

## MODELO DE INTERACCIONES ELÉCTRICAS EN UN SISTEMA CONFINADO DE ESFERAS CARGADAS

F. Ghezzi<sup>1</sup>, R. Grieve<sup>2</sup>, D. Sanjinés<sup>1</sup>, X. H. Zheng<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad Mayor de San Andrés, Carrera de Física  
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635  
La Paz–Bolivia

<sup>2</sup>Queen's University Belfast, Dept. Pure & Appl. Phys.  
Belfast BT7 1NN, United Kingdom

### RESUMEN

Se reporta los resultados experimentales en un sistema de varias esferas metálicas pequeñas que reposan sobre la placa inferior de un capacitor de placas paralelas cuadradas; el sistema de esferas está confinado lateralmente por un contorno cuadrado cargado eléctricamente que impide que las esferas se dispersen en 2D. El objetivo de este trabajo surge de una gran y creciente evidencia de datos experimentales sobre fases condensadas en 2D que aún carece de un modelo teórico definitivo que permita interpretar tales resultados (por ejemplo, el proceso de liquefacción en 2D). En este trabajo se desarrolló un sistema de validación para establecer las interacciones entre esferitas cargadas y el contorno de confinamiento. La investigación comprendió el montaje experimental, su calibración y la adquisición de datos. Se muestra que el modelo de interacción coulombiano es razonable para interpretar los resultados experimentales de este trabajo, aunque también es posible una interacción dipolar debido a la formación de cargas imagen en los platos del capacitor.

*Descriptores: problemas de contorno en electrostática; transiciones de fase; técnicas computacionales.*

### ABSTRACT

We report the experimental results of a system of several millimeter-size metallic spheres lying over the lower plate of a parallel plate square capacitor; the spheres are laterally confined by a square metallic electrically charged boundary which prevents the spheres from being dispersed in 2D. The large and growing evidence of experimental data of condensed phases in 2D still lacks a definitive theoretical model that permits the interpretation of such data (for example the process of melting in 2D). In this work we have developed a validation system to establish the interactions among the spheres and the confining boundary. The research involved the experimental set up, its calibration and data gathering. We show that the Coulombian interactions model is reasonable for interpreting the experimental data in this work, although a dipole interaction is also possible due to the formation of image charges on the capacitor plates.

*Key words: boundary value problems in electrostatics; phase transitions; computational techniques.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los intentos más tempranos para modelar fases condensadas en escalas casi macroscópicas fue llevado a cabo por Bragg [1]. Este modelo consistió de islas flotantes de burbujas de aire creadas sobre la superficie de una solución jabonosa. La estructura resultante fue evolucionando temporalmente hasta convertirse en una red triangular perfecta. Ya que las burbujas tienen simetría esférica, la red triangular es consistente con un sistema en ausencia de vibraciones térmicas (0 K). Además, estos sistemas permiten la observación de defectos en la estructura cristalina, tal como lo señaló Friedel [2]. Bernal propuso un sistema similar consistente de esferas metálicas idénticas confinadas dentro de un volumen irregular, de donde obtuvo estructuras amorfas similares a las de un líquido simple [3]. Pierański adaptó un simulador mecánico de esferas metálicas a fin de demostrar los conceptos básicos de las fases cristalinas y líquidas. Tomando fotografías de larga exposición, Pierański pudo visualizar los estados sólido y líquido del sistema cuando éste era afectado por un cambio de volumen. Pierański también utilizó este sistema para observar la estructura de las dislocaciones y de la coexistencia de las fases líquida y sólida en presencia de la gravedad inclinando paulatinamente el sistema a partir de la horizontal.

Blonder [4] propuso un modelo de esferas metálicas milimétricas que se pueden mover libremente sobre el plato inferior de un capacitor de placas paralelas. Al aplicar alto voltaje DC al capacitor las esferas adquieren la misma carga y en consecuencia se repelen. Blonder sugirió que este sistema podría usarse para modelar sistemas acoplados electrostáticamente en 2D. Pouligny, Malzender, Ryan y Clark [5] desarrollaron más el modelo a fin de estudiar el proceso de licuefacción en 2D. Entre otras novedades, utilizaron un motor para simular el efecto de la temperatura con un carácter gaussiano. Saint Jean *et al.* [6][7][8] desarrollaron independientemente un sistema similar al de Blonder para investigar las configuraciones del estado base y de estados metaestables en sistemas de Wigner en 2D con un número de partículas entre 2 y 30.

Resumiendo: existe un gran y creciente volumen de datos experimentales sobre el estudio de fases condensadas en 2D. Los sistemas utilizados para realizar dichos experimentos varían de diferentes maneras: la escala del sistema, las partículas

que constituyen los sistemas, las interacciones entre partículas, el confinamiento externo y los potenciales del sustrato (plato inferior del capacitor), el tipo de fuerza que induce la transición de fase y las restricciones impuestas en la observación cuantitativa del sistema en su conjunto. El desarrollo de nuevos modelos es esencial para ampliar nuestro entendimiento y conocimiento del proceso de licuefacción en 2D.

En este artículo reportamos los resultados de nuestros experimentos en un sistema de esferas metálicas que reposan y se pueden mover libremente sobre el plato inferior (sustrato) de un capacitor de placas paralelas de forma cuadrada; el sistema de esferas está confinado lateralmente por un contorno cuadrado cargado eléctricamente que impide que las esferas se dispersen en 2D. Nuestros resultados estarán sujetos a diferentes interpretaciones en tanto no estemos seguros acerca de la naturaleza de la fuerza repulsiva entre las esferas. De hecho, la falta de un modelo confiable sobre la naturaleza de la interacción entre esferas cargadas, aún es una cuestión abierta y ha provocado diferentes opiniones en los trabajos mencionados anteriormente.

En efecto, durante estos últimos años se han propuesto varios modelos teóricos con diferentes tipos de interacciones, como ser: Coulomb, Coulomb apantallada, Lennard-Jones, dipolar, logarítmica y de esfera dura. Estos modelos conducen a diferentes resultados en términos del mecanismo de licuefacción [9][10][11]. Mostraremos que la interacción coulombiana es la que nos parece más razonable en el experimento reportado en este trabajo, y para ello utilizaremos un goniómetro a fin de verificar experimentalmente la plausibilidad de dicha interacción. El montaje más simple comprende a dos esferas, pero resulta inadecuado debido a la relativamente grande fuerza de fricción. Así pues, decidimos medir la fuerza repulsiva en un arreglo de varias esferas asistidos por un método computacional que permite medir la deformación del arreglo debido a un gradiente gravitacional. Los efectos debidos al contorno que encierra al arreglo de esferas se toman en cuenta por una técnica especial.

## 2. INTERACCIÓN DIPOLAR

En un capacitor como el que se muestra en la Fig. 1, el campo eléctrico separa por inducción las cargas positiva y negativa de una esfera metálica. Así, debido al tamaño finito de las esferas, la distan-

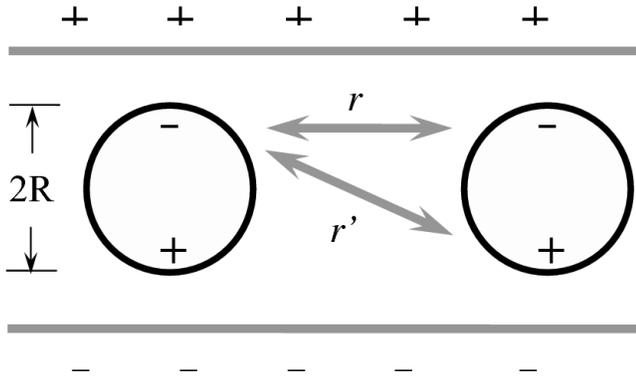


Figura 1. Interacción dipolar.

cia  $r$  entre cargas del mismo signo resulta ser menor que la distancia  $r'$  entre cargas de signo opuesto. En consecuencia, la fuerza repulsiva asociada a  $r$  domina sobre la fuerza atractiva asociada a  $r'$  dando como resultado una interacción que, bajo una aproximación razonable, contiene un término dominante de fuerza dipolar repulsiva que será menor que la repulsión coulombiana (que no está contrabalanceada por fuerzas atractivas).

La fuerza dipolar entre las dos esferas de la Fig. 1 se expresa como

$$f_D = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r^2 + 4R^2) - r^2}{r^2(r^2 + 4R^2)}, \quad (1)$$

donde  $Q$  es la cantidad de carga polarizada (no de carga neta), que está indicada por '+' o por '-' dentro de las esferas;  $R$  es el radio de cada esfera y  $r$  es la distancia entre los centros de las esferas. La fuerza de Coulomb entre dos esferas idénticas separadas por la misma distancia  $r$  está dada por

$$f_M = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}, \quad (2)$$

donde  $Q$  es la carga neta en cada esfera. Como ya se sabe,  $f_D$  es menor que  $f_M$ .

El mecanismo de inducción que da lugar a la fuerza dipolar no requiere el contacto físico de las esferas con el plato inferior del capacitor. Sin embargo, cuando se interpuso una plancha aislante sobre este plato inferior, separando así las esferas del plato conductor, la fuerza repulsiva entre las esferas fue mucho menor, por lo que aparentemente la interacción dipolar por sí sola no es adecuada a fin de explicar la verdadera naturaleza de la interacción entre las esferas.

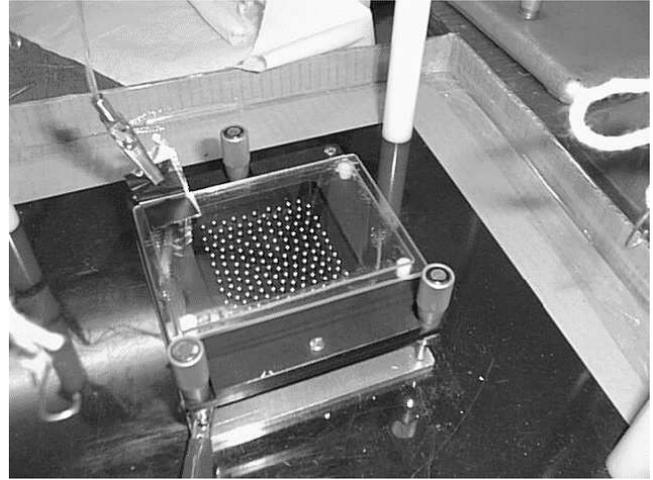


Figura 2. Montaje experimental del goniómetro.

### 3. EL GONIÓMETRO

En el goniómetro de la Fig. 2 se utiliza un marco de confinamiento cuadrado. Tres tornillos micrométricos permiten controlar la inclinación del sustrato, lo que añade una fuerza  $mg\sin\theta$  sobre cada esfera del arreglo, donde  $\theta$  es el ángulo del sustrato con respecto a la horizontal. Así, el cambio de la estructura global del arreglo de esferas permite medir con precisión la fuerza de Coulomb al ser ésta contrarrestada por la fuerza de gravedad una vez que el arreglo llega a su configuración de equilibrio.

En principio sólo se requeriría dos esferas para medir por éste procedimiento la fuerza de Coulomb. Y de hecho así se hizo al comienzo: una esfera se mantenía fija mientras la otra se movía a lo largo de un carril rectilíneo. No obstante, los resultados de este procedimiento fueron desechados debido a los efectos de la fricción que resultan significativos cuando no están contrarrestados como ocurre en un arreglo de muchas esferas.

### 4. PROCEDIMIENTO DE VALIDACIÓN

En un típico experimento para medir la fuerza de Coulomb se utilizaron 169 esferas puestas adentro de un capacitor con un contorno cuadrado de confinamiento (Fig. 3(a)). El arreglo resultante de esferas se distorsiona cuando el nivel del capacitor se inclina a partir de la horizontal. El ángulo de inclinación varía en incrementos de aproximadamente  $0,01^\circ$ , hasta que algunas de las esferas en la parte inferior están muy cerca entre sí. Luego el proceso se invierte de manera reversible hasta que de nuevo el sistema está horizontal.



Figura 3. Efectos debidos a la gravedad y a la fuerza repulsiva de Coulomb: (a) configuración de esferas sobre un plano horizontal; (b) configuración distorsionada debido a la inclinación del plano del arreglo.

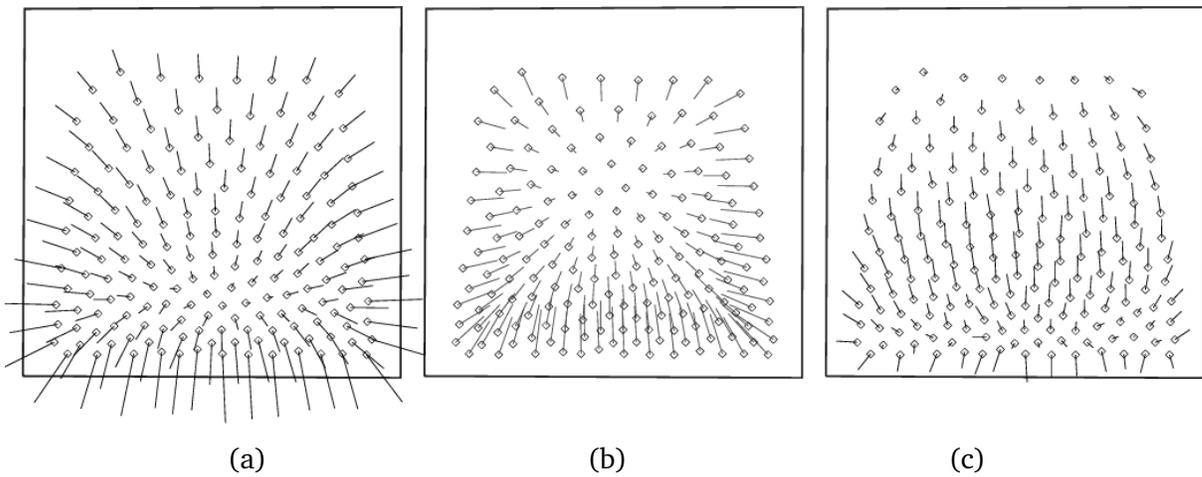


Figura 4. Arreglo de esferas en un plano inclinado: (a) campo de fuerza repulsiva coulombiana; (b) campo de fuerza de confinamiento; (c) campo de fuerza residual. En cada caso el campo de fuerza se indica por líneas cuya longitud es proporcional a la magnitud de la fuerza y cuya dirección corresponde a la del vector fuerza.

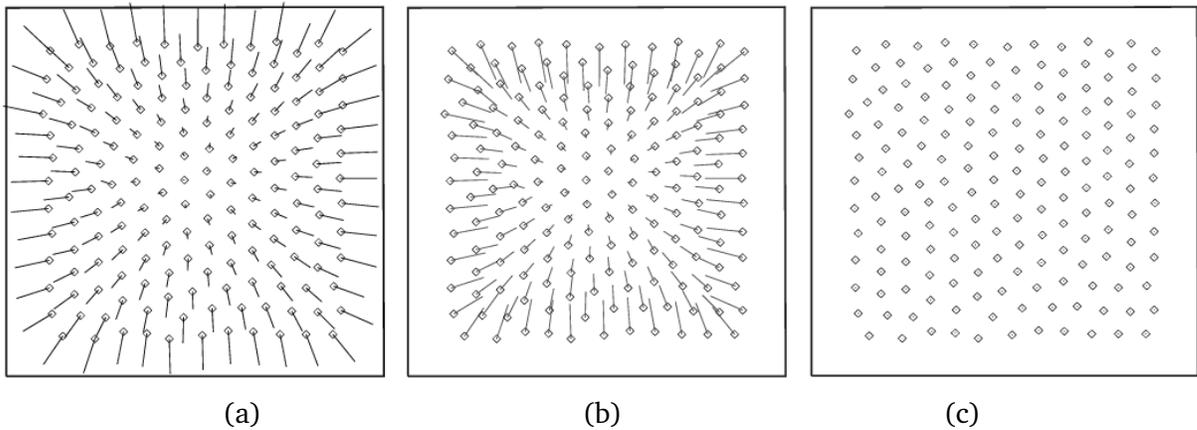


Figura 5. Arreglo de esferas en un plano horizontal: (a) campo de fuerza repulsiva coulombiana; (b) campo de fuerza de confinamiento; (c) campo de fuerza residual nulo que indica el estado de equilibrio como efecto combinado de la fuerza repulsiva y la fuerza de confinamiento.

Luego, en cada uno de los 12 a 13 pasos durante la inclinación, se toma una fotografía digital (imagen CCD) al la que se aplica un algoritmo que permite calcular la posición de cada esfera; de aquí ya se puede calcular la fuerza de interacción de Coulomb. Aunque solo bastarían dos configuraciones de esferas (una de ellas debe ser la correspondiente a la horizontal), en este trabajo hemos utilizado información de todas las configuraciones correspondientes a los diferentes pasos de inclinación a fin de obtener una curva de ajuste confiable para la fuerza de Coulomb.

Como se aprecia en la Fig. 3(a), la fuerza de repulsión entre las esferas está balanceada (una vez tomado en cuenta en efecto del contorno de confinamiento), mientras que en la Fig. 3(b) la nueva configuración de las esferas refleja el efecto de la gravedad. Así pues tenemos que la expresión

$$\sum_{j=1}^{169} \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}'_i + mg \sen \theta = 0 \quad (3)$$

representa a la fuerza total que actúa en la  $i$ -ésima esfera ( $i = 1, 2, \dots, 169$ ). En (3)  $\mathbf{f}'_i$  es la fuerza de confinamiento sobre la  $i$ -ésima esfera, mientras que  $mg \sen \theta$  es la componente del peso. Ya que suponemos una interacción de Coulomb, ésta está dada por

$$\mathbf{f}_{ij} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}, \quad (4)$$

donde  $Q$  es la carga neta en cada esfera y  $\mathbf{r}_{ij}$  es el desplazamiento entre la  $i$ -ésima y la  $j$ -ésima esferas.

En nuestra convención, la dirección de  $y$  está definida a lo largo de la pendiente de inclinación. La componente  $x$  de  $\mathbf{f}_{ij}$  no es relevante en el cálculo de la fuerza de Coulomb. Calculamos luego la componente  $y$  de  $\mathbf{f}_{ij}$  para cada esfera según (4). Sustituyendo el resultado en (3), donde el valor de  $mg \sen \theta$  se puede determinar con precisión, podremos entonces estimar el valor de  $Q$ . Numéricamente este valor varía un poco entre esferas, por lo que tomaremos un valor promedio de  $Q$  en este trabajo.

## 5. EQUILIBRIO DE FUERZAS

No podemos usar (3) a fin de calcular la fuerza de Coulomb a menos que se conozca la fuerza de confinamiento  $\mathbf{f}'_i$  debida al contorno que contrarresta la fuerza repulsiva de Coulomb.

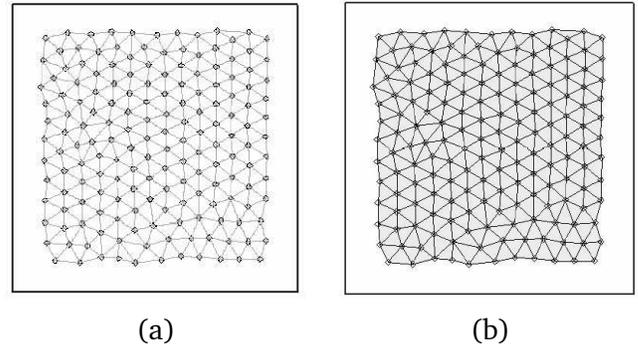


Figura 6. (a) red triangular; (b) elementos triangulares (sombreado gris).

En la Fig. 4(a) se ilustra los valores de la fuerza de Coulomb  $\sum_j \mathbf{f}_{ij}$  calculada según (4), que se compara con la fuerza de confinamiento  $\mathbf{f}'_i$  mostrada en la Fig. 4(b). La diferencia entre la fuerza de Coulomb y la fuerza de confinamiento es lo que denominamos “fuerza residual”; esta fuerza residual contrarresta la gravedad, como se muestra en la Fig. 4(c). Podemos ver que el campo de fuerza residual calculada así no es uniforme, probablemente debido a algún error numérico al estimar la fuerza de confinamiento.

La fuerza de confinamiento medida en un nivel horizontal está libre del efecto de la gravedad. Calculamos entonces la fuerza repulsiva de Coulomb entre esferas como se muestra en la Fig. 5(a). Las fuerzas se balancean en torno al centro del arreglo de esferas, pero se incrementa hacia el exterior del arreglo. Invertimos entonces esta fuerza repulsiva tomándola como la fuerza que confina las esferas en sus posiciones. Aparentemente, esta fuerza de confinamiento no debe cambiar al inclinar el arreglo; en efecto, medimos esta fuerza en todas las 169 posiciones del arreglo para todos los ángulos de inclinación del arreglo. Si los 169 valores así medidos de la fuerza repulsiva pudieran, de alguna manera, extrapolarse a través de todo el arreglo, entonces podríamos aislar el efecto de la gravedad cuando el arreglo se inclina.

## 6. RED DE EXTRAPOLACIÓN LINEAL

La Fig. 6(a) muestra una red triangular con 169 nodos indicando las posiciones de las esferas cuando el arreglo está horizontal y donde se conoce la fuerza de confinamiento. Deseamos pues extrapolar los valores de la fuerza al área limitada por la red que está sombreada en gris en la Fig. 6(b). Por simplicidad suponemos que la fuerza de confinamiento varía linealmente en la región gris (extrapolación

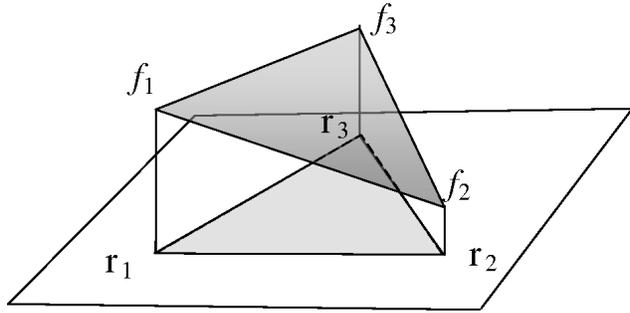


Figura 7. Extrapolación lineal de  $f_i$  definida en  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

lineal).

En la Fig. 7 se muestra un elemento simple de la red. Los nodos de este elemento están ubicados en las posiciones  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  y  $\mathbf{r}_3$ . Los vectores de las fuerzas correspondientes a estos nodos son  $(f_1, g_1)$ ,  $(f_2, g_2)$  y  $(f_3, g_3)$  (por claridad sólo se muestran las componentes  $x$  de las fuerzas en la Fig. 7). Los valores de las fuerzas que resultan de la extrapolación lineal yacen sobre la región sombreada en gris, y se calcularon de acuerdo a:

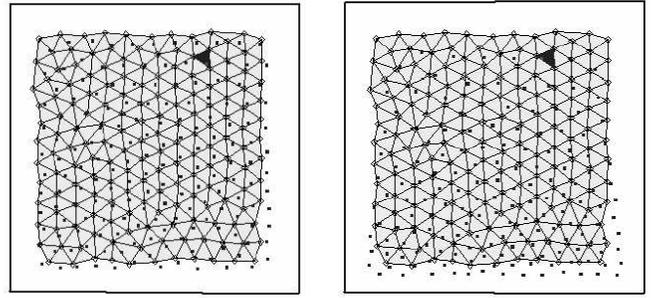
$$f = Ax + By + C, \quad (5a)$$

$$g = Dx + Ey + F, \quad (5b)$$

donde  $(f, g)$  son las componentes de la fuerza definida en las coordenadas  $(x, y)$  de la región triangular. Así, las seis constantes  $A, B, C, D, E$  y  $F$  se determinan por los seis valores de  $f$  y  $g$  dados en los nodos.

Una vez que el arreglo se inclina, las esferas se mueven a partir de sus posiciones nodales, tal como se muestra en la Fig. 8. Sustituyendo las nuevas coordenadas en (5) obtenemos la fuerza de confinamiento. Sin embargo, ya que las constantes en (5) corresponden a cada elemento triangular particular, debemos conocer en cuál elemento se encuentra la esfera. Identificamos el triángulo en el que la esfera se encuentra por medio de un procedimiento numérico automático. Para una cierta esfera (disco gris en la Fig. 9) calculamos tres “ángulos de prueba” de acuerdo a

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r})|}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}|}, \\ \text{sen } \beta &= \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})|}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}|}, \\ \text{sen } \gamma &= \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r})|}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}| |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}|}, \end{aligned} \quad (6)$$



(a)

(b)

Figura 8. Coordenadas de las esferas (puntos negros) sobre un plano inclinado relativo a la red: (a)  $\theta = 0,40^\circ$ ; (b)  $\theta = 0,69^\circ$ .

donde  $r$  es la coordenada de la esfera. En nuestro algoritmo  $r$  está fija mientras variamos  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  y  $\mathbf{r}_3$  a medida que el programa barre todos los elementos triangulares de la red. Si  $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$  entonces la esfera debe hallarse dentro del triángulo que se está examinando en ese momento.

En la Fig. 8 algunas esferas se encuentran afuera de los elementos triangulares. Cada una de estas esferas estará asociada con aquel elemento triangular que asegure un valor máximo para  $\alpha + \beta + \gamma$ , y éste es el que estará más próximo a la esfera. En este caso (5) aún es válida en términos de la extrapolación lineal, aunque la intensidad de la interacción estará de alguna forma subestimada.

## 7. MODELO PARA LA FUERZA REPULSIVA

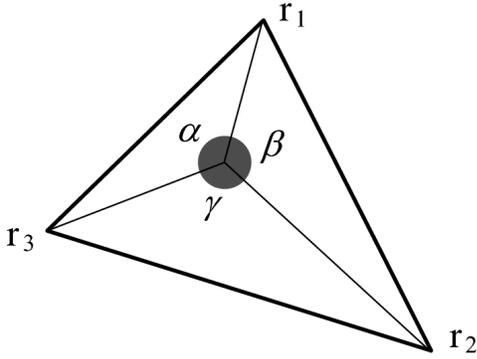
En esta sección propondremos un modelo simple para representar analíticamente la fuerza repulsiva entre esferitas de radio  $R$ .

En el capacitor mostrado en la Fig. 10 el electrodo superior está cargado a un potencial  $V_0 \sim 5000$  V, mientras que el electrodo inferior y el contorno lateral están “aterrizados” (potencial nulo). Si consideramos la variación lineal  $V(y)$  del potencial entre los electrodos en ausencia de esferitas dentro del capacitor, tenemos que

$$V(y) = \frac{y}{H} V_0, \quad (7)$$

donde  $H$  es la separación entre los electrodos y  $y$  es la altura a partir del electrodo inferior. Supongamos que el potencial dado por (7) con  $0 < y < 2R$  corresponde al de una carga neta  $Q$  distribuida uniformemente sobre la superficie de la esfera de radio  $R$ , para la cual

$$V' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (8)$$

Figura 9. Triángulo con tres ángulos de prueba  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ .

es el potencial. Entonces, si admitimos que  $V(y) = V'$ , de (7) y (8) se encuentra que la carga neta de la esferita —como función de la altura  $y$ — debe ser

$$Q = 4\pi\epsilon_0 V_0 \frac{y}{H} R, \quad (9)$$

lo que conduce a

$$f_M = 4\pi\epsilon_0 V_0^2 \left(\frac{y}{H}\right)^2 \left(\frac{R}{r}\right)^2, \quad (10)$$

que es la fórmula para la fuerza repulsiva coulombiana entre dos esferas separadas por una distancia  $r$ , donde el valor de  $y$  debe ser ajustado experimentalmente.

## 8. RESULTADOS

A fin de calcular el valor de  $y$  en (10) graficamos nuestros datos experimentales en la Fig. 11. Aquí hemos reemplazado a (10) con

$$F = \left(\frac{R}{y}\right)^2 f_M = 4\pi\epsilon_0 V_0^2 \left(\frac{R}{H}\right)^2 \left(\frac{R}{r}\right)^2, \quad (11)$$

que conduce, a través de (3), a la fuerza residual normalizada, esto es, la componente  $y$  del término  $\sum_j \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}'_i$  que contrarresta a la componente gravitacional a lo largo de la pendiente del arreglo. El ajuste lineal de los datos de las Figs. 11(a) y 11(b) da como resultado

$$y = 1,947x - 0,592, \quad (12a)$$

$$y = 1,982x + 0,120, \quad (12b)$$

respectivamente.

En la Fig. 11(a) comenzamos a partir del nivel horizontal del arreglo hasta un cierto nivel máximo de inclinación. Los resultados se indican con marcas en forma de cuadrado. Luego reducimos la inclinación hasta que el arreglo de nuevo esté al nivel

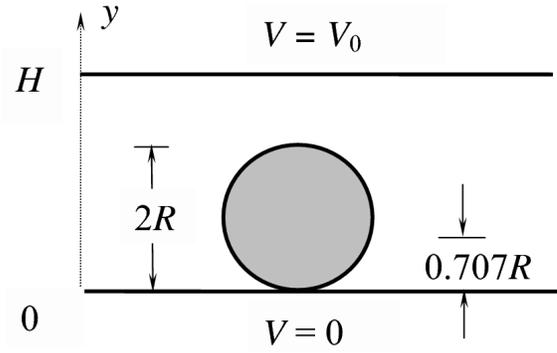


Figura 10. Esfera dentro de un capacitor.

horizontal. Los resultados en este caso se indican con marcas en forma de rombo. Los datos de la Fig. 11(b) corresponden a las mismas mediciones. La diferencia entre las Figs. 11(a) y 11(b) surge del uso de diferentes redes de referencia (ver Fig. 6) para medir la fuerza de confinamiento del contorno. La red usada en la Fig. 11(a) se tomó de la primera imagen CCD del experimento, mientras que la red usada en la Fig. 11(b) se tomó de la última imagen CCD; en ambos casos el arreglo está a nivel horizontal. Usando (11) y (12) podemos suponer razonablemente que  $(R/y)^2 = 2$  (dentro del error experimental), por lo que tenemos

$$F = 2\pi\epsilon_0 V_0^2 \left(\frac{R}{H}\right)^2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad (13)$$

como la expresión para la fuerza repulsiva de Coulomb entre esferas. La fórmula (13) significa que el potencial generado por la carga neta de la esfera es igual al potencial del capacitor a una altura  $y = 0,707 R$  (Fig. 10).

Medimos asimismo la fuerza de Coulomb usando esferas de 5 mm. Los resultados se muestran en la Fig. 12. En este caso, la ecuación (12) se reemplaza por

$$y = 2,059x + 5,239, \quad (14)$$

y de nuevo se obtiene  $(R/y)^2 \sim 2$ , lo que confirma la validez de (13).

## 9. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se ha desarrollado un sistema de validación para encontrar las interacciones entre esferitas cargadas confinadas dentro de un contorno rectangular; el montaje experimental, su calibración y la toma de datos fueron parte de este trabajo. Para este propósito fue necesario elaborar un algoritmo específico que nos permita interpretar las configuraciones espaciales de esferitas en términos de sus interacciones.

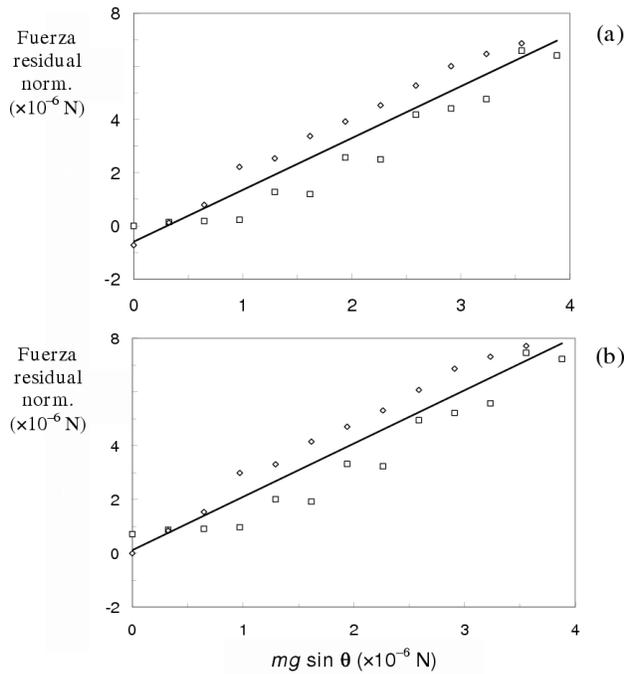


Figura 11. Fuerza residual de Coulomb normalizada vs. componente de la gravedad (para esferas de 2 mm). Las marcas cuadradas corresponden a la inclinación ascendente y las marcas romboidales corresponden a la inclinación descendente. (a) datos referidos al primer nivel; (b) datos referidos al segundo nivel. Las líneas sólidas corresponden al ajuste lineal de los datos.

Debe mencionarse que aún persiste una cierta ambigüedad en varias áreas de interés actual en la física sobre el carácter y comportamiento precisos de la interacción entre esferas y entre el contorno de confinamiento a corta distancia. La interacción dipolar que se sugiere en algunos trabajos previos como posible forma de interacción fue excluida en este trabajo. Sin embargo, suponemos que una forma diferente de interacción dipolar es muy posible debido a la formación de cargas imagen en los platos del capacitor, lo que ya se sugiere en el trabajo pionero de Blonder [4]. Esto motiva un mayor ímpetu hacia el estudio detallado del carácter de las interacciones entre esferitas y se sugiere como tema de motivación para trabajos futuros, por ejemplo, en lo referido a la investigación sobre los mecanismos de liquefacción.

Finalmente, hemos mostrado que el modelo de interacción coulombiano es razonablemente ade-

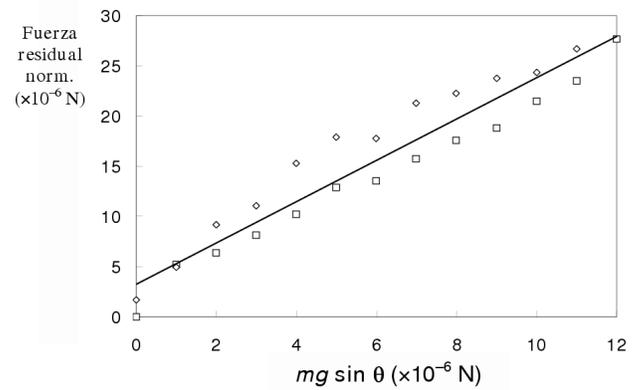


Figura 12. Fuerza residual de Coulomb normalizada vs. componente de la gravedad (para esferas de 5 mm). Las marcas cuadradas corresponden a la inclinación ascendente y las marcas romboidales corresponden a la inclinación descendente.

cuado para interpretar las interacciones entre esferitas y el contorno de confinamiento. Esperamos que este modelo pueda ser útil para otros experimentos donde se incluye a la temperatura como un parámetro de control. Esperamos además que este modelo se pueda implementar para propósitos educativos.

REFERENCIAS

[1] Bragg L., Nye J. F.; *Proc. R. Soc. London* **190**, 474 (1979).  
 [2] Friedel J.; *Dislocations* (Pergamon, New York, 1964).  
 [3] Bernal J. D.; *On Liquids: Structure, Properties, Solid Interactions*, pp. 25-47; ed. Hugnel T. J., Elsevier, Armserdam (1965).  
 [4] Blonder G. E.; *Bull. Am. Phys. Soc.* **30**, 5403 (1985).  
 [5] Pouligny B., Malzender R., Ryan P., Clark N. A.; *Phys. Rev. B* **42**, 988 (1990); Malzender, *Ph D Thesis* (1990).  
 [6] Saint Jean M., Even C., Guthmannn C.; *Europhys. Lett.* **55** (1), 45 (2001).  
 [7] Saint Jean M., Guthmann C.; *J. Phys.: Condens. Matter* **14**, 13653 (2002).  
 [8] Saint Jean M., Guthmann C., Coupier G.; *Eur. Phys. J. B* **39**, 61 (2004)  
 [9] Zheng X. H., Earnshaw J. C.; *Europhys. Lett.* **41** (6), 635 (1998).  
 [10] Ryzhovand V. N., Tareyeva E.E.; *Physica A* **314**, 396-404, (2002).  
 [11] Schweigert I.V., Schweigert V.A., Peeters F.M.; *Phys. Rev. Lett.* **82**, 5293 (1999).