

SUCESIÓN GENERALIZADA DE FIBONACCI APLICADA A CIRCUITOS TIPO ESCALERA* GENERALIZED FIBONACCI SEQUENCE APPLIED TO LADDER CIRCUITS

DIEGO SANJINÉS C.

Universidad Mayor de San Andrés, Carrera de Física
c 27 Cota–Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz–Bolivia

RESUMEN

El uso de las fracciones continuas y su conexión con la sucesión de Fibonacci en la teoría de los circuitos eléctricos tipo escalera no es nuevo, pero es susceptible de plantearse de otras maneras a fin de ganar una visión desde otra perspectiva de un mismo problema, que es lo que se hace en este trabajo. Se presenta pues una revisión de las técnicas tradicionales relevantes, a través de una generalización de la sucesión de Fibonacci más amplia y cómoda que permite obtener los mismos resultados sin necesidad de fabricar relaciones auxiliares, como por ejemplo, los polinomios de Morgan-Voyce. Los resultados centrales de este trabajo corresponden al cálculo de las corrientes y voltajes nodales para un circuito tipo escalera y el voltaje a lo largo de una línea de transmisión continua. Para ello se utiliza técnicas del formalismo matricial que comprenden el cálculo de eigenvalores, la diagonalización y la potenciación de matrices de 2×2 .

Descriptor: física general — teoría de circuitos

Código(s) PACS: 01.55.b , 84.30.Bv

ABSTRACT

The use of continuous fractions and their connection to the Fibonacci sequence as part of the theory of ladder-type electric circuits is not a new issue. However, it is a matter that is improvable in order to gain an insight into the same issue but from a different perspective. In this work: we present an overview of traditional techniques through the use of a generalization of the Fibonacci sequence which is broader and easier to apply, as well as, leading to the same results without invoking other special relations, as, for example, the Morgan-Voyce polynomials. The results in this work correspond to the nodal currents and voltages for a ladder circuit and the voltage along a continuous transmission line. We use the techniques of the matrix formalism: eigenvalues, diagonalization and potentiation of 2×2 matrices.

Subject headings: general physics — circuit theory

1. INTRODUCCIÓN

Los números de Fibonacci (o la sucesión del mismo nombre: $F = \{a_n\}$) se presentan usualmente al estudiante en los primeros cursos de alguna carrera de ingeniería o ciencias como un ejercicio de computación recursiva, pues su fórmula generatriz es

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n > 2). \quad (1)$$

Así, F queda definida al especificar los dos primeros términos a_1, a_2 . La forma usual de F corresponde a la elección (arbitraria) $a_1 = a_2 = 1$:

$$F = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots \quad (2)$$

La convención acostumbrada que designa una su-

cesión *generalizada* de Fibonacci es elegir $a_1 = \alpha$ y $a_2 = \beta$ (ver, por ejemplo, Horadam 1961 y Basin 1963), donde el caso especial de $\alpha = \beta = 1$ corresponde a F . Sin embargo, en este trabajo se referirá simplemente a una sucesión de Fibonacci como aquella que cumpla la relación (1) *independientemente* de los valores de a_1 y a_2 , de tal forma que la designación de sucesión “generalizada” se aplique de una forma más general (y útil) para los fines de este trabajo.

A propósito de los números de Fibonacci, éstos tienen una larga y venerable tradición cuyos aspectos generales se pueden resumir a continuación. En 1202, Leonardo de Pisa, hijo del comerciante Bonaccio y conocido como Fibonacci (i.e., Filius Bonacci=hijo de Bonaccio) publicó la obra “Liber Abaci” (libro del ábaco) donde trató matemáticamente un problema muy popular en aquellos días: la multiplicación de una población de conejos a partir de una pareja inicial (Vorobyov 1973). Ésta fue la primera ocasión en que apareció de manera documentada la

*Este trabajo se publicó originalmente como un artículo arbitrado en la revista ContactoS 6, 80, 1992 (Univ. Autónoma Metropolitana, México D.F.). Se re-edita en este número de la *Revista Boliviana de Física* debido al posible interés pedagógico que pueda tener para nuestros lectores.

sucesión F que desde entonces se atribuye a Fibonacci. En el siglo XVII, J. Kepler re-descubrió esta sucesión, lo que motivó aun su estudio; algunos nombres relacionados con ello son: J. Binet, B. Lamé, E. Catalán, E. Lucas. A propósito de este último (s. XIX), se conoce como "números de Lucas" aquellos que corresponden a la sucesión F con valores iniciales $a_1=2$ y $a_2=1$. Una cronología reciente y muy resumida de actividades y publicaciones relevantes puede ser la siguiente:

1959.- Morgan-Voyce A.M, "Ladder Network Analysis using Fibonacci numbers" (Morgan-Voyce 1959).

1961.- N. Vorobyov, "Fibonacci numbers" (Vorobyov 1973).

1963.- V. Hoggat funda la "Fibonacci Association" y se publica el "Fibonacci Quarterly". Se organiza las conferencias "Fibonacci" en California (EUA) anualmente hasta 1979.

1969.- V. Hoggat, "Fibonacci and Lucas numbers".

1984, 1986, 1988.- Conferencias internacionales (1ra, 2da y 3ra en Grecia (Lahr 1986), EUA e Italia respectivamente) sobre los números de Fibonacci y sus aplicaciones.

Actualmente existe una gran variedad de aplicaciones de los números de Fibonacci en distintos campos, donde se destaca el uso de diversas relaciones derivadas de generalizaciones de la fórmula recursiva (1), como es el caso de los polinomios de Morgan-Voyce (Morgan-Voyce 1959, Lahr 1986). Una aplicación muy común es aquella referida a los circuitos eléctricos tipo escalera, donde se da una especie de escenario natural para la aparición de los números de Fibonacci. Es aquí donde surge la motivación para este trabajo.

2. FORMALISMO MATRICIAL Y SUCESIÓN GENERALIZADA DE FIBONACCI

Uno de los problemas centrales de una sucesión recursiva con una relación generatriz como es el caso de (1), es hallar una fórmula para el n -ésimo término como una función de n :

$$a_n = f(n). \quad (3)$$

Para el caso de (1), J. Binet dedujo ingeniosamente dicha fórmula (Vorobyov 1973):

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \quad (4)$$

Una extensión para un caso más general de (1): $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$ ($A, B \geq 1, n > 2$) se logra de manera inmediata a través del mismo procedimiento original de Binet (Kiss 1986).

Otra forma equivalente de obtener el mismo resultado (4) es a través del formalismo matricial. Así, la relación de recurrencia (1) se puede representar por

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Si se escribe $x_n = (a_n, a_{n-1})$, la relación recursiva (5) se puede aplicar $n-2$ veces para obtener $x_n = M^{n-2} x_2$.

Si se conoce el resultado de M^{n-2} , entonces ciertamente se conocerá x_n a partir del vector inicial x_2 . Para tal efecto se debe resolver el problema de eigenvalores de M , es decir, obtener el valor de λ de la ecuación de eigenvalores $Mz = \lambda z$, lo que da lugar al polinomio característico cuyas raíces son

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}. \quad (6)$$

El siguiente paso es diagonalizar M , esto es, encontrar otra matriz D tal que $M_D = D^{-1} M D$ sea una matriz diagonal. El resultado de dicha diagonalización es

$$D = \frac{1}{\sqrt{\alpha - \beta}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Así,

$$x_n = M^{n-2} x_2 = D M_D^{n-2} D^{-1} x_2. \quad (8)$$

Teniendo además en cuenta que los eigenvalores α y β tienen las propiedades

$$\alpha\beta = -1, \quad \alpha^2 = 1 + \alpha, \quad \beta^2 = 1 + \beta, \quad (9)$$

se obtiene finalmente de x_n que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n), \quad (10)$$

que es la fórmula de Binet (4).

El método matricial para obtener a_n es particularmente adecuado para calcular el n -ésimo término de una sucesión aún más general, ya que el criterio original de Binet para obtener (4) no se puede aplicar al caso de una relación de recursividad del tipo $a_n = A_n a_{n-1} + B_n a_{n-2}$ ($A_n, B_n \neq 1, n > 2$), que se puede designar como *sucesión generalizada de Fibonacci*. Un caso particular de esta relación que conviene para los fines específicos de este trabajo es

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + a_{n-2} & (n \text{ impar}) \\ R a_{n-1} + a_{n-2} & (n \text{ par}, R \neq 1) \end{cases}. \quad (11)$$

Se asignará el símbolo G para el conjunto de los términos a_n dados por (11). En el formalismo matricial la relación de recurrencia (11) se escribe (para n par) como

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} R+1 & R \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

que se puede escribir como $x_n = T x_{n-2}$; esta relación se aplica de manera repetida para un n par ($n \geq 4$): $x_n = T^{n/2-1} x_2$.

Ya que la matriz T (con eigenvalores λ_1, λ_2) se puede diagonalizar, entonces se obtiene finalmente a_n :

$$a_n = \frac{R}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[\lambda_1^{n/2-1} \left(a_2 \frac{1 - \lambda_1}{R} - a_1 \right) - \lambda_2^{n/2-1} \left(a_2 \frac{1 - \lambda_2}{R} - a_1 \right) \right] \quad (n \geq 4). \quad (13)$$

Como un ejemplo ilustrativo, la sucesión correspondiente a $R=2$ y $a_1=a_2=1$ es $G = 1, 1, 2, 5, 7, 19, 26, 71, \dots$. Usando la expresión (13) se obtiene

$$a_n = \frac{1}{2} \left[\left(2 + \sqrt{3} \right)^{n/2-1} \left(\sqrt{3} + 1 \right) - \left(2 - \sqrt{3} \right)^{n/2-1} \left(\sqrt{3} - 1 \right) \right], \quad (14)$$

de donde se calcula directamente $a_4=5, a_6=19, a_8=71$.

Aunque no es un misterio, siempre es interesante notar cómo las expresiones claramente irracionales de (14) se “ponen de acuerdo” para dar por resultado sólo números naturales. Esto es una consecuencia de las propiedades correspondientes a (9) para el caso de las sucesiones generalizadas G .

3. FRACCIONES CONTINUAS

Una aplicación interesante de las sucesiones G surge al expresar una fracción continua W como la razón entre dos términos consecutivos de G . Para ver esto consideremos el tratamiento que hace Vorobyov (1973) de las fracciones continuas, adoptando la notación práctica de Hall & Knight (Hall & Knight 1948). Considérese entonces la fracción continua dada por

$$W = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots + \frac{1}{q_n}}} \equiv q_0 + \frac{1}{q_1} \frac{1}{q_2} \dots \frac{1}{q_n}. \quad (15)$$

Definiendo las razones (o “convergentes”)

$$\frac{P_0}{Q_0} = q_0, \quad \frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}}, \quad \text{etc.}, \quad (16)$$

el valor de W se puede expresar por $W=P_n/Q_n$. Tales convergentes satisfacen las siguientes propiedades (Vorobyov 1973):

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= P_k q_{k+1} + P_{k-1}, \\ Q_{k+1} &= Q_k q_{k+1} + Q_{k-1}, \\ P_{k+1} Q_k - P_k Q_{k+1} &= (-1)^k. \end{aligned} \quad (17)$$

A continuación consideremos la fracción continua (con N impar)

$$Y = R + \frac{1}{1 + \frac{1}{R + \frac{1}{1 + \frac{1}{R + \dots + \frac{1}{R + \frac{1}{1}}}}} = \frac{P_N}{Q_N}, \quad (18)$$

que es el caso particular de (15) para

$$q_n = \begin{cases} R & (n \text{ par}) \\ 1 & (n \text{ impar}) \end{cases}. \quad (19)$$

Las primeras convergentes para Y son: $P_0/Q_0=R$ ($P_0=R, Q_0=1$), $P_1/Q_1=R+1$ ($P_1=R+1, Q_1=1$). Estas expresiones, con ayuda de (16) y (19) se pueden asociar a las siguientes sucesiones generalizadas de Fibonacci:

$$\begin{aligned} H &= 1, R, 1 + R, R + R(1 + R), R(1 + R) + 2R + 1, \dots \\ L &= 1, 1, 1 + R, 2 + R, R(R + 2) + R + 1, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

cuyos términos h_n y l_n respectivamente corresponden de acuerdo a (11) a

$$\begin{aligned} h_n &= a_n \quad (a_1 = 1, a_2 = R), \\ l_n &= a_{n+1} \quad (a_1 = 0, a_2 = 1), \end{aligned} \quad (21)$$

donde $h_n = l_n$ (para n impar). Se puede entonces escribir

$$P_n = h_{n+2}, \quad Q_n = l_{n+1} \quad (n \geq 0), \quad (22)$$

de tal forma que la fracción continua Y en (18) se exprese como

$$Y = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{h_{n+2}}{l_{n+1}}, \quad (23)$$

o bien, para n impar,

$$Y = \frac{l_{n+2}}{l_{n+1}}. \quad (24)$$

Se puede verificar inmediatamente que si $R=1$ en (20), estas sucesiones se reducen a la sucesión de Fibonacci F y el resultado de (24) es el mismo que se obtiene en Vorobyov (1973). Utilizando (13) en (21) se llega a una expresión muy cómoda para el n -ésimo término de la sucesión L ($n \geq 3$ impar):

$$l_n = \sqrt{\lambda_1^{n-1}} \left(\frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) - \sqrt{\lambda_2^{n-1}} \left(\frac{1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right), \quad (25)$$

donde $\lambda_1=R+2+\sqrt{R^2+4R}$, $\lambda_2=R+2-\sqrt{R^2+4R}$ son los eigenvalores de la matriz T en (12). En lo sucesivo se expresará los resultados centrales de este trabajo en términos de l_n en (25).

4. APLICACIONES EN LA TEORÍA DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Estas aplicaciones son frecuentes en la literatura científica; uno de los más antiguos es el trabajo de Fry (1929). La razón de ello es que el circuito tipo escalera (Fig.1) es un modelo bastante simple y completo de las líneas de transmisión de energía eléctrica y permite obtener resultados relevantes para aplicaciones específicas, como ser la atenuación del voltaje a medida que se avanza a lo largo de la línea. En este trabajo se aplica el formalismo matricial y la generalización de la sucesión de Fibonacci (11), donde la deducción de los resultados ya conocidos se realiza a manera de probar de la validez del método.

En el modelo ilustrado en la Fig.1 se desprecia los efectos capacitivos e inductivos en el cálculo de la resistencia equivalente R_N para N lazos. El cálculo de R_N da como resultado

$$R_N = R + \frac{1}{1 + \frac{1}{R + \frac{1}{1 + \frac{1}{R + \dots + \frac{1}{R + \frac{1}{1}}}}} = \frac{1}{1} \frac{1}{R}, \quad (26)$$

que es igual a (18) con $q_{2N-1}=R$ y $q_{2N}=1$, por lo que se puede usar (24) para escribir

$$R_N = \frac{l_{2N+1}}{l_{2N}} = \frac{R l_{2N+1}}{l_{2N+1} - l_{2N-1}}. \quad (27)$$

En el límite de un número muy grande de lazos se obtiene

$$R_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} R_N = \frac{R}{1 - \lambda_1^{-1}}. \quad (28)$$

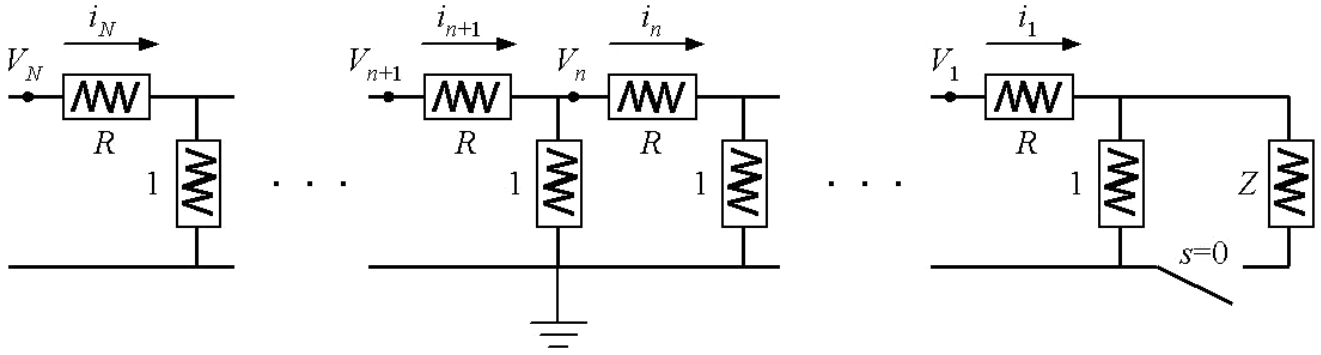


FIG. 1.— Circuito escalera de N lazos con voltajes y corrientes nodales V_n, i_n respectivamente. La resistencia longitudinal tiene un valor de R unidades de resistencia mientras que la resistencia transversal vale 1 unidad de resistencia. Cuando el interruptor está en el estado $s=1$ el circuito tiene una carga de Z unidades de resistencia y cuando $s=0$ el circuito está abierto.

Si $R=1$ entonces $R_\infty=(1+\sqrt{5})/2$, lo que se conoce —desde los tiempos de la Grecia clásica— como *razón áurea*.

A continuación se calcula los voltajes y corrientes nodales V_n, i_n (Fig.1). Fijando en valor del voltaje de entrada como $V_N = i_N R_N$, las corrientes nodales resultan ser

$$i_{N-k} = V_N \left[R_N \prod_{m=1}^k (1 + R_{N-m}) \right]^{-1} \quad (1 \leq k \leq N-1), \quad (29)$$

donde se usa (27) para el cálculo de R_{N-m} . Cuando el estado del interruptor es $s=1$ (circuito con carga) la resistencia equivalente es

$$R_N = R + \frac{1}{1 + \frac{1}{R + \frac{1}{1 + \frac{1}{R + \frac{1}{\dots + \frac{1}{R + \frac{1}{Z}}}}}}} \quad (30)$$

la que se puede escribir en términos de sus respectivas convergentes:

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{P_{2N}}{Q_{2N}} = \frac{Z P_{2N-1} + P_{2N-2}}{Z Q_{2N-1} + Q_{2N-2}} \\ &= \frac{(Z+1) P_{2N-1} - P_{2N-3}}{(Z+1) Q_{2N-1} - Q_{2N-3}}, \end{aligned} \quad (31)$$

o bien, en términos de las sucesiones generalizadas H y L en (20),

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{(Z+1) h_{2N+1} - h_{2N-1}}{(Z+1) l_{2N} - l_{2N-2}} \\ &= R \frac{(Z+1) l_{2N+1} - l_{2N-1}}{Z l_{2N+1} + (R-Z) l_{2N-1}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Sustituyendo este valor de R_N en (29) se obtiene la corriente nodal y de ahí —por la ley de Ohm— el voltaje nodal:

$$\begin{aligned} i_{N-k} &= \frac{V_N}{R} \left[\frac{Z l_{2(N-k)+1} + (R-Z) l_{2(N-k)-1}}{(Z+1) l_{2N+1} - l_{2N-1}} \right], \\ V_{N-k} &= V_N \left[\frac{(Z+1) l_{2(N-k)+1} - l_{2(N-k)-1}}{(Z+1) l_{2N+1} - l_{2N-1}} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

La fórmula (33) para las corrientes y voltajes nodales en un circuito con carga constituye el resultado

central de este trabajo. El caso particular del circuito sin carga (o abierto) se obtiene de (33) al tomar $Z=\infty$. La fórmula (33) comprende, como casos especiales, los resultados reportados por Basin (1963). En el límite de una cadena de lazos muy grande ($N \rightarrow \infty$) se obtiene de (32) que

$$R_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} R_N = R \frac{\lambda_1 [(Z+1) \lambda_1 - 1]}{(Z+1) \lambda_1^2 - (Z+2) \lambda_1 + 1}, \quad (34)$$

y de aquí, se recupera la expresión (28) para el circuito sin carga en el límite $Z \rightarrow \infty$.

5. LÍMITE DEL CONTINUO: LÍNEA UNIFORME DE TRANSMISIÓN

La aplicación de los anteriores resultados en el límite continuo del circuito de la Fig.1 es inmediata. Éste es el modelo para una línea de transmisión uniforme que consiste —por ejemplo— de un juego de cables coaxiales con una fuente de voltaje en un extremo y una carga en el otro extremo. Así, se tomará el límite de un número muy grande de lazos, $N \rightarrow \infty$, junto con las resistencias longitudinal y transversal en cada lazo:

$$r_l = \frac{\rho_l L}{N}, \quad r_t = \frac{N}{\rho_t L}, \quad (35)$$

donde L es la longitud de la línea de transmisión y ρ_l, ρ_t son la impedancia y admitancia por unidad de longitud, que son características del material y de la geometría del sistema físico. Así, para una carga Z' , la resistencia equivalente es $R_{eq} = r_t R_\infty$, donde R_∞ está dada por (34) con $Z=Z'/r_t$ y $R=r_l/r_t=(L/N)^2 \rho_l \rho_t$. Sustituyendo estas expresiones en $\lambda_1 = R+2 + \sqrt{(R^2+4R)}$ se tiene:

$$\lambda_1 \cong 1 + \frac{L}{N} \sqrt{\rho_l \rho_t}, \quad (36)$$

por lo que R_{eq} queda como

$$R_{eq} = \rho_l \frac{Z' \rho_t + \sqrt{\rho_l \rho_t}}{Z' \rho_t \sqrt{\rho_l \rho_t} + \rho_l \rho_t}, \quad (37)$$

que se reduce a la fórmula correcta en el límite del circuito sin carga:

$$\lim_{Z' \rightarrow \infty} R_{eq} = \sqrt{\rho_l / \rho_t}. \quad (38)$$

La fórmula para R_{eq} en (37) es la misma (salvo por un factor $\sqrt{2}$) que obtiene Mowery (1964) después de usar un método con base en los polinomios de Tchebyshev.

El voltaje nodal en (33) se puede escribir en la forma sencilla

$$V_{N-k} = V_N \lambda_1^{-k} \quad (39)$$

para lo que se usó

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{R+2 - \sqrt{R(R+4)}}{R+2 + \sqrt{R(R+4)}} \cong \left(1 - \frac{L}{N} \sqrt{\rho_l \rho_t}\right)^2, \quad (40)$$

junto con (recordando que $\lim_{N \rightarrow \infty} (1+\alpha/N) = e^\alpha$)

$$\begin{aligned} l_n &= \left[\frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-2L\sqrt{\rho_l \rho_t}) + \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right] \sqrt{\lambda_1^{n-1}} \\ &= C \sqrt{\lambda_1^{n-1}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Usando (36) y $k=lN/L$, donde l es la distancia física desde la fuente de voltaje (V_0) hasta el punto nodal se tiene que

$$V(l) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} V_{N-k} = V_0 \exp(-l\sqrt{\rho_l \rho_t}), \quad (0 \leq l \leq L) \quad (42)$$

lo que coincide con el resultado usual que se obtiene al resolver la ecuación del telegrafista (Plonsey & Collin 1961, Sander & Reed 1976).

6. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LA RESISTENCIA

El comportamiento asintótico de R_N en (32) cuando $N \rightarrow \infty$, se deduce esencialmente del comportamiento de l_n en (25) cuando $N \rightarrow \infty$ con $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$ ($\lambda_1 > 1$) y $n \geq 3$ impar:

$$l_n = \sqrt{\lambda_1^{n-1}} \left(1 + \sqrt{\lambda_1^{-n-1}}\right) \left(\frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right). \quad (43)$$

Definiendo: $\delta = \lambda_1 - 2$, $p = (n+1)/2$ y $m = (n-1)/2$, se reescribe l_n como

$$l_n \propto g_p(\delta) \lambda_1^m, \quad (44)$$

donde se introdujo la función

$$g_p(\delta) = 1 + \left(\frac{2}{2+\delta}\right)^p. \quad (45)$$

Así, se establece el comportamiento asintótico de $g_p(\delta)$ en tres intervalos:

$$\begin{aligned} (i) \quad 0 \cong \delta \ll 2 &\rightarrow g_n(\delta) \cong 1 + (1 - \delta/2)^n, \\ (ii) \quad \delta \cong 2 &\rightarrow g_n(\delta) \cong 1 + 2^{-n}, \\ (iii) \quad \delta \gg 2 &\rightarrow g_n(\delta) \cong 1 + (2/\delta)^n. \end{aligned} \quad (46)$$

En los tres casos se verifica el comportamiento $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\delta) = 1$. El caso (i) corresponde al límite $R_\infty = 0$ pues el circuito se reduce a una colección infinita de resistencias unitarias en paralelo. El caso (iii) corresponde al límite $R_\infty = R$ pues el circuito se

reduce a una colección infinita de "cortos" y por ello sólo queda la primera resistencia longitudinal. Así, el caso más interesante puede ser (ii) ya que la razón R de las resistencias longitudinal y transversal no es muy grande ni muy pequeña. En este caso, si $n \geq 5$ entonces $g_n(\delta) \cong 1$, lo que significa que la resistencia equivalente para un circuito (con o sin carga) de 5 lazos ya es una buena aproximación para el circuito más largo.

En Lahr (1986) se dispone de un extenso material acerca de la aplicación de los números de Fibonacci a los circuitos tipo escalera. Su objetivo central es calcular la resistencia equivalente y los voltajes y corrientes nodales (con carga y sin carga), obteniendo las expresiones buscadas en términos de los polinomios de Morgan-Voyce. Estos polinomios también se utilizan en otros trabajos (ver, por ejemplo, Swamy & Bhattacharyya 1967), donde se incluye efectos capacitivos e inductivos de las impedancias debidos a una señal periódica de voltaje a la entrada del circuito. En todos estos casos, se verifica que los polinomios de Morgan-Voyce corresponden al caso particular de una sucesión generalizada de Fibonacci G definida por (11) con los primeros términos $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$. Aunque ya Basin (1963) reporta expresiones explícitas para los polinomios de Morgan-Voyce, éstos no se aplican en algún cálculo contenido en su trabajo. Otros resultados concernientes a las potencias de una matriz de 2×2 y sus conexiones con funciones hiperbólicas, polinomios de Jacobi y polinomios de Tchebyshev se reportan en Mowery (1964) y en Mowery (1961).

7. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Los resultados centrales de este trabajo, que pueden resumirse en las fórmulas (33) para las corrientes y voltajes nodales, y la fórmula (42) para el voltaje a lo largo de una línea de transmisión continua, se obtuvieron por medio de una redefinición de la así llamada sucesión generalizada de Fibonacci según (11). La técnica utilizada fue la del formalismo matricial que comprende el cálculo de eigenvalores, la diagonalización y la potenciación de matrices de 2×2 . Este formalismo conduce además a expresiones para estimar el carácter asintótico de la resistencia equivalente, lo que permite, por ejemplo, calcular cuántos lazos del circuito serían suficientes para tener una buena aproximación al circuito infinito. Una dirección natural en la que se puede extender este trabajo es considerar eigenvalores complejos λ_1 y λ_2 de las matrices de recurrencia, lo que está asociado a los efectos capacitivos e inductivos de las impedancias (un tratamiento muy completo al respecto lo hace Dutta-Roy (1964) con métodos diferentes a los de este trabajo). Así, se puede demostrar que aún se cumple la condición $|\lambda_1| |\lambda_2| = 1$, de donde se deduce que la impedancia equivalente debe tener un comportamiento asintótico análogo al caso de eigenvalores reales. Otra dirección que se podría tomar es hacia la investigación de las propiedades de las fracciones continuas (15) en donde la periodicidad de q_n se extiende sobre periodos mayores que en (19), lo

que supone un formalismo matricial análogo a (12) que involucra el producto de un número mayor de matrices de 2×2 . La extensión de dicho formalismo a matrices cuadradas de mayor orden puede aplicarse considerando la expresión más general de (11) para

las relaciones de recurrencia:

$$a_n = \sum_{m=1}^k C_m a_{n-m} \quad (0 < k < n). \quad (47)$$

REFERENCIAS

- Basin S.L. (1963), *Math. Magazine* **36**, 84.
 Dutta-Roy S.C. (1964), *Proc. IEE* **111**, 10, 1653.
 Fry T.C. (1929), *Bull. of the Amer. Math. Soc.* **35**, 463.
 Hall H.S. & Knight S.R. (1948), *Álgebra Superior* (Uteha).
 Horadam A.F. (1961), *Amer. Math. Monthly* **68**, 5, 455.
 Kiss P. (1986), *Fibonacci numbers and their applications*, p.121 (ed. Philippou A.N. et al., Reidel).
 Lahr J. (1986), *Fibonacci numbers and their applications*, p.141 (ed. Philippou A.N. et al., Reidel).
 Morgan-Voyce A.M. (1959), *IRE Trans. on Circuit Theory* **6**, 3, 321.
 Mowery V.O. (1964), *IRE Trans. on Circuit Theory* **CT-11**, 232.
 Mowery V.O. (1961), *IRE Trans. on Circuit Theory* **CT-8**, 167.
 Plonsey R. & Collin R. (1961), *Principles and Applications of Electromagnetic Fields* p.364 (McGraw-Hill).
 Sander K. & Reed G. (1978), *Transmission and Propagation of Electromagnetic Waves* p.153 (Cambridge University Press).
 Swamy M.N.S. & Bhattacharyya B.B. (1967), *IEEE Trans. on Circuit Theory* **CT-14**, 3, 260.
 Vorobyov N.N. (1973), *Los Números de Fibonacci* (Limusa).