

BITS CUÁNTICOS EN UN CIRCUITO LC CON CARGA DISCRETA

QUANTUM BITS IN A LC CIRCUIT WITH DISCRETE CHARGE

M. CALCINA NOGALES^{a,b,†}

^aDepartamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Tarapacá,
Casilla 7-D, Arica, Chile

^bInstituto de Alta Investigación, Universidad de Tarapacá,
Casilla 7-D, Arica, Chile

(Recibido 26 de Febrero de 2014; aceptado 29 de Abril de 2014)

RESUMEN

Se propone un circuito LC con carga eléctrica discreta como sistema alternativo para la realización de un bit cuántico. Considerando la energía de una fuente oscilatoria como perturbación, se da una descripción de la manipulación de un bit cuántico a través de las oscilaciones de Rabi. A diferencia de las oscilaciones de Rabi estándar, se demuestra que la frecuencia de Rabi tiene una dependencia con el parámetro mesoscópico C/L .

Código(s) PACS: 85.85.+j — 03.67.-a — 73.23.-b

Descriptores: Sistemas nano-electromecánicos — Información cuántica (qubits) — Transporte electrónico (en sistemas mesoscópicos)

ABSTRACT

We propose an LC circuit with discrete electric charge as an alternative system for the realization of a quantum bit. Considering the energy of an oscillatory source as a perturbative term, we describe the manipulation of such quantum bit by means of Rabi oscillations. Unlike the standard Rabi oscillations, we show that the Rabi frequency depends on the mesoscopic parameter C/L .

Subject headings: Nano-electromechanical systems — Quantum information (qubits) — Electronic transport (in mesoscopic systems)

1. INTRODUCCIÓN

La teoría mesoscópica y nanofísica son hoy en día importantes áreas de investigación gracias a sus diversas aplicaciones en nanotecnología (Imry 1997; Datta 2005, 1995). Dichos campos contemplan dispositivos tales como: puntos cuánticos, alambres cuánticos, resonadores electrónicos, corriente persistentes en anillos metálicos, etc. (Imry 1997; Datta 2005, 1995; Heiss 2005; de los Santos 2005; Gardner *et al.* 2001). En particular, muchos de estos sistemas pueden ser modelados y estudiados a través de los llamados circuitos cuánticos mesoscópicos (Li & Chen 1996), los cuales tienen como característica sustancial contemplar en su teoría la naturaleza discreta de la carga eléctrica. Fenómenos tales como bloqueo de Coulomb (Chen *et al.* 2005), corrientes persistentes (Li & Chen 1996), magnificación en la corriente cuántica (Flores *et al.* 2002) han sido estudiados dentro de este contexto.

El presente trabajo, muestra una nueva aplicación de la teoría de circuitos cuánticos a la computación cuántica (Nielsen & Chuang 2000). La computación

cuántica ha prometido ventajas importantes desde el punto de vista de la realización de tareas computacionales en tiempos menores que cualquier ordenador convencional. Existen varios sistemas propuestos y ampliamente estudiados como candidatos para construir bits cuánticos (qubits) (Nakahara & Ohmi 2008). En el contexto estándar, una computadora clásica de un bit es una máquina que toma una entrada de 0 o 1, y calcula la correspondiente salida $f(0)$ o $f(1)$ evaluando la función f dos veces. Por otro lado, una computadora cuántica de un bit puede tomar la superposición de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$, como entrada, y debido a la linealidad de la mecánica cuántica la salida será la superposición $F(|0\rangle+|1\rangle)$, es decir, llevo a cabo dos cálculos en un solo paso (Heiss 2005).

En el presente trabajo, tratamos un candidato para la construcción de un bit cuántico (qubit), el cual es básicamente un circuito LC mesoscópico con carga discreta y con dos estados energéticos. Daremos una breve descripción del sistema LC y plantaremos las características necesarias para la construcción del bit cuántico. Asimismo, daremos la descripción de la manipulación de estos estados a través de las oscila-

[†]marcelmcn@gmail.com

ciones de Rabi.

2. CIRCUITO LC CON CARGA DISCRETA: CONSTRUCCIÓN DE UN SISTEMA DE DOS ESTADOS (QUBIT)

La manera más simple de construir un qubit es a través del uso de un sistema cuántico que actúe solamente entre dos niveles energéticos, por ejemplo, los estados fundamental y primer estado excitado de un circuito LC de carga continua. Sin embargo, en este sistema todas las transiciones entre estados vecinos son degenerados como resultado de la forma parabólica del potencial. Ello hace que cualquier intento de producir oscilaciones de Rabi, necesarias para la manipulación de estados cuánticos, originaría transiciones entre niveles superiores (le Bellac 2005) (participación de más de dos estados). De esta manera, la energía de transición entre los estados fundamental y primer estado excitado debe ser suficientemente diferente con la energía de las transiciones entre niveles superiores (Devoret *et al.* 2004), ello con el fin de que al sistema le sea menos accesible dichos niveles energéticamente altos y así reducir el sistema n -dimensional a uno de dos niveles. Para lograr esta diferencia se debe introducir efectos no lineales, en nuestro caso, estos efectos son logrados a partir de la introducción de un inductor de carga discreta, la cual, como se verá, deberá originar un espectro no lineal. A continuación, damos la descripción del completo set de estados del sistema LC de carga discreta.

Acorde a la cuantización estándar, obtenemos un hamiltoniano clásico en función de las variables conjugadas q (carga) y ϕ (flujo), luego, se asocia a cada una de estas variables clásicas un operador hermítico y el hamiltoniano cuántico correspondiente al sistema LC con carga discreta (Li & Chen 1996) es:

$$\hat{H} = \frac{\hat{q}^2}{2C} + \frac{2\hbar^2}{Lq_e^2} \sin^2\left(\frac{q_e}{2\hbar}\hat{\phi}\right), \quad (1)$$

donde C es la capacitancia del condensador, L la inductancia del solenoide. Los operadores carga \hat{q} y flujo $\hat{\phi}$ satisfacen la regla de conmutación $[\hat{q}, \hat{\phi}] = i\hbar$. Naturalmente, el primer término del lado derecho de la Ec. (1) hace referencia a la energía del capacitor y el segundo término a la energía del inductor. Notemos que en el límite $q_e \rightarrow 0$, la Ec. (1) se reduce al hamiltoniano usual de un circuito LC con carga continua.

Es posible reducir la ecuación de Schrödinger, para el hamiltoniano de la Ec. (1), a una forma de ecuación de Mathieu (Li & Chen 1996) cuya solución es ampliamente conocida. Las funciones de onda del sistema son:

$$\begin{aligned} \psi_{2r}(\phi) &= \text{ce}_{2r}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{q_e}{2\hbar}\phi, \xi\right) \quad \text{y} \\ \psi_{2r+2}(\phi) &= \text{se}_{2r+2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{q_e}{2\hbar}\phi, \xi\right), \end{aligned} \quad (2)$$

donde se ha tomado las soluciones de orden par debido a la periodicidad π de la función de onda

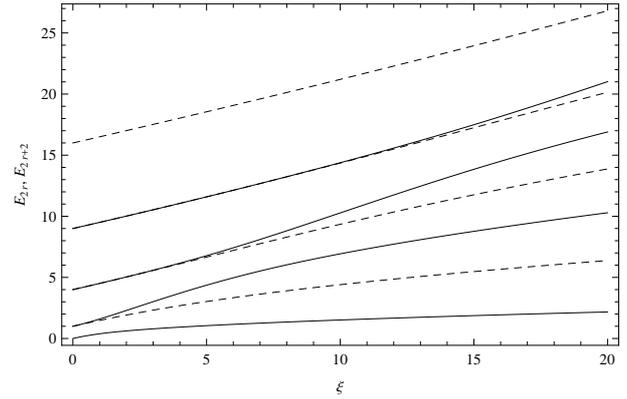


FIG. 1.— Espectro de energía como función de ξ . Las curvas sólidas y segmentadas corresponden a E_{2r} y E_{2r+2} respectivamente.

en el espacio $q_e\phi/2\hbar$. En este caso $r = 0, 1, 2, \dots$, $\xi = (2\hbar/q_e^2)^2(C/L)$, $\text{ce}(z, \xi)$ y $\text{se}(z, \xi)$ son las funciones periódicas de Mathieu. El espectro de energía se expresa en términos de los valores a_{2r} and b_{2r+2} de la ecuación de Mathieu (McLachlan 1964; Abramowitz & Stegun 1970), dicho espectro es:

$$\begin{aligned} E_{2r} &= \frac{q_e^2}{8C} a_{2r}(\xi) + \frac{\hbar^2}{q_e^2 L} \quad \text{y} \\ E_{2r+2} &= \frac{q_e^2}{8C} b_{2r+2}(\xi) + \frac{\hbar^2}{q_e^2 L}. \end{aligned} \quad (3)$$

La figura 1 muestra el espectro del sistema $E(\xi)$ como función del parámetro ξ . Naturalmente, es posible colocar al sistema en un régimen capacitivo o inductivo dependiendo del valor del parámetro. Cabe mencionar que este espectro es altamente no lineal y muy diferente al de un circuito LC de carga continua.

Ahora para construir un qubit, truncamos el espacio de Hilbert y nos quedamos con los dos primeros estados. Desde un punto de vista físico, el sistema puede adoptar cualquier estado del espacio de Hilbert multidimensional ($r = 1, 2, \dots$). Sin embargo, notemos que la diferencia entre niveles contiguos de energía se hace aun más grande para niveles superiores de energía (Fig. 1). Esto es en un sentido muy conveniente, pues garantizamos que al sistema le sea menos accesible dichos niveles superiores, es decir, el sistema necesitará de energías aun más grandes para acceder a ellos. Naturalmente, esto es logrado siempre y cuando se mantengan las condiciones experimentales necesarias de mantener al sistema en órdenes de energía equivalentes a los primeros estados energéticos.

Las fluctuaciones térmicas pueden ser también una fuente de decoherencia¹ y el sistema podría adoptar otros estados cuánticos diferentes a los dos primeros estados $|0\rangle$ y $|2\rangle$, es por ello que se supone que las temperaturas son cercanas a cero satisfaciendo $k_B T \ll \hbar\omega'(\xi)$, donde $\hbar\omega' = E_2(\xi) - E_0(\xi)$ está asociado con la diferencia de energía del primer estado excitado y el fundamental.

¹ La decoherencia, relacionada con la interacción del sistema cuántico con su entorno inmediato, originaria pérdida del carácter cuántico del sistema (Schlosshauer 2007).

Asumiendo lo previo, el espacio de Hilbert infinito puede ser reducido a aquel generando por los vectores $|0\rangle$ y $|2\rangle$ (bit cuántico). Luego tenemos que:

$$|\psi\rangle = Ae^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle + Be^{-iE_2t/\hbar}|2\rangle, \quad (4)$$

donde A y B son constantes de normalización,

$$|0\rangle \Leftrightarrow \sqrt{\frac{q_e}{2\pi\hbar}} \text{ce}_0 \left(\xi, \frac{\pi}{2} - \frac{q_e}{2\hbar}\phi \right)$$

con autovalor:

$$E_0 = \frac{q_e^2}{8C} a_0(\xi) + \frac{\hbar^2}{q_e^2 L}$$

y

$$|2\rangle \Leftrightarrow \sqrt{\frac{q_e}{2\pi\hbar}} \text{se}_0 \left(\xi, \frac{\pi}{2} - \frac{q_e}{2\hbar}\phi \right)$$

con autovalor:

$$E_2 = \frac{q_e^2}{8C} b_2(\xi) + \frac{\hbar^2}{q_e^2 L}.$$

3. MANIPULACIÓN DE QUBITS: OSCILACIONES DE RABI

La manipulación de un qubit es lograda a través de la aplicación de parámetros de control externo, como la de una onda de frecuencia ω y amplitud ϵ_0 . Si la frecuencia de la onda aplicada al sistema es ajustada a la frecuencia de resonancia, ω' , de la transición entre los estados $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$, un periódico intercambio de energía puede ocurrir entre la onda y el sistema de dos niveles. Este periódico intercambio es denominado

oscilaciones de Rabi (le Bellac 2005; Kok & Lovett 2010).

Para la manipulación de nuestro sistema de dos niveles (qubit), introducimos una fuente de potencial periódico $\epsilon(t) = -\epsilon_0 \cos \omega t$, como agente externo, y utilizamos la teoría estándar de perturbación en el tiempo (Bohm 1951) para la solución del problema. La energía de la fuente está dada por:

$$\hat{H}' = \hat{W} \cos \omega t, \quad (5)$$

donde $\hat{W} = -\epsilon_0 \hat{q}$.

Después de aplicar la perturbación \hat{H}' , tenemos la ecuación diferencial

$$(\hat{H} + \hat{H}')|\Psi\rangle = i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} \quad (6)$$

con la función de onda

$$|\psi\rangle = A(t)e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle + B(t)e^{-iE_2t/\hbar}|2\rangle, \quad (7)$$

donde, en este caso, los coeficientes A y B son funciones del tiempo. A y B representan la amplitud de probabilidad de encontrar al sistema en los estados $e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle$ y $e^{-iE_2t/\hbar}|2\rangle$ respectivamente y en el tiempo t . Como consecuencia de la ortogonalidad de los estados $|0\rangle$ y $|2\rangle$ ($\langle 0|0\rangle = 1$, $\langle 2|2\rangle = 1$, $\langle 0|2\rangle = 0$ y $\langle 2|0\rangle = 0$ (McLachlan 1964)), se deduce que $A^*(t)A(t) + B^*(t)B(t) = 1$. Introduciendo la Ec. (7) en (6) y usando la propiedades de ortogonalidad tenemos:

$$\begin{pmatrix} \langle 0|\hat{W}|0\rangle \cos(\omega t) - \frac{\omega'\hbar}{2} & \langle 0|\hat{W}|2\rangle \cos(\omega t) \\ \langle 2|\hat{W}|0\rangle \cos(\omega t) & \langle 2|\hat{W}|2\rangle \cos(\omega t) + \frac{\omega'\hbar}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = i\hbar \begin{pmatrix} \dot{A}' \\ \dot{B}' \end{pmatrix}, \quad (8)$$

donde previamente se utilizó las transformaciones $A = A'e^{-it\omega'/2}$ y $B = B'e^{it\omega'/2}$. Todavía son inasequibles las soluciones de las Ecs. (8) debido a la dependencia en el tiempo del hamiltoniano. Sin embargo, existe una aproximación que puede ser usada para remover esta dependencia temporal. Para ello,

primero aplicamos la transformación unitaria

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

al hamiltoniano correspondiente de la Ec. (8). Ya que la transformación es dependiente del tiempo debemos redefinir la ecuación de Schrödinger en el nuevo marco rotado. De este modo, la ecuación de Schrödinger será $(\hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger - i\hbar\hat{U}\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}^\dagger)|\psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle$. Entonces, las Ecs. (8) se transforman en:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\omega'\hbar}{2} + \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\langle 0|\hat{W}|0\rangle}{2}(e^{-it\omega} + e^{it\omega}) & \frac{\langle 0|\hat{W}|2\rangle}{2}(1 + e^{-2it\omega}) \\ \frac{\langle 2|\hat{W}|0\rangle}{2}(1 + e^{2it\omega}) & \frac{\omega'\hbar}{2} - \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\langle 2|\hat{W}|2\rangle}{2}(e^{-it\omega} + e^{it\omega}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'' \\ B'' \end{pmatrix} = i\hbar \begin{pmatrix} \dot{A}'' \\ \dot{B}'' \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Ahora podemos aplicar el método de aproximación de onda rotante (Rotating wave approximation, RWA) (Kok & Lovett 2010), el cual consiste en despreciar aquellos términos que oscilan rápidamente.

Esta aproximación es válida siempre y cuando la onda externa tenga aproximadamente la frecuencia de resonancia $\omega'(\xi)$. Usando RWA las Ecs. (10) se

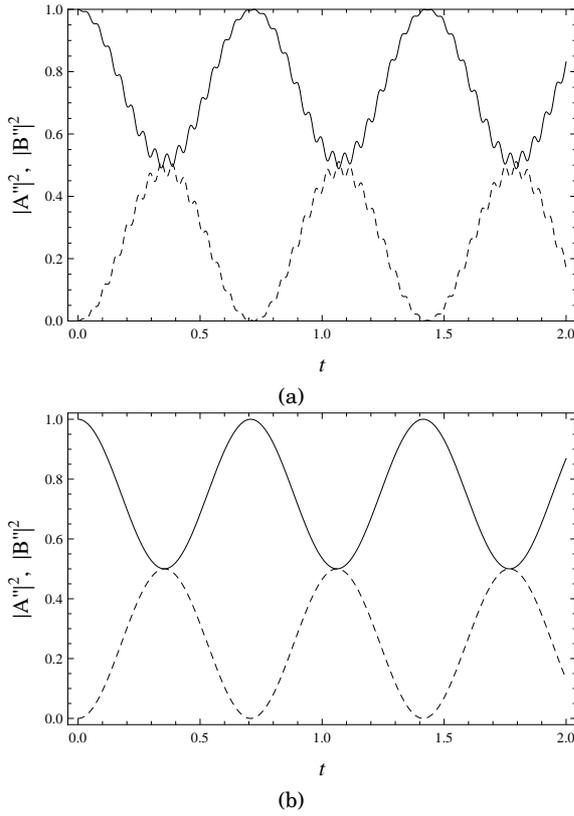


FIG. 2.— Solución numérica y analítica de las Ecs. (10) (a) y (11) (b) respectivamente como función del tiempo.

transforman en:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\omega'\hbar}{2} + \frac{\hbar\omega}{2} & \frac{\langle 0|\hat{W}|2\rangle}{2} \\ \frac{\langle 2|\hat{W}|0\rangle}{2} & \frac{\omega'\hbar}{2} - \frac{\hbar\omega}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'' \\ B'' \end{pmatrix} = i\hbar \begin{pmatrix} \dot{A}'' \\ \dot{B}'' \end{pmatrix}, \quad (11)$$

las cuales son sustentables si y solo si se cumple:

$$|\omega - \omega'| \ll \omega'.$$

Dada la remoción de la dependencia temporal del hamiltoniano, las Ecs. (11) son resolubles por métodos estándares. Con las condiciones iniciales $A''(0) = 1$ y $B''(0) = 0$, dichas soluciones son:

$$\begin{aligned} A''(t) &= \cos\left(\frac{Rt}{2}\right) - i\frac{\Delta}{R} \sin\left(\frac{Rt}{2}\right), \\ B''(t) &= -i\frac{\langle 2|\hat{W}|0\rangle}{\hbar R} \sin\left(\frac{Rt}{2}\right), \end{aligned} \quad (12)$$

REFERENCIAS

Abramowitz M. & Stegun I. A. (1970), *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publication, Inc., New York)
 Bohm D. (1951), *Quantum Theory* (Prentice-Hall, Inc., New York)
 Chen B. et al. (2005), *Phys. Lett. A* **335**, 103
 Datta S. (1995), *Electronic Transport in Mesoscopic Systems* (Cambridge University Press)

donde $R(\xi) = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}$ (frecuencia de Rabi), $\Delta = \omega - \omega'$ y $\Omega^2 = |\langle 2|\hat{W}|0\rangle|^2/\hbar^2$. La probabilidad de encontrar al sistema en el estado fundamental y excitado, en el tiempo t , es respectivamente

$$\begin{aligned} |A''(t)|^2 &= \cos^2\left(\frac{Rt}{2}\right) + \frac{\Delta^2}{R^2} \sin^2\left(\frac{Rt}{2}\right), \\ |B''(t)|^2 &= \frac{\Omega^2}{R^2} \sin^2\left(\frac{Rt}{2}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

La figura 2 muestra una comparación entre la solución numérica (2(a)) y la derivada con RWA (2(b)). La solución numérica converge hacia la analítica siempre y cuando se cumpla que $|\Delta| \ll \omega'$.

Como se mencionó, las oscilaciones de Rabi son importantes en la manipulación de estados cuánticos, particularmente, es posible generar las ondas π y $\pi/2$.

La oscilación entre los niveles $|0\rangle$ y $|2\rangle$ tiene una amplitud máxima cuando $\Delta = 0$, en tal caso tenemos $|A''(t)|^2 = \cos^2(\frac{\Omega t}{2})$ y $|B''(t)|^2 = \sin^2(\frac{\Omega t}{2})$. Para poder cambiar el estado de $|0\rangle$ a $|2\rangle$ es suficiente ajustar el tiempo t durante el cual la onda actúa, es decir, se logra el cambio cuando el campo aplicado tiene la duración $\Omega t/2 = (n + 1/2)\pi$. En este caso diremos que habremos aplicado una onda π . Por otro lado, si deseamos que nuestro sistema sea una superposición de ambos estados, el campo debe ser aplicado en el tiempo $\Omega t/2 = (n + 1/2)(\pi/2)$, en dicho caso habremos aplicado una onda $\pi/2$.

4. CONSIDERACIONES FINALES

A diferencia de un circuito LC con carga continua, el cual ofrece dificultades en la realización de qubits cuánticos (le Bellac 2005; Devoret *et al.* 2004), se ha propuesto un circuito LC con carga discreta como sistema alternativo para la construcción de dichos qubits. Se ha demostrado que este sistema multi-dimensional efectivamente puede ser reducido a un sistema de dos niveles, adecuado para la realización de un qubit. Una característica sustancial en nuestro sistema es la dependencia de la frecuencia de Rabi R con el parámetro mesoscópico C/L , lo cual sugiere la posibilidad de ajustar experimentalmente dicho parámetro a fin de manipular los bits cuánticos en un régimen capacitivo o inductivo respectivamente.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por el proyecto UTA-MINEDUC, Convenio de Desempeño. Se agradece al Prof. César Flores (Instituto de Alta Investigación, Universidad de Tarapacá; Arica, Chile) por sus valiosas sugerencias.

— (2005), *Quantum Transport: Atom to Transistor* (Cambridge University Press)
 de los Santos H. J. (2005), *Principles and Applications of NanoMEMS Physics* (Springer, Berlin)
 Devoret M. H., Wallraff A. & Martinis J. M. (2004)
 Flores J. C. *et al.* (2002), *Phys. Rev. B* **66**, 153410

- Gardner J. W., Varadan V. K. & Awadelkarim O. O. (2001), *Microsensors, MEMS and Smart Devices* (Wiley and Sons, New York)
- Heiss D. (2005), *Quantum Dots: A Doorway to Nanoscale Physics* (Springer, Berlin)
- Imry Y. (1997), *Introduction to Mesoscopic Physics* (Oxford University Press)
- Kok P. & Lovett B. W. (2010), *Introduction to Optical Quantum Information Processing* (Cambridge University Press, New York)
- le Bellac M. (2005), *A Short Introduction to Quantum Information and Quantum Computation* (Cambridge University Press)
- Li Y. Q. & Chen B. (1996), *Phys. Rev. B* **53**, 4027
- McLachlan N. W. (1964), *Theory and Application of Mathieu Functions* (Dover, New York)
- Nakahara M. & Ohmi T. (2008), *Quantum Computing: From Linear Algebra to Physical Realizations* (CRC Press)
- Nielsen M. A. & Chuang I. L. (2000), *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge)
- Schlosshauer M. (2007), *Decoherence and the quantum-to-classical transition* (Springer, Berlin)