

KINKS Y SOLITONES EN LA ECUACIÓN DE  
GINZBURG-LANDAU CÚBICA-QUÍNTICA REAL  
KINKS AND SOLITONS IN THE  
CUBIC-QUINTIC REAL GINZBURG-LANDAU EQUATION

D. URZAGASTI<sup>†</sup>

Instituto de Investigaciones Físicas  
Universidad Mayor de San Andrés  
La Paz–Bolivia

(Recibido el 1 de septiembre de 2010; aceptado el 24 de septiembre de 2010)

RESUMEN

Se resuelve numéricamente la ecuación parabólica de Ginzburg-Landau Cúbica-Quíntica Real en una dimensión. Las soluciones no divergentes encontradas son aquellas que conectan los distintos puntos fijos. Estas se presentan como trayectorias en el espacio de fases que conectan puntos silla con puntos fijos espirales y nodos y que tienen la forma de frentes (*kinks*) o de estructuras periódicas espaciales que viajan estacionariamente en el espacio. A partir de las soluciones que involucran espirales, ha sido posible construir también estructuras estacionarias localizadas espacialmente que tienen formas de dominios y pulsos.

*Descriptor:* sistemas dinámicos no-lineales — integración numérica

Código(s) PACS: 05.45.\_a, 02.60.Jh

ABSTRACT

We numerically solve the parabolic cubic-quintic real Ginzburg-Landau equation in one dimension. It was found that non-divergent solutions connect fixed points. These appear as trajectories in the phase portrait connecting saddle points with spirals and nodes. These fronts (*kinks*) or spatial periodic structures travel stationarely along the one dimensional axis. From the solutions involving spirals we were able to assemble pairs of solutions to form stationary localized structures like domains and pulses.

*Subject headings:* dynamical systems (non-linear) — numerical integration

1. INTRODUCCIÓN

Muchos sino la mayoría de los problemas físicos que se abordan desde el punto de vista analítico se presentan con ecuaciones de carácter no lineal y no sólo con una variable independiente sino en general con varias, perteneciendo así al conjunto de tipos de ecuaciones conocidas como NPDEs (*nonlinear partial differential equations*). Podría pensarse que dada su no-linealidad estos problemas no tienen solución analítica exacta, y que la resolución debe afrontarse por medio de algoritmos numéricos; sin embargo, existen varias obras y artículos dedicados a la divulgación de muchos casos en los que se han encontrado soluciones exactas a problemas no-lineales específicos, entre ellos podemos citar el artículo de Ali et al. (2007) en el que se muestra un método para hallar soluciones de NPDEs usando el método de la función coseno o el libro de Sachdev (2000) en el que resume métodos para la obtención de soluciones exactas de muchos problemas no lineales. Pero al parecer, en la mayoría de los casos no se tiene tanto éxito y tiene que recurrirse a métodos analíticos aproximados como por ejemplo

los métodos homotópicos descritos entre otros por Babolian et al. (2009) y Lin (2009) y métodos para la contrucción de pulsos en ecuaciones de amplitud como el descrito por Descalzi (2003). No obstante de que estos métodos puedan tener éxito en muchos casos, no en todos, resultan muy engorrosos al manejar un gran número de términos en las aproximaciones aparte de la complejidad que pueden adquirir los mismos. No parece una forma práctica de abordar los problemas no-lineales con aproximaciones analíticas cuando no existen soluciones exactas, entonces la integración numérica se presenta como el único camino llano y promisorio en esta difícil área. Pero la resolución numérica es sólo una herramienta que cuando es bien utilizada brinda resultados muy precisos y con gran rapidez. Para ser bien utilizada, debe realizarse el análisis de existencia, unicidad y estabilidad de las soluciones que se adaptarán lo mejor posible a la realidad de los resultados experimentales. En primer lugar, debe tenerse la seguridad de que si es así predicho por estos análisis, las soluciones numéricas corroboran y plasman en una “realidad numérica” todo aquello que se esperaba antes de la resolución y con una gran precisión y eficiencia, lo que es ahora posible gracias a la gran veloci-

<sup>†</sup>Email: urza@fiumsa.edu.bo.

dad de los procesadores computacionales y a los diferentes métodos numéricos desarrollados para la resolución de todo tipo de problemas (véase por ejemplo Press et al. 1992). El análisis mencionado es muy complejo y actualmente está en una etapa de desarrollo muy fuerte, para empezar pueden citarse la obra ya clásica y muy didáctica de Strogatz (1994) y obras más recientes y muy formales de Kuznetsov (1995) y Meiss (2007). Al respecto, muchos avances se han ido realizando hasta los recientes años en distintas áreas del ámbito no lineal, véase por ejemplo una revisión completa mostrada por Aranson & Kramer (2002) respecto al estado del estudio de las CGLEs (*Complex Ginzburg-Landau Equations*) y un resumen de diversos casos en la formación de estructuras localizadas dado por Coulet (2002). En el caso del extenso grupo de las CGLEs existe un subgrupo muy importante de ecuaciones llamadas *Complex Cubic-Quintic Nonlinear Ginzburg-Landau Equations* o simplemente *cubic-quintic* CGLEs, en las que aparece la amplitud compleja e incógnita en términos de tercer y quinto grado aparte de los lineales. Estas ecuaciones han sido ampliamente estudiadas, y para citar sólo unos cuantos ejemplos están los trabajos de Maruno et al. (2005) y Kalashnikov (2009) donde se encuentran soluciones tipo *solitones disipativos* o el de Nguenang et al. (2008) donde se modela el movimiento de paredes de dominios ferromagnéticos y el de Pelap et al. (2007) donde se estudia el comportamiento de soluciones del tipo de ondas de choque. También se han estudiado el caso de estas ecuaciones en su versión real como en el caso del trabajo de Wei & Winter (2004) en el que se estudian soluciones con formas de ondas estacionarias cuando se considera un acople global para la estabilización de dicha ecuación. En esta ocasión, como un paso previo necesario para el estudio de ecuaciones tipo CGLEs se ha pensado estudiar la versión real de las CGLEs, afrontando el problema de una ecuación parabólica típica de problemas difusivos en una dimensión espacial. Se trata de la ecuación de amplitud de Ginzburg-Landau Cúbica-Quintica Real en una dimensión que posee una solución exacta hasta el tercer grado en la amplitud, pero no cuando la misma incluye un término de quinto grado en la misma. En este trabajo se resuelve el problema de esta ecuación usando el procedimiento de análisis previo mencionado, para proceder luego a la resolución numérica del problema. Se clasifican los distintos casos que podrían darse para diferentes valores de los parámetros y finalmente se construyen, a partir de las soluciones tipo *kinks* encontradas, las estructuras localizadas estacionarias, también llamadas *solitones*. Ecuaciones como ésta pueden encontrarse en diversas áreas pero sobretodo en el área que involucra problemas de difusión del calor en reservorios de agua que intercambian masa y energía con la atmósfera (Sun et al. 2008; Henderson-Sellers 1981). En general, la forma original de la ecuación no-lineal bajo estudio no tiene una forma sencilla, por ello se recurre a un procedimiento de reducción con la obtención de la llamada *forma normal* de la

ecuación (véase Meiss 2007), con la cual se puede trabajar con una forma más o menos sencilla que puede complicarse agregando a la misma términos en forma de monomios o bien términos con mayores órdenes de derivadas. La ecuación de amplitud aquí estudiada ya está bajo su forma normal.

## 2. ECUACIÓN DE AMPLITUD DE GINZBURG-LANDAU CÚBICA-QUÍNTICA REAL

La ecuación de amplitud bajo estudio tiene la siguiente forma:

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + a u + b u^3 + c u^5, \quad (1)$$

la cual, sin el último término es también conocida como la ecuación parabólica de Newell-Whitehead.

En primera instancia, planteamos el análisis desde el punto de vista de soluciones tipo frentes (*kinks*) de la siguiente manera: Haciendo el cambio de variable:

$$y = x - v t, \quad (2)$$

con  $v$  constante, se tienen:

$$\partial_t = -v \partial_y, \quad \partial_x = \partial_y, \quad \partial_x^2 = \partial_y^2, \quad (3)$$

con lo que la ecuación toma la forma:

$$-v \partial_y u = \partial_y^2 u + a u + b u^3 + c u^5. \quad (4)$$

Introduciendo la notación:

$$\dot{A} = \partial_y A, \quad y_1 = u, \quad y_2 = \dot{y}_1, \quad (5)$$

se tiene el par de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1 &= \dot{y}_1 = y_2, \\ f_2 &= \dot{y}_2 = -v y_2 - a y_1 - b y_1^3 - c y_1^5. \end{aligned} \quad (6)$$

## 3. PUNTOS DE EQUILIBRIO: $\vec{f} = 0$

Nótese que se tiene la libertad de realizar un reescalamiento haciendo cualquiera de los parámetros,  $a$ ,  $b$  ó  $c$  igual a la unidad. En este caso se elige:

$$c = 1. \quad (7)$$

Existen diferentes puntos fijos (puntos de equilibrio):

*Punto A.* Un punto de equilibrio corresponde a la solución homogénea:

$$(y_1^*, y_2^*) = 0. \quad (8)$$

*Punto B.* Otros puntos de equilibrio corresponden a las soluciones:

$$y_1^{*2} = \frac{b}{2} \left( -1 \pm [1 - \alpha]^{1/2} \right), \quad y_2^* = 0, \quad (9)$$

donde

$$\alpha = \frac{4a}{b^2} \leq 1. \quad (10)$$

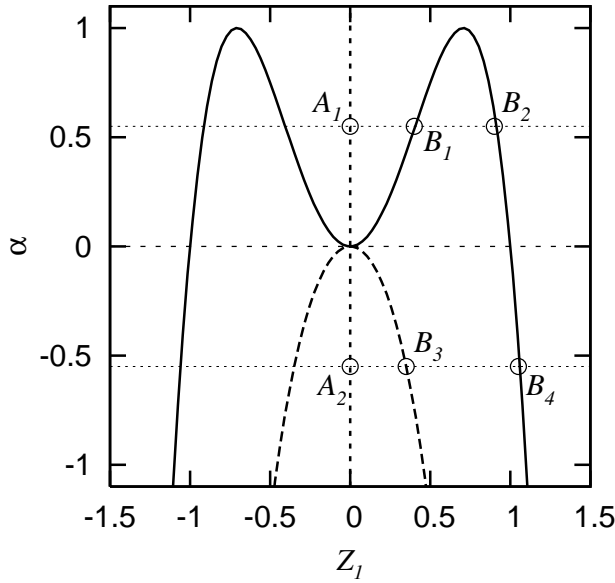


FIG. 1.— En esta figura se muestra la relación entre los valores de las posiciones de los puntos de equilibrio  $y_1^*$  y los parámetros  $a$  y  $b$  de la Ec. (1). El parámetro  $\alpha = 4a/b^2 \leq 1$  (Ec. 10). La línea vertical en  $Z_1 = 0$  corresponde a  $y_1^* = 0$  del Punto A. La curva sólida corresponde al caso  $b < 0$  del Punto B, mientras que la curva segmentada corresponde al caso  $b > 0$  del mismo punto (Ec. 17). Nótese cómo la bifurcación se da a partir del punto  $(0, 0)$  en esta figura, ya sea para  $b > 0$  o para  $b < 0$ . Los casos que pueden presentarse se resumen usando como ejemplo los puntos fijos representados en la figura: Los puntos del tipo  $A_1, B_2, B_3$  ó  $B_4$  pueden ser espirales, nodos o centros. Los puntos del tipo  $B_1$  ó  $A_2$  son sillas. Dada la simetría respecto del eje  $Z_1 = 0$ , los puntos a la izquierda de este eje son similares a los de la derecha del mismo.

#### 4. ESTABILIDAD LINEAL Y BIFURCACIONES

La matriz jacobiana asociada al sistema  $\dot{y} = \vec{f}$  es:

$$A = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_1 f_2 & -v \end{pmatrix}, \quad (11)$$

donde

$$\partial_1 f_2 = -a - 3b y_1^2 - 5 y_1^4. \quad (12)$$

La ecuación característica del problema es entonces:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \tau \lambda + \Delta = 0, \quad (13)$$

donde para los distintos puntos fijos:

**Punto A.** En este caso:

$$\tau = -v, \quad \Delta = a. \quad (14)$$

**Punto B.** En este otro caso:

$$\tau = -v, \quad \Delta = -\frac{4a}{\alpha}(1 - \alpha)^{1/2} \left\{ \pm 1 - (1 - \alpha)^{1/2} \right\}. \quad (15)$$

Para  $\Delta < 0$  se tienen puntos silla. Para  $\Delta > 0$ , la estabilidad la define  $v$ : Si  $v > 0$  se tiene un equilibrio estable, si  $v < 0$  se tiene un equilibrio inestable y si  $v = 0$  se tienen centros. Por otro lado, el tipo de estabilidad lo define  $\Delta$ : Si  $\Delta > v^2/4$  se tienen espirales, de lo contrario, si  $0 < \Delta \leq v^2/4$  se tienen nodos.

Definiendo:

$$Z_1 = \sqrt{\frac{1}{|b|}} y_1^*, \quad (16)$$

se puede escribir para el Punto B:

$$\alpha = \begin{cases} -4 Z_1^2 (1 + Z_1^2), & b > 0, \\ -4 Z_1^2 (Z_1^2 - 1), & b < 0. \end{cases} \quad (17)$$

En la Fig. 1 se muestran las curvas que relacionan los parámetros de la Ec. 4. En la misma se resumen todos los casos posibles usando varios puntos fijos de ejemplo en distintas partes del diagrama.

#### 5. TRAYECTORIAS ENTRE LOS PUNTOS FIJOS

##### 5.1. Trayectorias que involucran puntos silla

Para el caso de puntos silla se necesitan los eigenvalores que definirán las variedades estable e inestable de la silla. Partiendo de los eigenvalores

$$\lambda_{[\pm]} = \frac{1}{2} \left( \tau \pm [\tau^2 - 4\Delta]^{1/2} \right), \quad (18)$$

reemplazados en la ecuación  $(A - \lambda I)\vec{y} = 0$ , se obtienen los correspondientes eigenvectores:

$$\vec{y}_{[\pm]} = (1, \lambda_{[\pm]}) \quad (19)$$

En el caso  $v > 0$ , el signo (+) corresponde a la variedad inestable y el signo (-) a la variedad estable de la silla.

Ahora bien, cualquier condición inicial se puede escribir como

$$\vec{y}_0 = c_{[+]} \vec{y}_{[+]} + c_{[-]} \vec{y}_{[-]}, \quad (20)$$

donde  $c_{[+]}$  y  $c_{[-]}$  son constantes; y la solución lineal muy cerca del punto silla se escribe:

$$\vec{y} = c_{[+]} \vec{y}_{[+]} e^{\lambda_{[+]} t} + c_{[-]} \vec{y}_{[-]} e^{\lambda_{[-]} t}. \quad (21)$$

Nótese, a modo de ejemplo, que si se quiere seguir la trayectoria partiendo de la variedad inestable de la silla, debe hacerse  $c_{[-]} = 0$  y  $c_{[+]}$  lo suficientemente pequeña para que sea válida la aproximación lineal.

##### 5.2. Casos estudiados

A fin de estudiar todas las posibilidades se consideran las distintas trayectorias que conectan puntos fijos similares a los representados en la Fig. 1 ( $A_1, B_1$ , etc.). Estas trayectorias son obtenidas integrando numéricamente el par de ecuaciones (6) a partir de las variedades inestables de los puntos silla considerados. Los resultados de las trayectorias elegidas se muestran en las Figs. 2 y 3. Se eligieron sólo los conjuntos de trayectorias de los tipos  $B_1 \rightarrow A_1$  (Fig. 2) y  $B_1 \rightarrow B_2$  (Fig. 3) ya que las de los tipos  $A_2 \rightarrow B_3$  y  $A_2 \rightarrow B_4$  son similares a las mismas. Nótese que no pueden conectarse los puntos  $B_3$  y  $B_4$  ya que estos no coexisten.

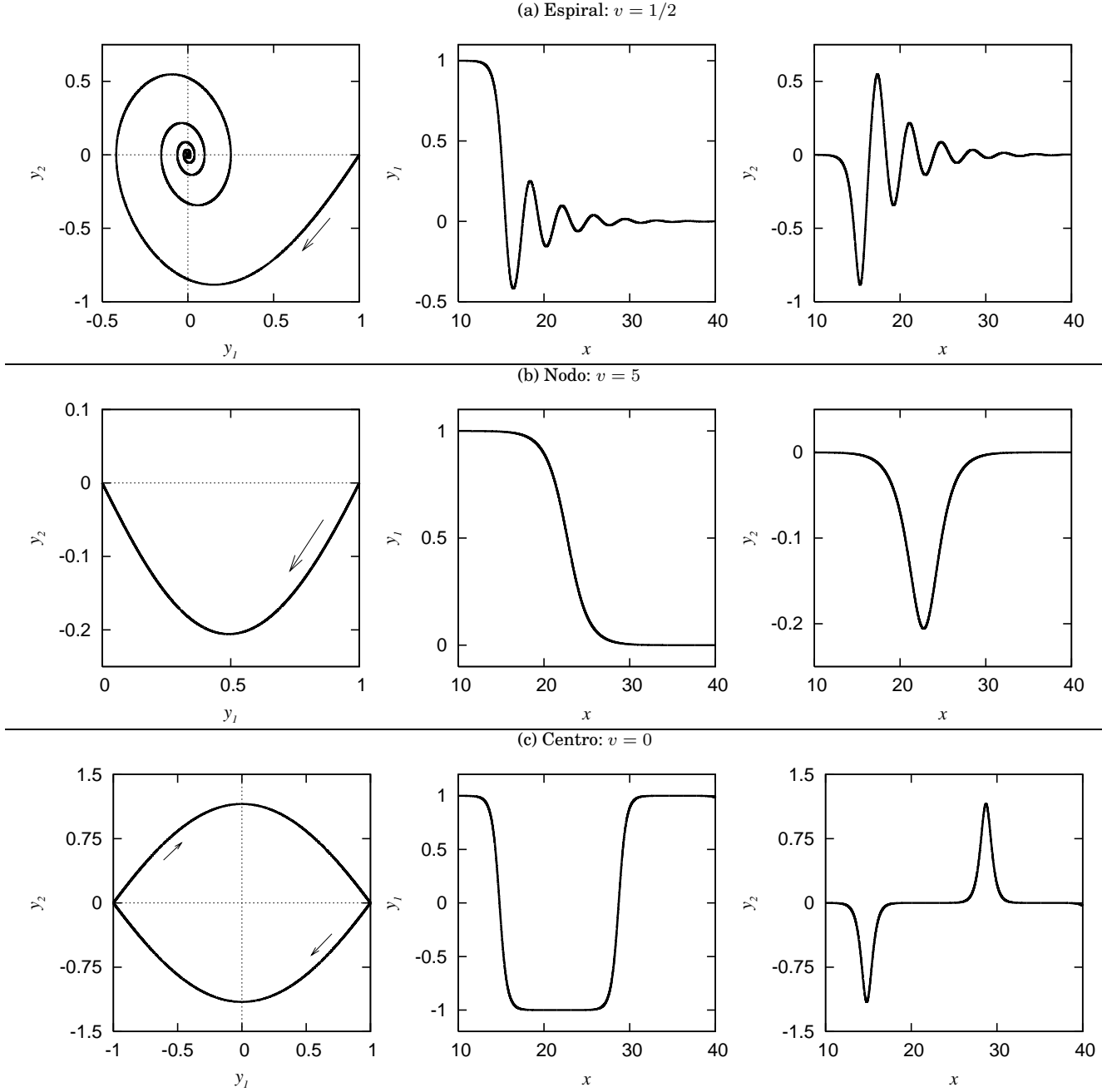


FIG. 2.— Trayectorias que conectan puntos fijos de los tipos  $A_1$  y  $B_1$  de la Fig. 1 para el caso  $\alpha = 3/4$  con  $a = 3$  y  $b = -4$ . Se muestran las correspondientes amplitudes  $y_1$  y  $y_2$  como funciones de la posición  $x$  (el valor del tiempo es arbitrario), las cuales para  $v > 0$  tienen la forma de frentes (*kinks*) que viajan hacia la izquierda con la velocidad  $v$ , mientras que para  $v = 0$  tienen la forma de estructuras periódicas estacionarias.

## 6. ESTRUCTURAS LOCALIZADAS

Si se considera el término adicional  $v\partial_x u$  en la Ec. 1, resulta la ecuación:

$$\partial_t u = v\partial_x u + \partial_x^2 u + a u + b u^3 + c u^5. \quad (22)$$

La cual, en el caso estacionario toma la misma forma que la Ec. 4:

$$v\partial_x u + \partial_x^2 u + a u + b u^3 + u^5 = 0, \quad (23)$$

donde se ha tomado como antes  $c = 1$ .

Nótese que en esta ecuación si  $u$  es solución de la misma,  $-u$  también lo es. Otra simetría, en este caso de reflexión, surge de que la ecuación (23) no sufre ninguna modificación si se hacen los cambios  $v \rightarrow -v$  y  $x \rightarrow -x + 2x_0$ , donde  $x_0$  es una constante arbitraria. Se tiene así que si  $u_1(x)$  es solución de (23),  $u_2(x) = u_1(2x_0 - x)$  también lo es. Debe hacerse notar que aquí  $v$  no debe interpretarse necesariamente como una velocidad, ya que en este caso el parámetro  $v$  ha aparecido en un nuevo término insertado en la ecuación original. Estructuras estacionarias localiza-

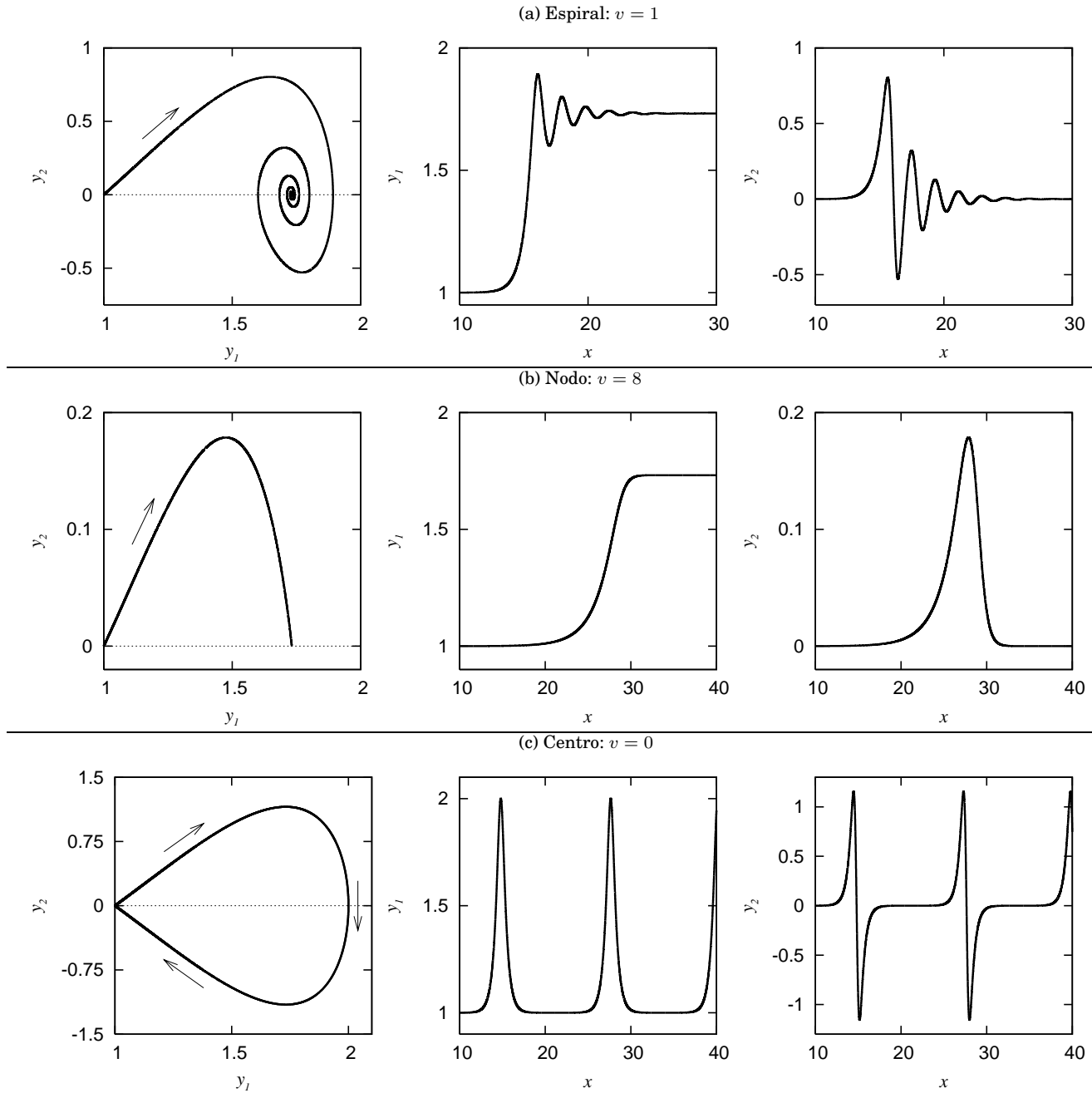


FIG. 3.— Trayectorias que conectan puntos fijos de los tipos  $B_1$  y  $B_2$  de la Fig. 1 para el caso  $\alpha = 3/4$  con  $a = 3$  y  $b = -4$ . Se muestran las correspondientes amplitudes  $y_1$  y  $y_2$  como funciones de la posición  $x$  (el valor del tiempo es arbitrario), las cuales para  $v > 0$  tienen la forma de frentes (*kinks*) que viajan hacia la derecha con la velocidad  $v$ , mientras que para  $v = 0$  tienen la forma de estructuras periódicas estacionarias.

das espacialmente pueden ser construidas entonces ensamblando las soluciones  $u_1$  y  $u_2$ . Las únicas condiciones para que tanto las amplitudes como sus derivadas primera y segunda empalmen en el punto  $x_0$  son que las derivadas primeras en este punto sean nulas. De esta manera, sólo es posible un ensamblaje con soluciones que involucren puntos fijos espirales como las de las Figs. 2a y 3a.

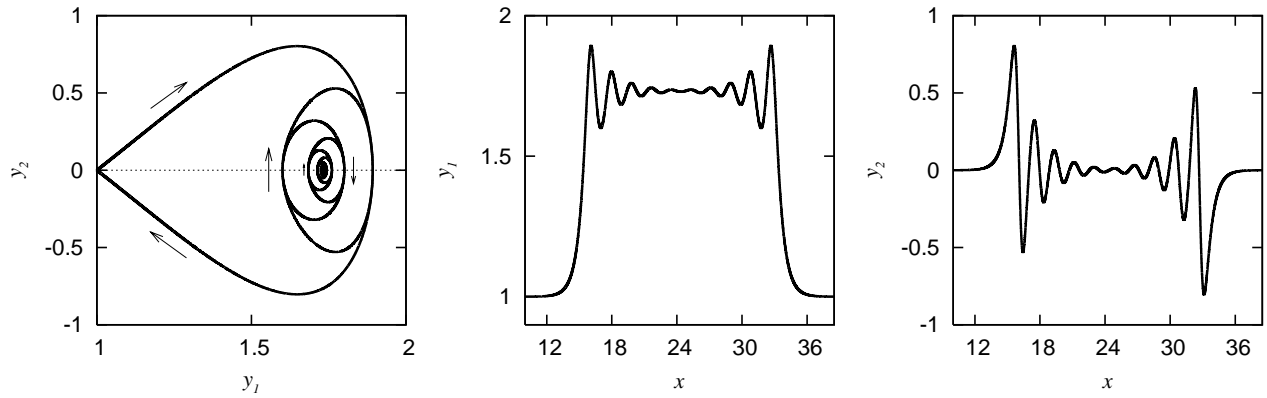
En la Fig. 4 se muestran tres estructuras localizadas representativas obtenidas usando las trayectorias del caso de la espiral de la Fig. 3a. Como

puede observarse en la misma, se tienen tanto formas del tipo de dominios localizados (estructuras anchas) como de pulsos localizados (estructuras delgadas). Estas estructuras deben verse como un tipo especial de estructuras conocidas en general como *solitones*.

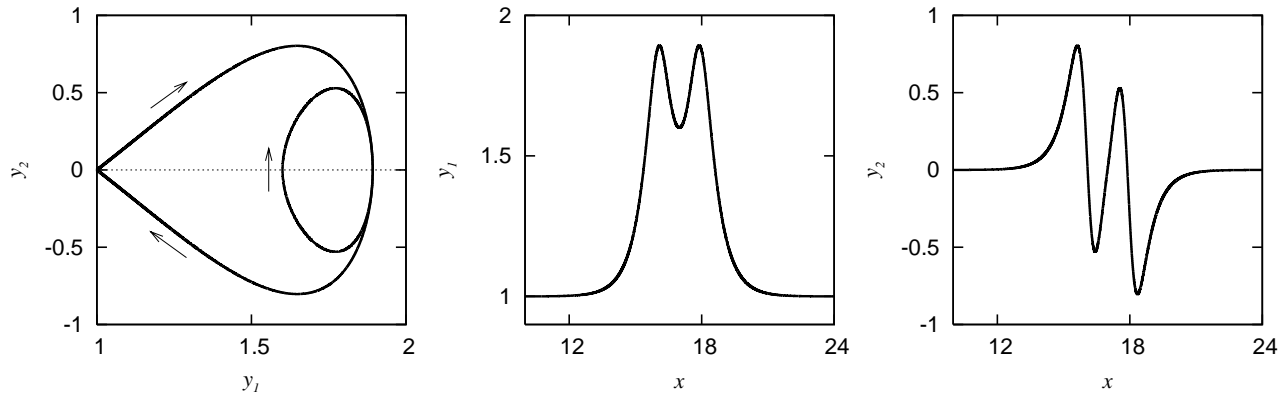
## 7. SUMARIO Y CONCLUSIONES

Se ha abordado el problema de la resolución de una ecuación parabólica de amplitud de tipo difusivo en una dimensión considerando monomios en la

(a) Ensamblaje usando el quinto mínimo local.



(b) Ensamblaje usando el primer mínimo local.



(c) Ensamblaje usando el primer máximo local.

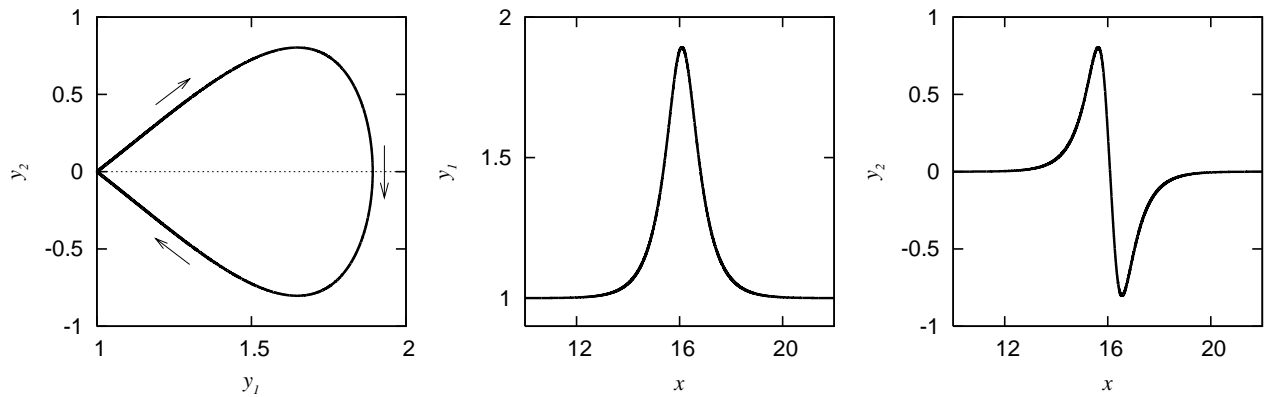


FIG. 4.— Estructuras localizadas obtenidas del ensamblaje de las trayectorias espirales de la Fig. 3a que conectan puntos fijos de los tipos  $B_1$  y  $B_2$  de la Fig. 1 para el caso  $\alpha = 3/4$  con  $a = 3$  y  $b = -4$ . Se muestran sólo tres ejemplos representativos para tres valores de  $x_0$ : (a)  $x_0$  coincide con el quinto mínimo local, dando una estructura de la forma de un dominio localizado en el espacio; (b)  $x_0$  coincide con el primer mínimo local, dando una estructura con dos picos y un valle entre ellos y (c)  $x_0$  coincide con el primer máximo local, dando la estructura de un pulso localizado.

amplitud de hasta quinto grado, esta es la ecuación de Ginzburg-Landau Cúbica-Quíntica Real, la cual, hasta el tercer grado en la amplitud posee soluciones analíticas exactas, no así cuando tiene incluido el término de quinto grado en la amplitud. Luego de analizar cómo encarar el problema de la resolución y haber agotado las técnicas de aproximación analítica, se ha procedido al análisis de estabilidad lineal de los puntos fijos asociados y la caracterización de los mismos habiendo resumido todos

los posibles casos en un diagrama que relaciona los parámetros. Se han encontrado seis tipos de puntos fijos que pueden ser sillas, espirales, nodos o centros. Luego se ha encontrado que la resolución numérica del problema es la más adecuada, precisa y rápida una vez que se han identificado todas las posibles trayectorias que puedan conectar los puntos fijos mencionados. Por razones prácticas de integración numérica se ha visto que el comenzar la integración a partir de la variedad inestable de una silla es el

mejor camino en cuanto a precisión y también con el fin de asegurar que las soluciones estén acotadas y conecten puntos fijos. De esta manera se han hallado y se muestran en este trabajo soluciones típicas que dan lugar a comportamientos monótonos de los *kinks* cuando se conectan una silla y un nodo; comportamiento oscilatorios amortiguados de los mismos, cuando se conecta una silla con un punto fijo espiral y la desaparición de los *kinks* cuando el término de disipación desaparece, dando lugar a estructuras periódicas en el espacio. Todo esto desde un punto de vista de *kinks* que viajan estacionariamente en uno u otro sentido del único eje espacial considerado. Sin embargo, aparte de estas soluciones tipo frentes viajeros o de patrones periódicos, las propiedades de simetría de reflexión de la ecuación estudiada permiten la construcción de patrones o estructuras estacionarias localizadas espacialmente, mediante el ensamblaje de pares de soluciones que cumplan las con-

diciones de que tanto la amplitud como sus derivadas sean iguales en en punto de ensamblaje, condición que sólo se da en el caso de que las primeras derivadas de dichas soluciones en dicho punto sean nulas, por lo tanto este procedimiento sólo resulta posible para las trayectorias que conectan puntos silla con puntos fijos espirales. Dada la presencia de espirales en las soluciones encontradas, el procedimiento de ensamblaje resulta aplicable y se encuentran dos tipos principales de estructuras localizadas: dominios y pulsos localizados.

Finalmente, todos estos resultados deben ser puestos a prueba experimentalmente, principalmente en problemas de difusión estacionarios, una primera experiencia es la de aplicarlos a la ecuación no-lineal de difusión del calor en un sistema compuesto por un reservorio de agua en contacto con la atmósfera, por ejemplo.

#### REFERENCIAS

- Ali, A. H. A., Soliman, A. A., & Raslan, K. R. 2007, Phys. Lett. A, 368, 299
- Aranson, I. S. & Kramer, L. 2002, Reviews of Modern Physics, 74, 99
- Babolian, E. et al. 2009, Appl. Math. Sciences, 3, No. 45, 2215
- Coullet, P. 2002, Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng., 12, 2445
- Descalzi, O. 2003, Phys. Rev. E, 67, 015601
- Henderson-Sellers, B. 1981, Hydrological Sciences Journal, 26:4, 363
- Kalashnikov, V. L. 2009, Phys. Rev. E, 80, 046606
- Kuznetsov, Y. A. 1995, Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition (Springer-Verlag)
- Lin, J. 2009, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 4, No. 5, 225
- Maruno, K., Ankiewicz, A., & Akhmediev, N. 2005, Phys. Lett. A., 347, 231
- Meiss, J. D. 2007, Differential Dynamical Systems (siam)
- Nguenang, J.-P., Njassap Njassap, T., & Kofané, T. C. 2008, Eur. Phys. J. B, 65, 539
- Pelap, F. B., Kenfack, A. J., & Faye, M. M. 2007, Nonlinear Oscillations, 10 No. 2, 277
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 1992, Numerical Recipes in FORTRAN, Second Edition (Cambridge University Press)
- Sachdev, P. L. 2000, Exact Solutions of Nonlinear Problems (Chapman & Hall/CRC)
- Strogatz, S. H. 1994, Nonlinear Dynamics and Chaos (Perseus Books)
- Sun, S. F. et al. 2008, Sci China Ser G-Phys Mech Astron, 51, No 8, 1010
- Wei, J. & Winter, M. 2004, Proceedings of the American Mathematical Society, 133 No. 6, 1787