Revista Boliviana de Física **12**, 126–129 (2006)

COHETES IMPULSADOS POR PROPULSIÓN DE AGUA

Roger Apaza Vásquez

Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
Casilla 8635, La Paz—Bolivia

RESUMEN

El presente artículo trata sobre el estudio de cohetes propulsados por agua o por algún fluido no compresible. Es necesario recordar que el así denominado "cohete de agua", no funciona por combustión química sino por una reacción mecánica. El estudio que se realiza en este articulo es sobre la cantidad de presión que necesita un cohete de agua para poder elevarse, y determinar el tiempo en el cual dicho fluido termina de vaciarse del recipiente a medida que éste se impulsa. Muchas personas que realizan este experimento, todavía no conocen la explicación matemática y física de estos sistemas propulsados.

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente los cohetes de agua, además de ser usados por los aficionados a la "coheteria *amateur*", solamente se usan como un modelo de explicación para ilustrar los principios físicos comprendidos en la propulsión de los cohetes de combustión química de gran tamaño. Pero en sí esta clase de cohetes —también llamados *water rockets* [1]— encierran mucha matemática para su explicación física, por lo que el objetivo de estudio sobre este tema es enseñar y explicar la propulsión de cohetes mediante fluidos no compresibles, así como la necesidad de hacer notar que aunque los *water rockets* son experimentos divertidos para la enseñanza de ciertas leyes físicas, éstos también encierran una gran complejidad que muchas veces es ignorada por aquellos que fabrican y diseñan este tipo de cohetes.

Para iniciar el estudio del cohete de agua nos referiremos al material teórico básico comprendido en cualquier texto de Física, por ejemplo, *Física* de Resnick, Halliday y Krane [2] (capítulo de Dinámica de Fluidos), a fin de aplicar las leyes usuales de la mecánica (teorema de trabajo-energía, variación del momentum, conservación de la masa) a un fluido ideal que sirve como agente propulsor del cohete. El contexto de la aplicación de estas leyes es el referido por Finney [1] en su extenso análisis sobre los cohetes de agua. En este artículo se presentan algunas consideraciones alternativas a las expuestas en [1] y se sugieren otras investigaciones que no fueron señaladas en dicha referencia.

2. FíSICA APLICADA A LA PROPULSIÓN DE COHETES DE AGUA

Consideremos un recipiente cerrado que contiene una parte de agua y otra parte de aire. El agua expulsada ejerce una fuerza de empuje similar a la que experimenta un cohete al expulsar los gases del combustible quemado por sus toberas. Antes de empezar la explicación, cabe recalcar que atribuimos al aire las propiedades de un gas ideal, pues éste reúne dentro de una buena aproximación las condiciones de densidad, presión y temperatura con la que se trabaja. También se desprecian los efectos de condensación.

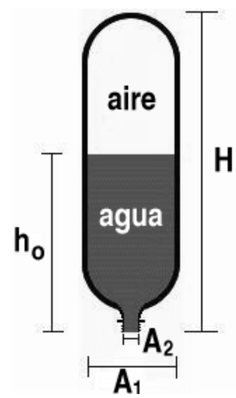

Figura 1. Recipiente que contiene cierta proporción de agua o algún fluido incompresible.

La forma del recipiente se supone cilíndrica, con una sección transversal de área A_1. Es necesario aclarar que no se considera el cambio de temperatura al introducir el aire, i.e., la transformación que sufra el gas será isotérmica. A continuación se explicará algunos de los estudios teóricos que se realizaron con los cohetes de agua.

3. LLENADO DE AIRE

Primeramente estudiemos el caso de la cantidad de presión que necesitan estos cohetes para poder propulsarse, tratando de encontrar una ecuación para la presión en función del número de veces que accionamos una bomba de aire.

Imaginemos a continuación el sistema mostrado en la Fig. 3. Como se puede observar, se tiene un émbolo que representa a la bomba de aire de una bicicleta u otro mecanismo similar para insuflar aire; éste se encuentra conectado al recipiente cerrado y parcialmente lleno de

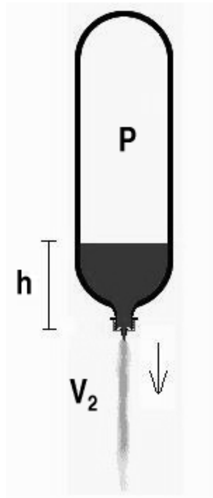

Figura 2. Recipiente expulsando la proporción de agua que contenía.

agua. Podemos observar que conectado al recipiente se encuentra un manómetro que nos determinará la presión inicial del aire. Antes de accionar la mencionada bomba de aire, tenemos en el recipiente (cohete) n_0 moles de aire a presión atmosférica P_a y a temperatura ambiente T.

Entonces de la ley de los gases ideales obtenemos la siguiente ecuación (Fig. 1):

$$P_a A_1 (H - h_0) = n_0 RT. \tag{1}$$

Cada vez que accionamos la bomba de volumen V_b, introducimos en el recipiente n moles de aire a la misma temperatura T, por tanto, aplicando nuevamente la ley de los gases, tenemos la siguiente ecuación:

$$P_a V_b = nRT. \tag{2}$$

Si accionamos la bomba de aire N veces, tendremos que la presión P_0 del aire contenido en el recipiente es:

$$P_0 A_1 (H - h_0) = (n_0 + nN) RT. \tag{3}$$

El manómetro marcará una presión P_0 dada por la siguiente ecuación despejada de (3):

$$P_0 = \frac{(n_0 + nN) RT}{A_1 (H - h_0)}. \tag{4}$$

De (1) y (2) obtenemos una nueva ecuación:

$$P_0 = \frac{P_a A_1 (H - h_0) + P_a V_b N}{A_1 (H - h_0)}. \tag{5}$$

Finalmente, factorizando P_a queda:

$$P_0 = P_a \left(1 + \frac{V_b N}{A_1 (H - h_0)}\right). \tag{6}$$

Este valor de P_0 corresponde a la presión *inicial* durante la fase de propulsión del cohete.

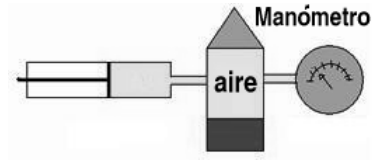

Figura 3. Esquema de una bomba de aire conectada a un recipiente y a un manómetro.

4. TIEMPO DE VACIADO DEL AGUA

El volumen inicial de aire que tenemos en el recipiente es:

$$V_0 = A_1 (H - h_0). \tag{7}$$

Luego, el volumen final de aire una vez que termina de salir toda el agua del recipiente es:

$$V = A_1 H. \tag{8}$$

Ya que la transformación del gas (aire) se ha supuesto isotérmica, entonces:

$$P_0 A_1 (H - h_0) = P A_1 H. \tag{9}$$

Si la sección del recipiente A_1 es mucho mayor que la sección del orificio de salida A_2, entonces, en vista de la ecuación de conservación del flujo: $A_1 v_1 = A_2 v_2$, la velocidad v_1 es muy pequeña comparada con v_2, y se puede despreciar.

La presión debida a la altura del fluido

$$P = \rho g h \tag{10}$$

también puede considerarse pequeña respecto a la presión del aire en el interior del recipiente. Así, la ecuación de Bernoulli se simplifica:

$$P = P_a + \frac{1}{2}\rho V_2^2. \tag{11}$$

Al salir el agua por el orificio de sección A_2, el volumen del aire V en el interior del recipiente aumenta con el tiempo:

$$A_2 V_2 = \frac{dV}{dt}. \tag{12}$$

Suponiendo que la velocidad de escape del aire no es tan grande como para invalidar la aproximación de un proceso isotérmico, entonces

$$P_0 V_0 = PV, \tag{13}$$

donde P_0 es la presión inicial del aire y V_0 es el volumen inicial.

Despejando V de (13), V_2 de (11), y reemplazándolos en (12), obtenemos:

$$\frac{d\left(\frac{P_0 V_0}{P}\right)}{dt} = A_2 \sqrt{\frac{2(P - P_a)}{\rho}}. \tag{14}$$

Observando la ecuación (14), podemos ver la derivada de un cociente, donde $P_0 V_0$ es una constante; así, aplicando las propiedades de la derivada, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{P^2}{P_0 V_0} A_2 \sqrt{\frac{2}{\rho}(P - P_a)}. \tag{15}$$

Luego, integrando (15) y acomodando términos tendremos la solución para el tiempo en el que se vacía el agua de la botella. Debe recordarse que éste es el tiempo de vaciado que es mucho menor que el tiempo de vuelo del cohete. El tiempo de vaciado es:

$$t = \sqrt{\frac{\rho}{2}} \frac{P_0 V_0}{P_a A_2} \left(D(P) + \frac{E(P)}{\sqrt{P_a}} \right), \tag{16}$$

donde:

$$D(P) = \frac{\sqrt{P_0 - P_a}}{P_0} - \frac{\sqrt{P - P_a}}{P},$$

$$E(P) = \arctan\left(\sqrt{\frac{P_0 - P_a}{P_0}}\right) - \arctan\left(\sqrt{\frac{P - P_a}{P}}\right).$$

Finalmente, podemos decir que la ecuación (16) nos da el tiempo de vaciado del agua del recipiente durante la fase de propulsión. Para ilustrar esta ecuación, tomemos algunos datos típicos de este tipo de cohetes de agua. Para una botella de 2 litros, tenemos los siguientes datos: $A_1 = 7{,}85 \times 10^{-3}$ m^2, $A_2 = 3{,}80 \times 10^{-4}$ m^2 , $V_b = 3{,}05 \times 10^{-4}$ m^3. El porcentaje de agua dentro de la botella es del 33 % del volumen total de la botella; ésta tiene una altura de 0,28 m; la bomba de aire se acciona 4 veces. Con estos datos, la ecuación (16) da un tiempo de vaciado de 0,20 segundos.

Otra manera de estudiar este mismo problema es resolver (15) mediante el uso de ecuaciones paramétricas. Entonces usamos la ecuación (15), y la transformamos en la siguiente ecuación

$$\frac{dP}{dt} = -CP^2\sqrt{P - P_a}, \tag{17}$$

donde:

$$C = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \frac{A_2}{P_0 V_0}.$$

Los límites de integración son los siguientes:

$$P_a \leq P \leq 4P_a,$$

$$0 \leq Z \leq \sqrt{3P_a},$$

donde se definió $Z \equiv \sqrt{P - P_a}$.

Debido a que Z depende de la presión P, y ésta a su vez depende del tiempo, obtenemos la derivada de Z con respecto a t, y la combinamos con (17):

$$\frac{dP}{dt} = 2Z\frac{dZ}{dt} = -CP^2 Z,$$

$$2Z\frac{dZ}{dt} = -C(P_a + Z^2)^2 Z.$$

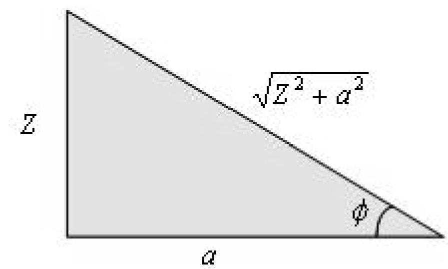

Figura 4. Triángulo construido para resolver la integral trigonométrica de la ecuación (20).

Separando variables y definiendo a=vP_a integramos la anterior ecuación:

$$\xi = \int_{a\sqrt{3}}^{Z(t)} \frac{dZ}{(Z^2 + a^2)^2} = -\frac{C}{2}\int_0^t dt. \tag{18}$$

Esta integral se puede resolver por sustitución trigonométrica (figura 4), con $Z = a \tan\phi$, por lo que d$Z = a \sec^2\phi \, d\phi$. De la Fig. 4 tenemos que:

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{Z^2 + a^2}}.$$

Así, tenemos que

$$\xi = (1/a^3)\int_{\pi/3}^{\phi(t)} \cos^2 \phi d\phi,$$

donde $0 \leq \phi(t) \leq \pi/3$. Evaluando esta última integral tenemos:

$$\xi = \frac{1}{2a^3}\left(\phi(t) + \sin\phi(t)\cos\phi(t) - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$$

Sustituyendo lo anterior en (18) queda la función paramétrica $t(\phi)$ para el tiempo:

$$t \cong \frac{1}{Ca^3}(1{,}48 - \phi - \sin\phi\cos\phi). \tag{19}$$

Después reacomodando algunos términos tendremos la presión en función de ϕ:

$$P = \frac{a^2}{\cos^2\phi}. \tag{20}$$

El instante inicial t=0 para el que P=4P_a, corresponde a ϕ=$\pi/3$, mientras que el instante final $t \cong 1{,}48/(\mathrm{C}a^3)$ para el que P=P_a corresponde a ϕ=0. Esto es interesante en sí, pues aunque el agua dentro del cohete se vacía por una diferencia de presiones que tiende a cero, y por lo tanto el flujo de salida de agua es cada vez menor, aun así la cantidad total de agua se vacía en un lapso finito. Para ilustrar estos cálculos, se construyó la gráfica $P(t)$ mostrada en la Fig.5.

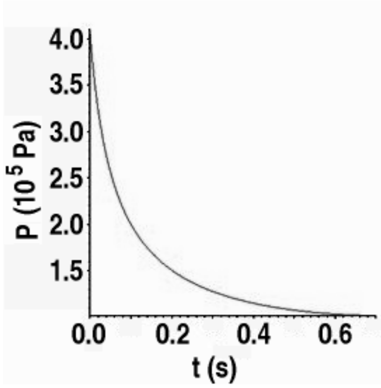

Figura 5. Gráfica de presión (en 10^5 pascales) vs. tiempo (s), usando los valores numéricos de los parámetros ya referidos para una botella de 2 litros.

5. CONCLUSIONES

Una de las conclusiones más importantes de este estudio es que los fluidos pueden ser usados como propulsores en cohetes *amateur*. En el caso de los cohetes de agua el empuje que estos desarrollan es muy pequeño, y por ello estos cohetes generalmente no alcanzan alturas mayores a los 100 metros. Sin embargo, los cohetes de agua brindan una buena oportunidad para comprender la naturaleza física de los mecanismos de propulsión a pequeña y a gran escala.

Es importante aclarar que en la sección 3 (Llenado de aire) se calculó la presión que la bomba de aire genera hasta el instante en que el cohete sale propulsado por el agua. El propósito de la sección 4 (Tiempo de vaciado del agua) fue obtener la ecuación (16) que permite, teniendo en cuenta la condiciones iniciales del sistema (por ejemplo, el área del recipiente y la densidad del fluido a utilizar), estimar de manera aproximada el tiempo total de vaciado del agua durante la fase de propulsión del cohete. A continuación, el cohete se eleva por el impulso desarrollado en la fase anterior hasta alcanzar su altura máxima. La ecuación (17) es la ecuación diferencial para la presión $P(t)$ como función del tiempo t. Se supone $P_a \leq P(t) \leq P_0$, donde P_a es la presión atmosférica y la presión inicial P_0 (Llenado de aire) normalmente no debe sobrepasar 4 atm, que es el límite de resistencia del material plástico con el que se fabrica este tipo de botellas.

La integración de (17) se expresa en (20) y (21) de forma paramétrica, i.e., $t=t(\phi)$ y $P=P(\phi)$ donde los límites de $0 \leq \phi \leq \pi/3$ corresponden al instante inicial ($t=0$) en el que $P(\phi=\pi/3)=P_0$ y el instante final ($t=T$) en el que $P(\phi=0)=P_a$. Nótese que esta integración paramétrica –a diferencia de la que llevó a (16)– ya no requiere de la función multivaluada $E(P)$ que está definida a menos de $n\pi$, un múltiplo entero de π. Si no se especifica lo contrario, se debe entender que $n=0$, lo que resulta innecesario en los pasos que llevan a (17). Por otra parte, se observa que el tiempo total de vaciado T es finito:

$$T = \frac{1}{CP_a^{3/2}} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right),$$

donde la constante C se definió a continuación de (17). Para los parámetros físicos de este problema, el tiempo de vaciado resulta ser T=0,2 segundos. En el caso de tener un volumen inicial de agua menor que el requerido para vaciarse en el tiempo T de tal forma que se igualen las presiones interna y externa ($P(T)=P_a$), entonces después del vaciado de este menor volumen de agua, habrá una diferencia de presiones de adentro hacia afuera del cohete, lo que provoca el escape de una masa de aire, que ya no es relevante para efectos del impulso del cohete. Esto último es lo que considera Finney [1] en su análisis: la cantidad inicial de agua es relativamente pequeña, así que ésta se expulsa en un tiempo de unos 0,15 s y luego el cohete –ya libre de la masa de agua– se eleva por el impulso ganado en la fase anterior "de quemado". Esto nos invita a preguntarnos si acaso no se puede utilizar una cantidad mayor de agua a fin de aprovechar la diferencia de presiones de adentro hacia fuera hasta que dicha diferencia sea cero, con lo que se lograría una fase de impulso de mayor duración. Obviamente, mientras ello sucede, el agua que aún queda en el interior del cohete es un "lastre" que se debe arrastrar mientras el cohete asciende. Lo que se tiene que hacer pues es plantear un problema de extremos: ¿cuál es la cantidad ideal de agua que se puede aprovechar por la diferencia de presiones sin que ello retarde significativamente el impulso? La magnitud física que se debe "maximizar" será entonces la velocidad final que se alcanza durante esta etapa de "quemado"; esta velocidad es la velocidad inicial durante la fase de ascenso "libre" ya sin agua (combustible) que arrastrar. Obviamente, a mayor velocidad, mayor será la altura que alcance el cohete. Este análisis que sugerimos como un complemto al trabajo de Finney [1] se publicará próximamente.

Para concluir, es importante mencionar que no sólo el agua puede ser usada para propulsar este tipo de cohetes. El hecho de usar por lo general agua obviamente se debe a que es más económica, accesible, y no presenta riesgo alguno en este tipo de experimentos caseros de bajo costo.

REFERENCIAS

[1] Finney G.A., Analysis of water-propelled rocket: A problem in honors physics. Am. J. Phys. 68 (3) March 2000, pp. 223-227.

[2] Resnick, Halliday y Krane., Física Vol 1. Dinámica de los Fluidos.