por Churchwell y Mezger [14, 15]. La temperatura de la antena, T_A , es proporcional a la intensidad de cada línea, de frecuencia ν , relativa a la radiación de fondo. Transiciones donde $\Delta n=1, 2, 3, \dots$ se clasifican con $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

transiciones He 109α y C 109α . La separación entre ellas se debe al efecto de la masa reducida sobre el valor de la constante de Rydberg [15]. De acuerdo con el Principio de Correspondencia, en la región de números cuánticos muy grandes, la frecuencia orbital del electrón viene determinada por la Ecuación (16) si se cumple la condición $\Delta n = 1$. Por lo tanto, existe una “regla de selección” que debe satisfacerse cuando $n \rightarrow \infty$. Esta es una buena oportunidad para introducir en el curso el concepto de regla de selección para las transiciones permitidas en los sistemas cuánticos (normalmente se comienza a mencionar este concepto al describirse la interacción de átomos con campos externos). Como n es grande, la radiación emitida aparece en la región de microondas.

En laboratorios terrestres se han “fabricado” Átomos de Rydberg con números cuánticos entre 10 y 290 [16]. Para ello se produce un haz de átomos cuyos electrones son excitados de un nivel a otro, en cascada, hasta llegar a los niveles energéticos mencionados. Esto se hace utilizando láseres sintonizables, sobre todo láseres de colorante. La detección se hace ionizando los átomos de Rydberg con ayuda del campo eléctrico de un condensador e identificando los mismos según su carga en un detector apropiado.

iv. Niveles energéticos en semiconductores extrínsecos

Muchos cursos de Física Moderna [1,2] pasan del estudio del átomo al de aglomeraciones de estos, como es el caso de moléculas y sólidos, discutiendo en muchos casos la estructura de bandas de estos últimos, y clasificándolos en metales, aislantes y semiconductores. Estos, a su vez, son clasificados en semiconductores intrínsecos y extrínsecos, al estudiarse cómo sus propiedades eléctricas pueden ser influenciadas y controladas por pequeñas cantidades de impurezas y dejando para otros cursos la explicación de cómo esto puede ser realizado en la práctica y aplicado en diferentes dispositivos.

Al semiconductor puro se le denomina intrínseco, ya que su comportamiento está determinado por sus propiedades intrínsecas, mientras que se clasifica como semiconductor extrínseco o dopado a aquel cuyas propiedades varían debido a interferencia externa, por ejemplo introduciendo en ellos átomos de impurezas. Hay dos tipos fundamentales de semiconductores intrínsecos. En un semiconductor tipo n (conductividad por electrones), los átomos de impureza tienen un electrón de valencia de más, comparado con el del semiconductor intrínseco al cual dopa. Un ejemplo es el Ge dopado con Arsénico ($Z = 33$,

[Ge]4p³), un elemento del grupo V, cuyos átomos ocupan posiciones aleatorias en la red del Ge. El electrón que queda disponible después que se produce el enlace de un átomo de As con cuatro de Ge, está libre de moverse a través del cristal, determinando el tipo de conductividad. Dichos electrones ocupan niveles de energía ligeramente por debajo de la banda de conducción, pudiendo excitarse térmicamente en dicha banda sin dejar huecos en la de valencia. Como contribuyen con electrones, a estos átomos se les denomina donores.

El Modelo de Bohr permite estimar la energía de los niveles donores. Supongamos que el átomo de impureza está ligado al núcleo del átomo que lo cedió, y recordemos que la energía de un electrón en el estado básico del átomo de H es $E = -m_0e^4/8\epsilon_0^2h^2$. Esta debe ser la diferencia entre el nivel donador, ED y el fondo de la banda de conducción. Si sustituimos la constante dieléctrica por la del material y la masa del electrón por su masa efectiva (el electrón libre tiene una masa bien definida y cuando es acelerado en un campo eléctrico obedece las leyes de la mecánica newtoniana. Sin embargo, en el interior de la red cristalina, el electrón reacciona a la acción de un campo eléctrico con una masa efectiva que depende de la relación existente entre su energía y el número de onda en cada dirección cristalográfica, es decir, de la Relación de Dispersión) se obtiene una buena aproximación al valor experimental, que es 0.0127 eV para el ejemplo que nos ocupa [17]. A esta manera de encarar el problema se le denomina Aproximación de masa efectiva. Nótese que este valor es la mitad de la energía térmica a temperatura ambiente, lo cual quiere decir que a esa temperatura estos electrones son excitados a la banda de conducción.

De manera similar puede calcularse la energía de los llamados niveles aceptores en un semiconductor tipo p, en el cual los átomos de impureza tienen un electrón de valencia menos que los del material al cual dopan, como es el caso del Ge dopado con Galio ($Z = 31$, [Zn]4p¹). Durante el enlace quedan vacancias de electrones (huecos) en los átomos de Ge responsabilizados con la conducción, que ocupan niveles energéticos dentro del Gap del Ge cercanos a la banda de valencia llamados aceptores, porque hacia ellos pueden excitarse electrones desde esta banda creando huecos, pero sin colocar electrones en la banda de conducción.

v. Estados excitónicos en semiconductores

Cuando sobre un semiconductor se hace incidir luz de energía E mayor que el ancho de su banda prohibida, E_g , se producen pares electrón-hueco. Si los electrones y los huecos no interaccionaran,

entonces solamente serían absorbidos fotones de energía E . Sin embargo, la interacción coulombiana entre el electrón y el hueco puede reducir la energía del par y hacer que aparezcan líneas con energías menores que E_g en los espectros de absorción. Los estados ligados de los pares electrón-hueco se denominan excitones. Pueden imaginarse, pictóricamente, como un electrón y un hueco orbitando uno alrededor del otro, es decir, como un sistema similar al átomo de un electrón, capaz de moverse a través del material bajo la acción de algún campo de fuerzas. El cálculo de los estados energéticos de los excitones puede realizarse entonces de manera similar, en muchos aspectos, al de los estados de impurezas discutidos arriba, solo que hay que considerar también la masa efectiva de los huecos.

IV. CONCLUSIONES

Aunque el modelo de Bohr del átomo es bien conocido desde hace casi un siglo, es difícil concluir a partir de la lectura de muchos libros de texto que la teoría todavía es capaz de explicar fenómenos descubiertos recientemente. La teoría cuántica antigua, que combina la Mecánica Newtoniana y las hipótesis de cuantización introducidas por Bohr en su modelo, aunque con serias limitaciones, puede ser utilizada todavía

para describir muchos fenómenos físicos interesantes –correcciones relativistas y sus consecuencias, energía de niveles energéticos en diferentes sistemas-, aunque los detalles específicos de los mismos solamente sean explicados por una teoría más rigurosa, aunque menos intuitiva, como la Mecánica Cuántica. El presente trabajo pretende ser un aporte para sugerir a los Profesores de Física una manera de cómo explicar a los estudiantes, a un nivel elemental, de qué forma la Teoría de Bohr juega aún un papel muy importante en nuestro entendimiento de los fenómenos del micromundo. Por otra parte, nuestra intención con los ejemplos aquí descritos es argumentar a favor de la importancia de mantener el tratamiento del Modelo de Bóhr en los cursos de Física General.

AGRADECIMIENTOS

La escritura de este trabajo estuvo motivada por la Clase Metodológica que tuvo que impartir el autor como parte de los ejercicios de oposición en opción a la Categoría Principal de Profesor Auxiliar en la Facultad de Física de la Universidad de La Habana en 2004. El autor agradece a los miembros del Tribunal de Categorización y a los demás colegas presentes en su exposición por sus comentarios y observaciones.

REFERENCIAS

- [1] EISBERG, R. y R. RESNICK (1985): **Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei and Particles** (John Wiley and Sons: New York).
- [2] KRANE, K. (1983): **Modern Physics** (John Wiley and Sons: New York).
- [3] HALIDAY, D.; R. RESNICK y J. WALKER (2001): **Fundamentals of Physics: Extended** (John Wiley and Sons: New York).
- [4] ROHLF, J.W. (1994): **Modern Physics from α to Z^0** (John Wiley and Sons: New York).
- [5] BEISER, A. (1975): **Conceptos de Física Moderna** (Editorial Científico Técnica: La Habana).
- [6] STIERSTADT, K. (1989): **Physik der Materie** (VCH:Weinheim) (en alemán).
- [7] ALONSO, M. y E.J. FINN (1968): **Fundamental University Physics, III, Quantum and Statistical Physics** (Addison-Wesley Publishing Company).
- [8] Nos referimos a la famosa trilogía escrita por N. Bohr y publicada en 1913 “On the Constitution of Atoms and Molecules”, Partes I, II y III, en *Phil. Mag.* 26(151), 1-25; 153, 476-501 y 155, 857-875, respectivamente.
- [9] HEILBRON, J.L. (1985): **Physics Today**, october, 8-36.
- [10] HAKEN, H. y H.C. WOLF (2000): **The Physics of Atoms and Quanta: Introduction to Experiments and Theory** (Springer Verlag: Berlin Heidelberg).
- [11] KRAFT, D.W. (1974): **Am. J. of Phys.** 42, 837.

- [12] Aparece bien discutida, por ejemplo, en los textos: F. K. Richtmyer, E. H. Kennard y T. Lauritsen **Introduction of Modern Physics** (ER: Habana) 1967 y H. Semat **Física Atómica y Nuclear** (Aguilar: Madrid) 1971.
- [13] **Plan de Estudio C: Disciplina Física General**. Carrera: Licenciatura en Física. Curso regular diurno. Centro Rector: Universidad de La Habana. Ministerio de Educación Superior de la República de Cuba.
- [14] CAMERON REED, B. (2005): **Phys. Educ.** 40, 117.
- [15] CHURCHWELL, E. and P G. MEZGER (1970): **Astrophys. Lett.** 5, 227.
- [16] LATIMER, C.J. (1983): **Phys. Educ.**, 18, 86.
- [17] SOLYMAR, L. and D. WALSH (1995): **Lectures on the Electrical Properties of Materials** (Oxford University Press: NY).