

## SIMULACIÓN DE PÉNDULOS ACOPLADOS

A. R. Ticona Bustillos, G. M. Ramírez Ávila

*Instituto de Investigaciones Físicas  
Universidad Mayor de San Andrés  
Casilla 8635, La Paz–Bolivia*

### RESUMEN

Sobre la base de un modelo discreto de péndulo amortiguado, estudiamos el comportamiento de dos péndulos acoplados, proponiendo un factor sencillo de acoplamiento entre ellos. Los resultados de este modelo son comparados con datos reales, obteniendo resultados muy parecidos. Estudiamos el comportamiento de este sistema en función de sus diferentes parámetros, pudiendo distinguir regiones en las cuales se observa resonancia y posiblemente condiciones para la sincronización y caos.

*Descriptor:* mecánica clásica — dinámica no-lineal — sincronización y caos

### ABSTRACT

Based on a discrete model of a damped pendulum, we study the behavior of two coupled pendula, applying a simple connection factor between them. We find that the results of this model fit with the real data. The behavior of this system is studied as a function of its different parameters in which regions of resonance are observed and probable conditions are set for synchronization and chaos.

*Key words:* classical mechanics — non-linear dynamics — synchronization and chaos

### 1. INTRODUCCIÓN

Los comportamientos oscilatorios son ubicuos en la naturaleza en sistemas de toda índole, entre ellos, en cuerpos astronómicos tales como asteroides, satélites, planetas y estrellas; en sistemas biológicos, tanto a nivel orgánico [1] como a nivel bioquímico [2]; en diferentes reacciones químicas [3,4]; en sistemas mecánicos; en circuitos electrónicos, etc. Asimismo, los objetos con comportamientos oscilatorios pueden acoplarse a otros similares lo que da lugar en muchos casos a otro fenómeno muy común que es la sincronización y caracterizada por la constancia de las diferencias de fase y la razón entre los períodos [5,6] Uno de los comportamientos más sencillos y comunes de describir es el del péndulo simple que se lo describe en textos de física básica, de mecánica clásica [7-10], de métodos matemáticos de la física [11,12] ya sean analíticos o basados en álgebra computacional [13] y en textos especializados en oscilaciones [14,15]

Por otra parte, dado el carácter no lineal que puede presentar el péndulo simple en su forma más general, es también objeto de análisis en libros y artículos de dinámica no lineal [16-21]. Los sistemas acoplados se presentan en muchas ramas de la física, ofreciendo una gran gama de características que dependen tanto de las propiedades de los sistemas independientes, como de las propias características de acoplamiento.

Uno de estos sistemas es el compuesto por dos péndulos simples acoplados mediante un hilo o una barra flexible, lo que permite el intercambio continuo de impulsos entre los péndulos, cambiando las características de oscilación propias de cada péndulo.

Para cada péndulo se considera que existe amortiguamiento, por lo que la ecuación de movimiento puede escribirse como:

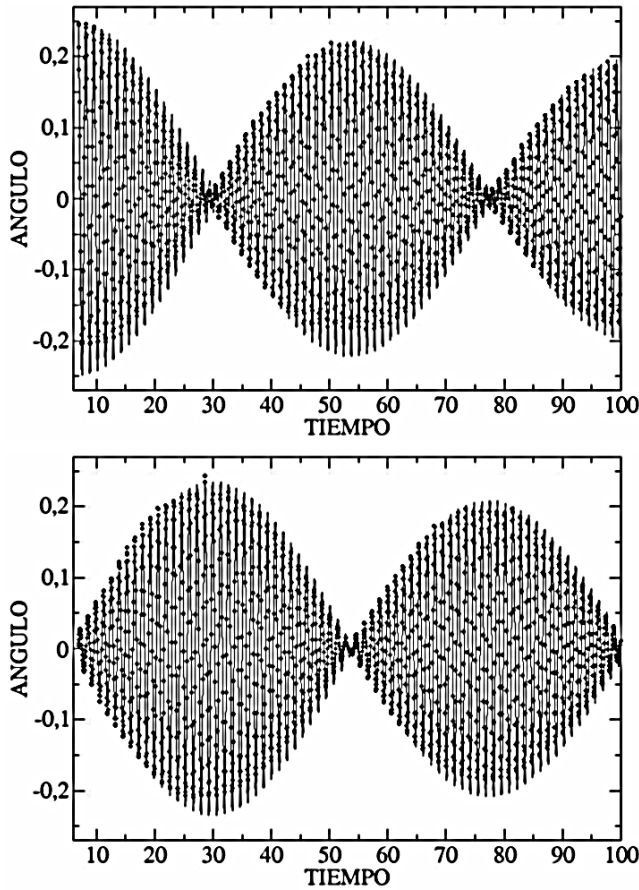


Figura 1. Simulación (líneas continuas) y datos medidos (puntos) de péndulos acoplados por un hilo. Superior: Péndulo con ángulo inicial diferente de cero. Inferior: Péndulo originalmente en equilibrio estático.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{\lambda}{m} \frac{d\theta}{dt}. \quad (1)$$

Procediendo a la discretización de la anterior ecuación como en [22], se obtiene:

$$\theta_{t+1} = \theta_t + b(\theta_t - \theta_{t-1} - K \sin \theta_t), \quad (2)$$

con:

$$b = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{m} \Delta t} \quad \text{y} \quad K = \frac{g \Delta t^2}{l}. \quad (3)$$

Este modelo discreto ya fue utilizado y estudiado por Timoteo da Costa y colaboradores [22], para analizar las condiciones para las cuales el péndulo impulsado por una fuerza externa, experimenta transiciones periodicidad-caos. Por otro lado, constituye una buena herramienta para estudiar situaciones en las cuales las condiciones experimentales no son fáciles de reproducir. Una de estas condiciones es el caso de los péndulos acoplados, donde

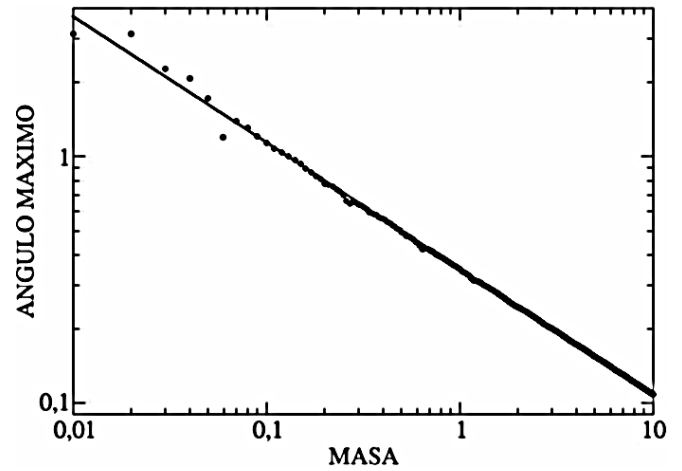


Figura 2. Comportamiento del ángulo máximo del péndulo 2 en función de su masa.

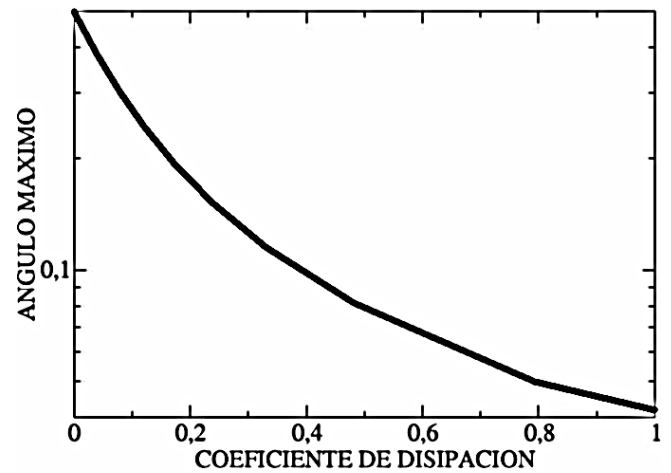


Figura 3. Comportamiento del ángulo máximo del péndulo 2 en función del coeficiente de disipación.

además de las variables ya mostradas existen otras relacionadas con el acoplamiento de los péndulos.

En este trabajo estudiamos el comportamiento de dos péndulos separados por una determinada distancia y acoplados mediante un material con ciertas propiedades de elasticidad, lo que permite la transmisión de movimiento de un péndulo a otro. En la primera parte explicamos el modelo y luego mostramos los resultados preliminares que se obtienen al variar las condiciones de los péndulos.

## 2. MODELO

Sobre la base del modelo de la ecuación (1) proponemos un acoplamiento dado por:

$$\frac{w}{m} \sin \theta \quad (4)$$

Al introducir este factor en la ecuación (2) obtenemos:

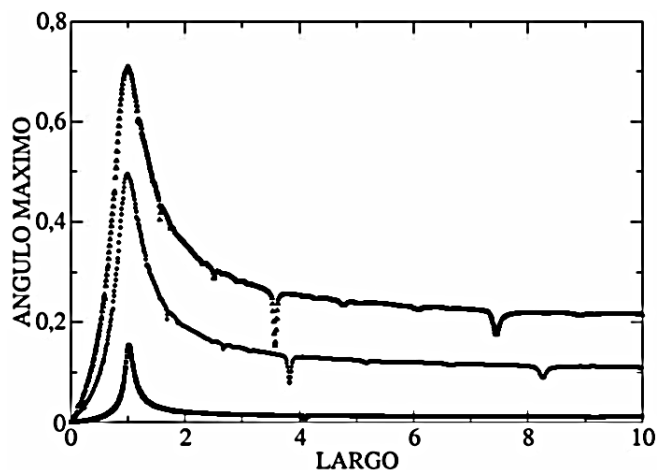


Figura 4. Comportamiento del ángulo máximo del péndulo 2 en función de su longitud. Superior:  $m_2 = 10,0g$ . Medio:  $m_2 = 50,0g$ . Inferior:  $m_2 = 500,0g$ .

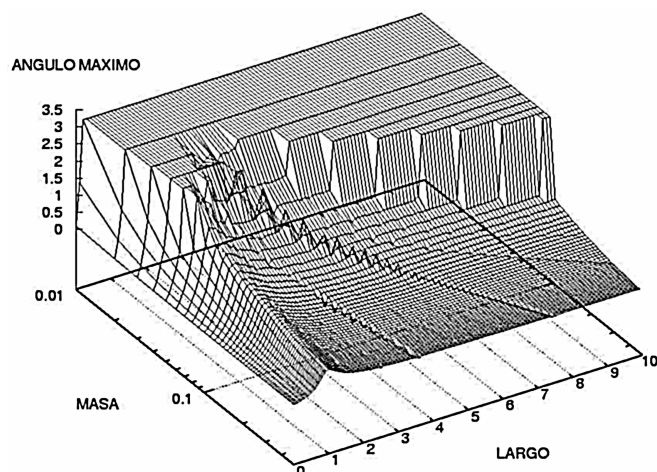


Figura 5. Comportamiento del ángulo máximo del péndulo 2 en función de su masa y longitud.

$$\theta_{t+1}^i = \theta_t^i + b^i \left( \theta_t^i - \theta_{t-1}^i - K^i \sin \theta_t^i \right) + \frac{w}{m^i} \sin \theta_t^j, \quad (5)$$

donde los superíndices  $i$  y  $j$  representan a los péndulos acoplados y  $w$  representa las condiciones de acoplamiento, la cual contiene a la distancia de separación entre los péndulos y a la rigidez del material usado para acoplar los mismos. Los péndulos en su oscilación, varían en forma periódica la fuerza que transmiten de uno hacia el otro mediante la barra, por lo que  $\sin \theta$  es considerada como una función adecuada para representar este comportamiento.

Por otra parte, desde el punto de vista experimental, utilizando un sensor de movimiento, realizamos medidas del comportamiento de dos péndulos unidos mediante un hilo delgado y bastante fle-

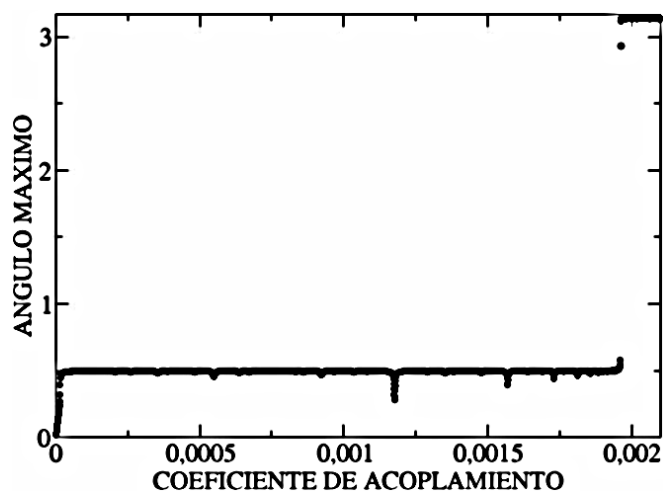


Figura 6. Comportamiento del ángulo máximo del péndulo 2 en función del factor de acoplamiento  $w$ .

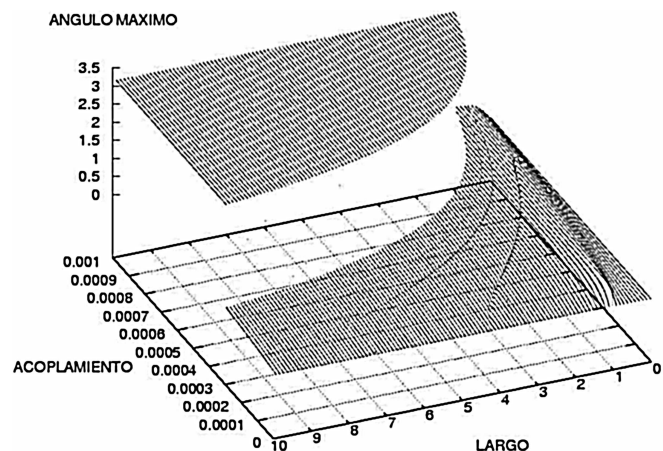


Figura 7. Comportamiento del ángulo máximo del péndulo 2 en función del factor de acoplamiento  $w$  y su longitud.

xible, con una distancia aproximada de  $15,0cm$  entre los mismos. Las condiciones que usamos fueron las siguientes:  $m_1 = m_2 = 150,0g$ ,  $l_1 = l_2 = 44,0cm$ ,  $g = 9,77m/s^2$  y  $\Delta t = 0,05s$ .

En un experimento previo, se determinó el valor  $\lambda = 7,5 \times 10^{-4}$ . Con estos valores, se obtiene la Figura 1, en la cual, en la parte superior se muestra la gráfica correspondiente al péndulo 1 que se suelta desde un ángulo distinto de cero, mientras que en la parte inferior la gráfica corresponde al péndulo 2 que parte del reposo. En ambos casos, los puntos corresponden a las medidas y las líneas a los resultados numéricos del modelo usando  $w = 0,0002$ . Este valor es obtenido mediante prueba y error, ya que aún no se tiene una relación funcional de  $w$  en función de la distancia de separación entre péndulos y la rigidez del hilo. Como se puede observar,

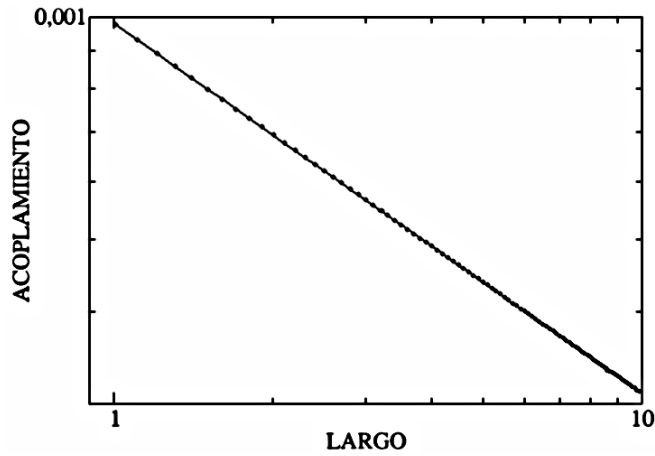


Figura 8. Comportamiento del factor de acoplamiento  $w$  en función de la longitud, para los cuales el péndulo 2 da una vuelta.

el modelo se ajusta muy bien a los resultados exceptuando los correspondientes a la parte inferior, donde se ve un error debido a la distancia hasta los sensores, el comportamiento se mantiene aun después de varios minutos.

### 3. RESULTADOS

Una vez que validamos nuestro modelo, estudiamos el comportamiento de los péndulos en función de sus diferentes parámetros, fijando para el péndulo 1:  $m_1 = 50,0g$  y  $l_1 = 1,00m$ , se puede estudiar el comportamiento del ángulo máximo que alcanza el péndulo 2 en función de sus parámetros. En primer lugar, estudiamos el comportamiento en función de la masa, con lo que obtenemos el gráfico mostrado en la Figura 2. Representando en un gráfico logarítmico, se nota un comportamiento lineal cuya pendiente es cercana a  $-0,5$ .

Si variamos el coeficiente de disipación obtenemos el comportamiento observado en la Figura 3. Aunque el eje vertical se lo representa en escala logarítmica, se puede observar que el comportamiento no obedece a una forma funcional sencilla.

Estudiando el comportamiento en función de la longitud del péndulo 2, se obtiene la Figura 4. Se observa que la resonancia ocurre cuando las longitudes de los péndulos son iguales, este efecto es mas notorio cuando la masa del péndulo 2 es menor que la del péndulo 1.

En la Figura 5 podemos observar el comportamiento completo de este ángulo en función de la masa y de la longitud del péndulo 2, para valores muy pequeños de masa. Se puede observar que el péndulo 2 es impulsado a una vuelta completa

(ángulo igual a  $\pi$ ).

Si variamos el factor de acoplamiento  $w$ , el comportamiento que obtenemos es el que se muestra en la Figura 6.

Se puede observar que para un determinado valor de  $w$ , se alcanza la resonancia en el sistema. Este valor máximo depende de la longitud del péndulo 2, como se ve en la Figura 7.

El valor de  $w$  para el cual el péndulo 2 da una vuelta en función de la longitud del péndulo es estudiado en la Figura 8. Nuevamente en escala logarítmica el valor de la pendiente es muy cercano a  $-0,5$ .

Finalmente, se hace un análisis de las condiciones de sincronización 1:1 (coincidencia en los valores de los períodos de ambos osciladores) en función de las condiciones iniciales y de las longitudes de los péndulos. Una primera constatación es la sensibilidad a condiciones iniciales, lo que en nuestro caso significa que dependiendo de la condición inicial que se elija para el péndulo 2, la longitud de éste péndulo será diferente para que se tenga una sincronización 1:1 con el péndulo 1, del cual sus parámetros están fijados. En la Figura 9(a) se ve cómo la longitud del péndulo 2,  $l_2$  puede cambiar de acuerdo con la elección de su condición inicial  $\theta_{20}$ ; cuando  $\theta_{20}$  es exactamente opuesto a  $\theta_{10}$ , se tiene que  $l_2 = l_1$  para que exista sincronización 1:1 y en este caso, se tendrá una antisincronización (sincronización en antifase) con iguales amplitudes para ambos péndulos. Por otra parte, se tiene que si  $\theta_{20}$  aumenta en módulo, la longitud  $l_2$  tiende a hacerse cada vez menor; por el contrario cuando  $\theta_{20}$  tiende a cero,  $l_2$  tiende a valores cada vez mayores, encontrándose que para  $\theta_{20} = 0$ , la longitud  $l_2 = 21,763m$ , situación que equivaldría a trabajar con péndulos de longitudes similares a las de los péndulos de Foucault. Otro aspecto interesante mostrado en la Figura 9(a)-(c) es que representan situaciones de antisincronización, además que en (c), la serie temporal del péndulo 2 corresponde a un ciclo de orden 2, lo que en el espacio de fases daría lugar a una típica figura de Lissajous [23]; en tanto que para (d), la amplitud oscila de manera marcada lo que haría ver que el espacio de fases se "llena" a pesar de que se tiene sincronización. Para terminar, podemos señalar que en la Figura 9(e), se tiene una sincronización en fase, lo que se justifica por el hecho de que las condiciones iniciales  $\theta_{10}$  y  $\theta_{20}$  tienen el mismo signo. El análisis que se acaba de hacer puede ser extendido a los otros parámetros y a otros órdenes de sincronización. Por otro lado,

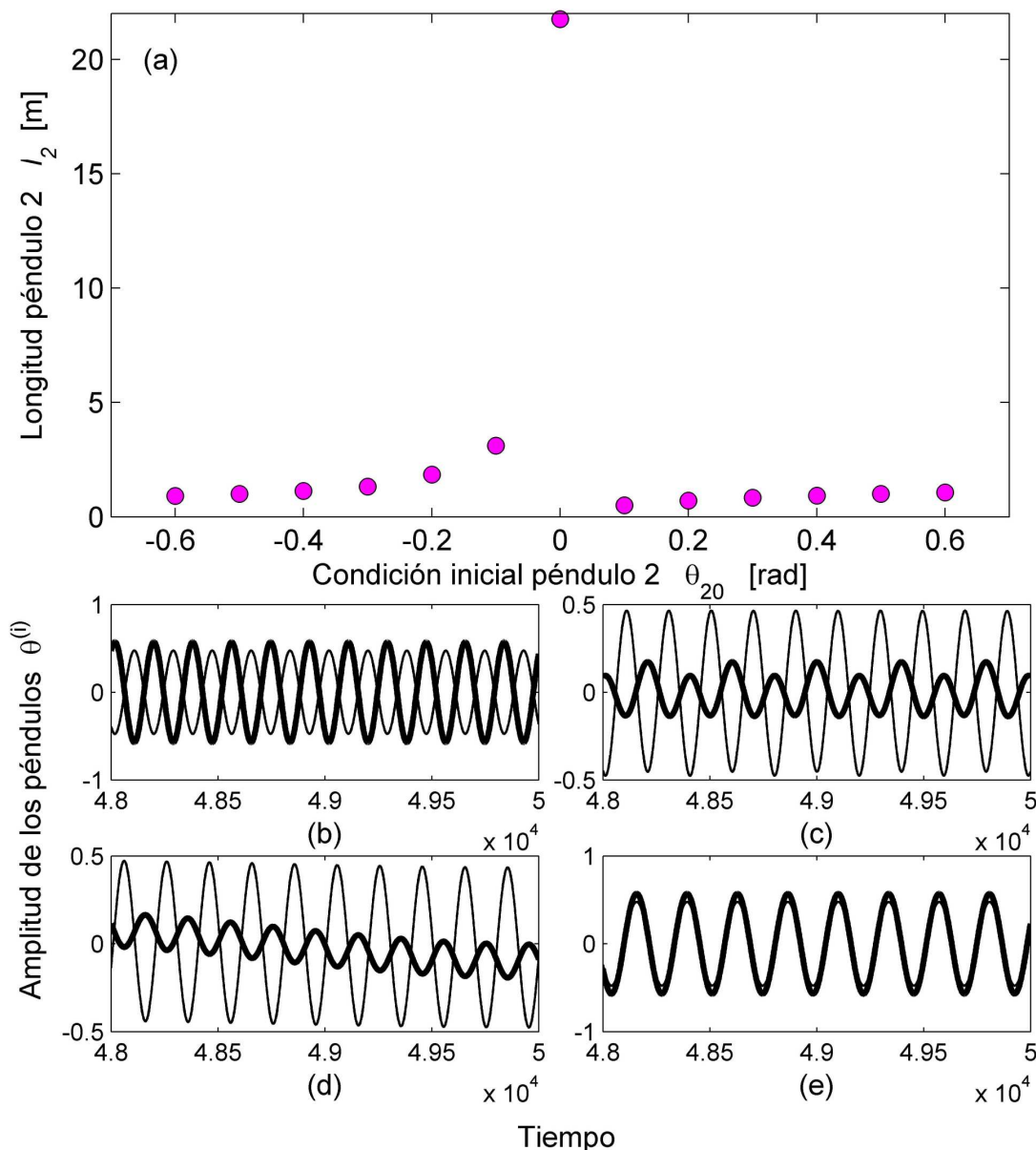


Figura 9. Condiciones de sincronización 1:1 para dos péndulos acoplados cuando los parámetros fijos son:  $m_1 = m_2 = 50,0g$ ,  $l_1 = 1,0m$ ,  $\lambda = 10^{-5}$ ,  $w = 10^{-5}$ ,  $g = 9,77m/s^2$ ,  $\Delta t = 10^{-2}$ ,  $\theta_{10} = 0,5rad$ . (a) Longitud del péndulo 2,  $l_2$  en función de su condición inicial  $\theta_{20}$ ; los puntos representan la situación en la que se da una sincronización 1:1. Series de tiempo en las que se observa claramente la sincronización 1:1; la línea delgada representa la serie temporal del péndulo 1 y la gruesa, la correspondiente al péndulo 2. (b)  $\theta_{20} = -0,6rad$ ,  $l_2 = 0,915m$ . (c)  $\theta_{20} = -0,1rad$ ,  $l_2 = 3,111m$ . (d)  $\theta_{20} = 0rad$ ,  $l_2 = 21,763m$ . (e)  $\theta_{20} = 0,6rad$ ,  $l_2 = 1,069m$ .

se pueden estudiar mediante este análisis situaciones de cuasi-periodicidad y caos, complementándose con los análisis de bifurcación y los exponentes de Lyapunov.

#### 4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

El modelo propuesto satisface muy bien cualitativa y cuantitativamente las características de este sistema acoplado, permitiendo que estudiemos todas sus características, las cuales no podrían ser representadas en un sistema experimental.

El modelo presenta algunas características singulares en función de algunos de sus parámetros, las cuales pueden ser estudiadas con mayor detalle en un futuro, usando este modelo.

Se muestra que la sincronización depende fuertemente de las condiciones iniciales, situación que determina los otros parámetros del péndulo; en este artículo se analizó la dependencia con la longitud pero se podrían tomar también la dependencia con la masa, la intensidad de acoplamiento y el factor de amortiguamiento.

Podemos extender este modelo a varios péndulos y además se pueden estudiar las condiciones generales de sincronización, así como se puede realizar un análisis completo de bifurcaciones y caos que permita comprender este tipo de sistemas en toda su amplitud.

#### REFERENCIAS

- [1] L. Glass & M. C. Mackey, *From Clocks to Chaos. The Rhythms of Life*. Princeton: Princeton University Press, 1988.
- [2] A. Goldbeter, *Biochemical oscillations and cellular rhythms. The molecular bases of periodic and chaotic behaviour*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [3] I. R. Epstein & J. A. Pojman, *An introduction to nonlinear chemical dynamics*. Oxford: Oxford University Press, Inc., 1998.
- [4] P. Gray & S. K. Scott, *Chemical oscillations and instabilities. Nonlinear chemical kinetics*, vol. 21. Oxford: Oxford University Press, 1994.
- [5] A. Pikovsky, M. Rosenblum, & J. Kurths, *Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences*, vol. 12. New York: Cambridge University Press, 2001.
- [6] G. M. Ramirez Avila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Synchronization in light-controlled oscillators", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 182, pp. 254-273, 2003.
- [7] H. Goldstein, C. Poole, & J. Safko, *Classical mechanics*. New York: Addison Wesley, 2000.
- [8] L. Landau & E. Lifchitz, *Mécanique*. Moscou: Mir, 1966.
- [9] W. Greiner, *Classical mechanics. Point particles and relativity*. New York: Springer-Verlag, 2004.
- [10] J. V. José & E. J. Saletan, *Classical dynamics. A contemporary approach*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [11] G. Arfken, *Mathematical methods for physicists*. New York: Academic Press, Inc., 1985.
- [12] C. M. Bender & S. A. Orszag, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. New York: McGraw-Hill, Inc., 1978.
- [13] F. F. Cap, *Mathematical methods in physics and engineering with Mathematica*. Boca Raton: CRC Press, 2003.
- [14] J. Billingham & A. C. King, *Wave motion*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [15] H. J. Pain, *The physics of vibrations and waves*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2005.
- [16] A. H. Nayfeh & D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*. New York: John Wiley & Sons Inc., 1995.
- [17] E. Infeld & G. Rowlands, *Nonlinear waves, solitons and chaos*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [18] R. H. Enns & G. C. McGuire, *Nonlinear physics with Mathematica for scientists and engineers*. New York: Birkhäuser Boston, 2001.
- [19] D. Kaplan & L. Glass, *Understanding Nonlinear Dynamics*. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [20] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos. With applications to physics, biology, chemistry and engineering*. New York: Perseus Books, 1994.
- [21] J. C. Sprott, *Chaos and time-series analysis*: Oxford University Press, 2003.
- [22] J. Timotheo da Costa Parda, K. Pinheiro Mota, & P. Murilo Castro de Oliveira, "Péndulo impulsado", *Revista Boliviana de Física*, vol. 9, pp. 39-47, 2003.
- [23] S. T. Thornton & J. B. Marion, *Classical dynamics of particles and systems*. Belmont: Brooks/Cole Thomson Learning, 2004.