Revista Boliviana de Física **11**, 67–77 (2005)

SOBRE LA ELECTRODINÁMICA DE LOS CUERPOS EN MOVIMIENTO [1]

Albert Einstein

Berna, 30 de Junio de 1905

Se sabe que la teoría electrodinámica de Maxwell —tal como se entiende comúnmente hoy día— al aplicarse a los cuerpos en movimiento, conduce a ciertas asimetrías que no parecen ser inherentes a los fenómenos. Tómese, por ejemplo, la acción electrodinámica recíproca entre un imán y un conductor eléctrico. El fenómeno observable en este caso depende sólo del movimiento relativo entre el imán y el conductor, mientras que la teoría usual establece una diferencia drástica entre los dos casos en los que ya sea el imán o el conductor sean los que se mueven. Si el imán se mueve y el conductor está en reposo, entonces aparece un campo campo eléctrico en torno al imán con una energía definida, lo que provoca cierta corriente eléctrica en el sitio donde se encuentra el conductor. Sin embargo, si el imán está en reposo y es el conductor el que se mueve, entonces no surge campo eléctrico alguno en torno al imán, pero en el conductor surge una fuerza electromotriz que en sí no comprende una energía correspondiente, pero da lugar —suponiendo igualdad de movimientos relativos en estos dos casos— a corrientes eléctricas del mismo sentido e intensidad que aquellas que eran producidas por las fuerzas eléctricas en el primer caso.

Ejemplos de este tipo, junto con los intentos infructuosos para medir cualquier movimiento de la Tierra respecto a un “medio luminoso”, sugieren que los fenómenos electrodinámicos así como los de la mecánica misma no conllevan propiedades que correspondan a la idea de un estado de reposo absoluto. Dichos ejemplos sugieren más bien que, tal como ya se ha demostrado hasta aproximaciones de primer orden de cantidades pequeñas, las mismas leyes de la electrodinámica y de la óptica deben ser válidas para todos aquellos sistemas de referencia en los que rigen las leyes de la mecánica. Así pues, elevaremos esta conjetura (que se denominará en adelante “Principio de Relatividad”) al estatus de un postulado; asímismo introduciremos otro postulado, que aparentemente es irreconciliable con el primero, y afirma que la luz siempre se propaga en el espacio vacío con una velocidad definida c de manera independiente del estado de movimiento del cuerpo que emite la luz. Estos dos postulados son suficientes para deducir una teoría simple y consistente de la electrodinámica de los cuerpos en movimiento con base en la teoría de Maxwell para cuerpos estacionarios. La suposición de un “éter luminoso” probará ser superflua en tanto que la teoría que se desarrollará en este trabajo no requiera un “espacio estacionario absoluto” provisto de ciertas propiedades especiales, como tampoco requiera asignar un vector de velocidad a un punto del espacio vacío en el que los procesos electromagnéticos tienen lugar.

La teoría que se desarrollará tiene por base —así como toda la electrodinámica— la cinemática del cuerpo rígido, ya que las afirmaciones de tal teoría tienen que ver con relaciones entre cuerpos rígidos (sistemas de coordenadas), relojes y procesos electromagnéticos. Una insuficiente consideración de tales aspectos constituye la raíz de las dificultades que encuentra en el presente la electrodinámica de los cuerpos en movimiento.

I. PARTE CINEMÁTICA

1. DEFINICIÓN DE SIMULTANEIDAD

Tomemos un sistema de coordenadas en el que las ecuaciones de la mecánica newtoniana sean válidas. ([2]) A fin de hacer esta presentación más precisa y distinguir verbalmente este sistema de coordenadas de otros que serán introducidos luego, nos referiremos a dicho sistema como “sistema estacionario”.

Si un punto material está en reposo con respecto a este sistema, su posición se puede definir a través del empleo de procedimientos rigurosos de medición y de los métodos de la geometría euclidiana; esta posición se puede expresar en coordenadas cartesianas. Así, si deseamos describir el *movimiento* del punto material, damos los valores de sus coordenadas como funciones del tiempo. Debemos tener cuidadosamente en cuenta que una descripción matemática de este tipo carece de significado físico a menos que tengamos bien claro lo que entendemos por “tiempo”. Tendremos pues que considerar que todos nuestros razonamientos en los que figura el concepto de tiempo son razonamientos acerca de *eventos simultáneos*. Por ejemplo, si afirmo: “El tren llega a este sitio a las 7:00”, ello significa que la llegada del tren y el hecho de que la aguja pequeña de mi reloj apunte a las 7:00 son eventos simultáneos.([3])

Parecería pues posible superar estas dificultades involucradas en la definición de tiempo sustituyendo la frase

[1] Traducción realizada por Diego Sanjinés C. a partir de “On the Electrodynamics of Moving Bodies”, A. Einstein, en *The Principle of Relativity* (Dover, 1952), p. 37.

[2] Esto es, hasta una aproximación de primer orden.

[3] No discutiremos la inexactitud que yace en el concepto de la simultaneidad de dos eventos que ocurren aproximadamente en el mismo sitio, lo que puede eliminarse solamente de manera abstracta.

"el hecho de que la aguja pequeña de mi reloj apunte a ..." por la palabra "tiempo". De hecho, tal definición es satisfactoria en lo referente a la definición de un tiempo exclusivo para el sitio donde está localizado el reloj, pero ya no lo es cuando debemos conectar en una secuencia temporal los eventos que ocurren en sitios diferentes, o —lo que viene a ser lo mismo— evaluar los tiempos de eventos que ocurren en sitios distantes del reloj.

Por supuesto, siempre podemos considerar instantes determinados por un observador en reposo junto al reloj en el origen mismo del sistema de coordenadas, y de aquí coordinar las posiciones correspondientes de las menecillas del reloj con señales luminosas emitidas por cada evento que se desea cronometrar y que alcanzan al observador a través del vacío. Sin embargo, esta forma de coordinación tiene la desventaja de no ser independiente del punto de vista del observador con el reloj, tal como lo sabemos de la experiencia. Podemos llegar a una forma de determinación más práctica por medio de la siguiente línea de razonamientos.

Si en el punto A del espacio hay un reloj, un observador en A puede determinar los instantes de los eventos que ocurren en la proximidad inmediata de A haciendo coincidir las posiciones de las manecillas del reloj de manera simultánea con dichos eventos. Supongamos ahora otro punto B del espacio donde se encuentra otro reloj idéntico al que está en A, de tal forma que un observador en B puede asimismo determinar los instantes de los eventos próximos a B. Pero ya no es posible, sin hacer alguna suposición adicional, comparar temporalmente un evento en A con un evento en B. Hasta ahora sólo se definió un "tiempo A" y un "tiempo B". No se definió pues un tiempo común para A y B; ésto no se puede hacer a menos que establezcamos *por definición* que el tiempo que le toma a la luz viajar de A a B sea igual al tiempo que le toma ir de B a A. Consideremos un rayo de luz que parte de A hacia B en el instante t_A del "tiempo A", luego se refleja en B hacia A en el instante t_B del "tiempo B", y así llega de nuevo a A en el instante t'_A del "tiempo A". Definamos la condición de sincronización de ambos relojes como $t_B - t_A = t'_A - t_B$. Supondremos que esta definición está libre de contradicciones y es aplicable a un número arbitrario de puntos; supondremos también que las siguientes relaciones tienen validez universal:

1. Si el reloj en B se sincroniza con el reloj en A, entonces el reloj en A se sincroniza con el reloj en B.
2. Si el reloj en A se sincroniza con el reloj en B y también con el reloj en C, entonces los relojes en B y en C están sincronizados entre sí.

Así, con la ayuda de ciertos experimentos físicos imaginarios hemos establecido lo que se debe entender por relojes estacionarios sincronizados ubicados en sitios diferentes, y obtuvimos así una definición de los términos "simultáneo" o "sincronizado" y de "tiempo". Entonces, el "tiempo" de un evento es aquel que se da simultáneamente con el evento en sí y un reloj estacionario localizado en el sitio del evento, estando este reloj sincronizado para todas las posibles mediciones temporales con un reloj estacionario específico.

De acuerdo con la experiencia, supondremos además que la cantidad

$$c = \frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A}$$

es una constante universal: la velocidad de la luz en el vacío. Es esencial tener una definición de tiempo a través de relojes estacionarios en sistemas de referencia también estacionarios. Al tiempo así definido y apropiado a dichos sistemas le llamaremos "tiempo del sistema estacionario".

2. SOBRE LA RELATIVIDAD DE LONGITUDES Y TIEMPOS

Las siguientes reflexiones tienen por base el principio de relatividad y el principio de constancia de la velocidad de la luz. Estos principios se definen como sigue:

1. Las leyes por las cuales los estados de los sistemas físicos sufren cambios, no se ven afectadas por estos cambios, ya sea si éstos se refieren a uno o a otro de dos sistemas de coordendas en movimiento uniforme de traslación.
2. Cualquier haz de luz se mueve en el sistema "estacionario" de coordendas con una velocidad determinada c, ya sea que el haz sea emitido por un cuerpo estacionario o en movimiento. De aquí,

$$\text{velocidad} = \frac{\text{trayectoria de la luz}}{\text{intervalo temporal}},$$

donde el intervalo temporal se debe tomar de acuerdo a la defínción de la sección 1.

Sea una vara rígida estacionaria con longitud l medida de acuerdo a otra vara de comparación también estacionaria. Imaginemos a continuación que el eje de la vara yace a lo largo del eje X de un sistema de coordenadas estacionario, y que éste tiene un movimiento uniforme de traslación paralela con velocidad v a lo largo de X y en la dirección en que aumenta la coordenada x. Nos preguntamos entonces: ¿cuál es la longitud de la vara? Para responder imaginemos que esta longitud se puede conocer mediantes las siguientes operaciones: a) El observador se mueve junto a la vara de medición y la vara a ser medida, y realiza esta medición comparando ambas varas, tal como se haría en reposo. b) Por medio de relojes estacionarios puestos a hora en el sistema estacionario y sincronizados de acuerdo a lo indicado en la sección 1, el observador identifica en qué puntos del sistema estacionario están localizados los extremos de la vara a ser medida en un cierto tiempo. La distancia entre estos puntos, medida de acuerdo a la vara de medición que en este caso está en reposo, es lo que podemos reconocer como “la longitud de la vara”.

De acuerdo con el principio de relatividad, la longitud medida siguiendo la operación (a) —a la que llamaremos “longitud de la vara en el sistema en movimiento”— debe ser igual a la longitud l de la vara estacionaria. A la longitud determinada por la operación (b) la designaremos por “longitud de la vara (en movimiento) en el sistema estaciopnario” y será calculada sobre la base de nuestros dos principios. Encontraremos que esta longitud difiere de l.

La cinemática común afirma tácitamente que las longitudes determinadas por ambas operaciones (a) y (b) debe ser las mismas; en otras palabras, que un cuerpo rígido en movimiento en un cierto instante t puede ser perfectamente representado es sus aspectos geométricos por el *mismo* cuerpo *en reposo* en una cierta posición. Imaginemos aún que en los extremos A y B de la vara están localizados dos relojes sincronizados con los relojes del sistema estacionario, es decir, que sus lecturas corresponden en cualquier instante al “tiempo del sistema estacionario” en los lugares donde les tocare estar. Estos relojes están pues “sincronizados en el sistema estacionario”. Si junto a cada reloj hubiera un observador en movimiento, cada observador puede aplicar el criterio establecido en la sección 1 para sincronizar ambos relojes: un rayo de luz parte de A en el tiempo t_A ([4]) , el rayo se refleja en B en el tiempo t_B, y retorna a A en el tiempo t'_A. Tomando en cuenta el principio de constancia de la velocidad de la luz, encontramos que

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c-v} \quad \text{y} \quad t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{c+v},$$

donde r_{AB} denota la longitud de la vara en movimiento medida desde el sistema en movimiento. Los observadores que van junto a la vara en movimiento encontrarán que sus relojes no estaban sincronizados, mientras que los observadores en el sistema estacionario declararán que los relojes estaban sincronizados.

Vemos pues que no se puede asignar un significado *absoluto* al concepto de simultaneidad, ya que dos eventos que son vistos como simultáneos desde un sistema de coordenadas, ya no lo son cuando se ven desde otro sistema que está en movimiento relativo al primero.

[4]Por “tiempo” se refiere a “tiempo del sistema estacionario” así como “posiciones de las manecillas del reloj en movimiento situado en los sitios en cuestión”.

3. TEORÍA DE LA TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS Y TIEMPOS DE UN SISTEMA ESTACIONARIO A OTRO SISTEMA EN MOVIMIENTO UNIFORME DE TRASLACIÓN RELATIVO AL PRIMERO

Tomemos a dos sistemas de coordenadas en el espacio estacionario, i.e., dos sistemas que están formados cada uno por tres líneas materiales rígidas mutuamente perpendiculares que emergen de un punto. Que los ejes X de ambos sistemas concidan y sus respectivos ejes Y y Z que sean paralelos. En cada sistema habrá una vara rígida de medición y algunos relojes, que serán, en todos los aspectos, idénticos a la vara y relojes del otro sistema. A continuación, supongamos que el origen de uno de estos sistemas (k) tenga una velocidad v dirigida hacia los valores crecientes de x del otro sistema (K); esta velocidad se imparte también a los ejes coordenados y a todos los relojes. En cualquier instante del sistema estacionario (K) corresponderán posiciones definidas de los ejes del sistema en movimiento, y por razones de simetría supondremos que el movimiento de k será tal que los ejes de este sistema serán paralelos a los del sistema estacionario en el tiempo t (donde t denota siempre al tiempo del sistema estacionario).

Imaginemos ahora que se mide el espacio desde el sistema estacionario K por medio de la vara de medición estacionaria, y desde el sistema en movimiento k por medio de la vara que se está moviendo con este sistema; así, obtenemos las coordenadas x, y, z, y ξ, η, ζ respectivamente. El tiempo t del sistema estacionario se determinará para todos los puntos en los que hay relojes por medio de señales de luz de la forma indicada en la sección 1. De manera similar, el tiempo τ del sistema en movimiento se determinará para todos puntos en los que hay relojes en reposo respecto a este sistema, aplicando el método dado en la sección 1, de señales de luz entre los puntos en donde se situan estos relojes. Para cualquier conjunto de valores x, y, z, t que definen completamente el sitio y tiempo de un evento en el sistema estacionario, corresponde un conjunto de valores ξ, η, ζ, τ que determinan dicho evento en el sistema k. Nuestra tarea es pues encontrar las ecuaciones que relacionan estos conjuntos de valores.

En primer lugar, está claro que las ecuaciones deben ser *lineales* en vista de las propiedades de homogeneidad que atribuimos al espacio y al tiempo. Si establecemos que $x' = x - vt$ entonces debe ser cierto que un punto que está en reposo en el sistema k tendrá valores de x', y, z, independientes del tiempo. Definamos τ como una función de x', y, z y t. Para hacer ésto tenemos que expresar en ecuaciones el que τ no sea más que el sumario de los datos de los relojes en reposo en el sistema k, los que fueron sincronizados según la regla de la sección 1. Sea un rayo de luz emitido desde el origen del sistema k en el tiempo τ_0 a lo largo del eje X hacia x'; en el tiempo τ_1 se refleja hacia el origen y llega allí en el tiempo τ_2.

Debemos tener pues que $(\tau_0 + \tau_2)/2 = \tau_1$, o, introduciendo los argumentos sobre la función τ y aplicando el principio de constancia de la velocidad de la luz en el sistema estacionario,

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t) + \tau\left(0,0,0,t+\frac{x'}{c-v}+\frac{x'}{c+v}\right)\right] = \tau\left(x',0,0,t+\frac{x'}{c-v}\right).$$

Luego, si x' se elige como una cantidad infinitesimal, entonces

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c-v}+\frac{1}{c+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{1}{c-v}\frac{\partial\tau}{\partial t},$$

esto es,

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{v}{c^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0.$$

Debe notarse que en lugar de elegir al sistema de coordenadas como origen del rayo de luz, pudimos elegir otro punto, de tal forma que la ecuación así obtenida sería válida para todos los posibles valores de x', y, z. Por un razonamiento análogo —aplicado a los ejes Y y Z— y teniendo en cuenta que la luz siempre se propaga a lo largo de estos ejes con velocidad $\sqrt{c^2-v^2}$ cuando se mide desde el sistema estacionario, tenemos que

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial z} = 0.$$

Ya que τ es una función lineal, sigue que

$$\tau = a\left(t - \frac{vx'}{c^2-v^2}\right),$$

donde a es una función desconocida de la forma $\phi(v)$, y donde suponemos por simplicidad que en el origen de k, $\tau = 0$ cuando $t = 0$.

Con la ayuda de este resultado determinaremos fácilmente las cantidades ξ, η, ζ, expresando en ecuaciones el hecho de que la luz (tal como lo requiere el principio de constancia de la velocidad de la luz junto con el principio de relatividad) también se propaga con velocidad c al medirse desde el sistema en movimiento. Para un rayo de luz emitido en el instante $\tau = 0$ en la dirección de ξ creciente, se verifica:

$$\xi = c\tau = ac\left(t - \frac{vx'}{c^2-v^2}\right).$$

Pero el rayo se mueve en relación al punto inicial de k con velocidad $c - v$ al medirse desde el sistema estacionario, así que

$$\frac{x'}{c-v} = t.$$

Sustituyendo este valor de t en la ecuación para ξ se obtiene

$$\xi = \frac{ac^2x'}{c^2-v^2}.$$

De manera análoga encontramos que, para los rayos que se mueven a lo largo de los otros ejes, se cumple:

$$\eta = c\tau = ac\left(t - \frac{vx'}{c^2-v^2}\right)$$

cuando

$$\frac{y}{\sqrt{c^2-v^2}} = t, \qquad x' = 0.$$

Así,

$$\eta = \frac{acy}{\sqrt{c^2-v^2}} \quad \text{y} \quad \zeta = \frac{acz}{\sqrt{c^2-v^2}}.$$

Sustituyendo x' por su valor, se obtiene:

$$\begin{aligned}\tau &= \phi(v)\beta(t - vx/c^2),\\ \xi &= \phi(v)\beta(x - vt),\\ \eta &= \phi(v)y,\\ \zeta &= \phi(v)z,\end{aligned}$$

donde $\beta = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ y ϕ es aún una función desconocida de v. Si no se hace alguna suposición sobre la posición inicial del sistema en movimiento y sobre el valor cero de τ, entonces habrá que añadir una constante aditiva en el lado derecho de las anteriores ecuaciones.

A continuación tenemos que probar que cualquier rayo de luz, medido desde el sistema en movimiento, se propaga con velocidad c, si, tal como se ha supuesto, esta es la velocidad de propagación de la luz en el sistema estacionario, pues aún no demostramos que el principio de constancia de la velocidad de la luz es compatible con el principio de relatividad.

En el instante $t = \tau = 0$, cuando coinciden los orígenes de los sistemas de coordenadas, se emite desde allí una onda esférica luminosa que se propaga con velocidad c en el sistema K. Si (x, y, z) es un punto de esta onda, entonces

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2.$$

Transformando esta ecuación para las variables ξ, η, ζ, τ, se obtiene después de un cálculo sencillo:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2\tau^2.$$

Así, la onda en cuestión continúa siendo una onda esférica con velocidad c cuando se ve desde el sistema en movimiento. Esto muestra que nuestros dos principios fundamentales son campatibles ([5]) .

[5] Las ecuaciones de las transformaciones de Lorentz se pueden deducir directamente de manera más simple a partir de la condición de que, en virtud a dichas ecuaciones, la relación $x^2+y^2+z^2 = c^2t^2$ tendrá como consecuencia que $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = c^2\tau^2$.

En las ecuaciones de transformación desarrolladas, aún aparece la función desconocida $\phi(v)$ que determinaremos a continuación. Para este propósito introduciremos un tercer sistema de coordenadas K' que se encuentra en estado de movimiento traslacional paralelo al eje X, de tal forma que el origen del sistema k se mueva con velocidad $-v$ a lo largo del eje X. En el instante $t = 0$ los tres orígenes coinciden, y cuando $t = x = y = z = 0$ el tiempo del sistema K' es $t' = 0$. Por una aplicación doble de las ecuaciones de transformación, se obtiene las coordenadas x', y', z' del sistema K':

$$\begin{aligned} t' &= \phi(-v)\beta(-v)(\tau + v\xi/c^2) = \phi(v)\phi(-v)t, \\ x' &= \phi(-v)\beta(-v)(\xi + v\tau) = \phi(v)\phi(-v)x, \\ y' &= \phi(-v)\eta = \phi(v)\phi(-v)y, \\ z' &= \phi(-v)\zeta = \phi(v)\phi(-v)z. \end{aligned}$$

Ya que las relaciones entre x', y', z' y x, y, z no contienen al tiempo t, los sistemas K y K' están mutuamente en reposo, y por ello está claro que la transformación de K a K' debe ser la transformación idéntica. Así,

$$\phi(v)\phi(-v) = 1.$$

Ahora nos preguntamos sobre el significado de $\phi(v)$. Prestemos atención a la parte del eje Y en el sistema k que se encuentra entre $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$, y $\xi = 0, \eta = l, \zeta = 0, \xi = 0$. Esta parte del eje Y puede verse como una vara que se mueve de forma perpendicular a su eje con velocidad v respecto al sistema K. Sus extremos tiene coordenadas en K:

$$x_1 = vt, \quad y_1 = l/\phi(v), \quad z_1 = 0;$$
$$x_2 = vt, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0.$$

Luego, la longitud de la vara en K es $l/\phi(v)$. Esto es lo que nos da el significado de $\phi(v)$. Por razones de simetría es evidente que la longitud de una vara modiéndose de forma perpendicular a su eje, tal como se mide desde el sistema estacionario, sólo depende de la velocidad y no de la dirección y sentido del movimiento. Así, la longitud de la vara en movimiento medida desde el sistema estacionario no varía si se intercambia v y $-v$. De aquí sigue que $l/\phi(v) = l/\phi(-v)$, esto es,

$$\phi(v) = \phi(-v).$$

De esta relación y aquella hallada previamente sigue que $\phi(v) = 1$, así que las ecuaciones de transformación son:

$$\begin{aligned} \tau &= \beta(t - vx/c^2), \\ \xi &= \beta(x - vt), \\ \eta &= y, \\ \zeta &= z, \end{aligned}$$

con $\beta = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

4. SIGNIFICADO FÍSICO DE LAS ECUACIONES OBTENIDAS CON RESPECTO AL MOVIMIENTO DE CUERPOS RÍGIDOS Y RELOJES

Consideremos una esfera rígida ([6]) de radio R que está en reposo relativo al sistema en movimiento k, y cuyo centro coincide con el origen de las coordenadas de k. La ecuación de la superficie de esta esfera que se mueve respecto al sistema K con velocidad v es

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2.$$

La ecuación de esta superficie expresada en términos de x, y, z en el instante $t = 0$ es

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1 - v^2/c^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2.$$

Esto significa que un cuerpo rígido con forma esférica cuando se mide en reposo, al estar en movimiento y medirse desde el sistema estacionario, tendrá la forma de un elipsoide de revolución con ejes

$$R\sqrt{1 - v^2/c^2}, R, R.$$

Así, mientras las dimensiones Y y Z de la esfera (y de cualquier otro cuerpo rígido sin importar su forma) no se modifican por el movimiento, la dimensión a lo largo de X aparece acortada por un cociente 1:$\sqrt{1 - v^2/c^2}$, esto es, mientras mayor es el valor de v, mayor es el efecto del acortamiento. Si $v = c$, todos los objetos en movimiento —vistos desde el sistema "estacionario"— se contraen o colapsan en figuras planas. Para velocidades mayores a las de la luz nuestras deliberaciones carecen ya de sentido; sin embargo, veremos a continuación que, en nuestra teoría, la velocidad de la luz equivale físicamente a una velocidad infinitamente grande. Está claro que el mismo resultado es válido para cuerpos en reposo en el sistema "estacionario", tal como se los ve desde el sistema en movimiento uniforme.

Imaginemos ahora un reloj que registra el tiempo t cuando está en reposo respecto al sistema estacionario, mientras que registra el tiempo τ cuando está en reposo respecto al sistema en movimiento. Este reloj está localizado en el origen del sistema de coordenadas k y se ajusta para registrar el tiempo τ. Luego nos preguntamos: ¿cuál es el ritmo de este reloj cuando se ve desde el sistema estacionario? Entre las cantidades x, t, τ que se refieren a la posición del reloj, tenemos evidentemente que $x = vt$ y

$$\tau = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Entonces, se cumple que

$$\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2} = t - (1 - \sqrt{1 - v^2/c^2})t,$$

[6] Esto es, un cuerpo de forma esférica cuando se ve en reposo.

de donde sigue que el tiempo registrado (visto desde el sistema estacionario) se retrasa $1-\sqrt{1-v^2/c^2}$ segundos por cada segundo, o bien —ignorando magnitudes de cuarto orden y superiores— se retrasa en $v^2/2c^2$ segundos por cada segundo.

De aquí sigue una consecuencia peculiar. Si en los puntos A y B del sistema K hay relojes estacionarios que, vistos desde el sistema estacionario, están sicronizados, y si el reloj en A se mueve con velocidad v hacia B a lo largo de la línea que une A y B, entonces al llegar a B ambos relojes ya no estarán sincronizados, pues el reloj que se movió de A a B se retrasa respecto al reloj en B por $tv^2/2c^2$ (hasta términos de cuarto orden y superiores), donde t es el tiempo de viaje de A a B. De inmediato parece que este resultado es válido aun si el reloj va de A a B a través de una línea poligonal así como cuando los puntos A y B coinciden. Si suponemos que el resultado que se demuestra para una línea poligonal vale asimismo para una línea curva, llegamos al siguiente resultado: si uno de dos relojes sincronizados está en A y se mueve por una curva cerrada a velocidad constante hasta llegar de nuevo a A, siendo t el tiempo de viaje completo, entonces el reloj viajero al llegar a A estará retrasado por $tv^2/2c^2$ segundos respecto al reloj en reposo. De aquí concluimos que un reloj balanceado ([7]) en el ecuador terrestre debe ir más lento, por una cantidad muy pequeña, que un reloj idéntico situado, bajo las mismas condiciones, en alguno de los polos terrestres.

5. COMPOSICIÓN DE VELOCIDADES

Supongamos que en el sistema k, que se mueve con velocidad v a lo largo del eje X del sistema K, se mueve a su vez un punto de acuerdo a las ecuaciones

$$\xi = w_\xi \tau, \quad \eta = w_\eta \tau, \quad \zeta = 0,$$

donde w_ξ y w_η son constantes. A continuación se pide conocer el movimiento del punto con respecto al sistema K. Con ayuda de las ecuaciones de transformación desarrolladas en la sección 3, introducimos las cantidades x, y, z, t en las ecuaciones de movimiento del punto, de donde obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{w_\xi + v}{1 + v w_\xi / c^2} t, \\ y &= \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v w_\xi / c^2} w_\eta t, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Así, la ley del paralelogramo de velocidades, de acuerdo a nuestra teoría, es válida sólo hasta la primera aproximación. Establezcamos:

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \\ w^2 &= w_\xi^2 + w_\eta^2, \\ \alpha &= \tan^{-1} w_y / w_x, \end{aligned}$$

donde α es el ángulo entre las velocidades v y w. Después de un sencillo cálculo se obtiene:

$$V = \frac{\sqrt{v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha - (vw\sin\alpha/c)^2}}{1 + vw\cos\alpha/c^2}.$$

Debe señalarse que v y w aparecen de manera simétrica en la anterior expresión. Si w tiene la dirección de X, entonces

$$V = \frac{v + w}{1 + vw/c^2}.$$

De esta ecuación sigue que la composición de dos velocidades menores que c siempre resulta en una velocidad menor que c. Así, si $v = c - \kappa$, $w = c - \lambda$, con κ y λ positivos y menores que c, entonces

$$V = \frac{2c - \kappa - \lambda}{2c - \kappa - \lambda + \kappa\lambda/c} c < c.$$

Además, sigue que la velocidad de la luz c no se puede alterar por una composición con una velocidad menor a la de la luz:

$$V = \frac{c + w}{1 + w/c} = c.$$

Podriamos también obtener la fórmula para V en el caso en que v y w tengan la misma dirección, realizando la composición de dos transformaciones de acuerdo a la sección 3. Si además de los sistemas k y K de la sección 3, introducimos otro sistema de coordenadas k' moviéndose paralelo a k, y cuyo origen se mueve a lo largo del eje X con velocidad w, obtenemos ecuaciones entre las cantidades x, y, z, t y las correspondientes cantidades de k'; dichas ecuaciones difieren de aquellas encontradas en la sección 3 sólo en que en lugar de v se debe escribir

$$\frac{v + w}{1 + vw/c^2}.$$

Vemos así que estas transformaciones paralelas forman —necesariamente— un grupo.

Hemos deducido pues hasta aquí, las leyes requeridas para la cinemática correspondiente a nuestros dos principios fundamentales. A continuación demostraremos su aplicación a la electrodinámica.

II. PARTE ELECTRODINÁMICA

6. TRANSFORMACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL-HERTZ PARA EL ESPACIO VACÍO. ACERCA DE LA NATURALEZA DE LA FUERZA ELECTROMOTRIZ QUE OCURRE EN UN CAMPO MAGNÉTICO DURANTE EL MOVIMIENTO

Supongamos que las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío son válidas en el sistema estacionario

[7] Este no es un reloj de péndulo, que es un sistema físico al que pertenece la Tierra. Este caso tuvo que ser excluido.

K, de tal forma que

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, & \frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & \frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \end{aligned}$$

donde (X, Y, Z) denota al vector de fuerza eléctrica y (L, M, N) denota al vector de fuerza magnética.

Si aplicamos a estas ecuaciones las transformaciones desarrolladas en la sección 3, refiriendo los procesos electromagnéticos al sistema de coordenadas allí introducido que se mueve con velocidad v, obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\beta\left(N - \frac{v}{c}Y\right)\right] - \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\beta\left(M + \frac{v}{c}Z\right)\right], \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right)\right] &= \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\beta\left(N - \frac{v}{c}Y\right)\right], \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\beta\left(Z + \frac{v}{c}M\right)\right] &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\beta\left(M + \frac{v}{c}Z\right)\right] - \frac{\partial L}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right)\right] - \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\beta\left(Z + \frac{v}{c}M\right)\right], \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\beta\left(M + \frac{v}{c}Z\right)\right] &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\beta\left(Z + \frac{v}{c}M\right)\right] - \frac{\partial X}{\partial \zeta}, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\beta\left(N - \frac{v}{c}Y\right)\right] &= \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right)\right], \end{aligned}$$

con $\beta = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

El principio de relatividad requiere que si las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío son válidas en el sistema K, entonces también deben serlo en el sistema k. Esto es, los vectores de fuerza eléctrica y magnética —(X', Y', Z') y (L', M', N')— del sistema en movimiento k, que se definen por sus efectos ponderomotrices sobre las masas eléctrica y magnética respectivamente, deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial X'}{\partial \tau} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, & \frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{1}{c}\frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Es evidente que los sistemas de ecuaciones encontrados para el sistema k deben expresar exactamente lo mismo, ya que ambos son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el sistema k. Además, ya que las ecuaciones de ambos sistemas coinciden, excepto por los símbolos para los vecores, entonces las funciones que aparecen en los sistemas de ecuaciones deben coincidir en sitios correspondientes, salvo por un factor $\psi(v)$ que depende sólo de v y que es común a todas las funciones de uno de los sistemas de ecuaciones. Así, tenemos las relaciones

$$\begin{aligned} X' &= \psi(v)X, & L' &= \psi(v)L, \\ Y' &= \psi(v)\beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right), & M' &= \psi(v)\beta\left(M + \frac{v}{c}Z\right), \\ Z' &= \psi(v)\beta\left(Z + \frac{v}{c}M\right), & N' &= \psi(v)\beta\left(N - \frac{v}{c}Y\right). \end{aligned}$$

Si ahora construimos el sistema recíproco de ecuaciones, resolviendo primero las anteriores ecuaciones y aplicando luego éstas a la transformación inversa (de k a K) que se caracteriza para la velocidad $-v$, entonces se obtiene $\psi(v)\psi(-v) = 1$ al considerar que los dos sistemas de ecuaciones obtenidos deben ser idénticos. Luego, por razones de simetría ([8]), se obtiene $\psi(v) = 1$, así que nuestras ecuaciones toman la forma

$$\begin{aligned} X' &= X, & L' &= L, \\ Y' &= \beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right), & M' &= \beta\left(M + \frac{v}{c}Z\right), \\ Z' &= \beta\left(Z + \frac{v}{c}M\right), & N' &= \beta\left(N - \frac{v}{c}Y\right). \end{aligned}$$

Para interpretar estas ecuaciones hagamos las siguientes consideraciones. Sea una carga puntual de electricidad con magnitud "uno" cuando se mide desde el sistema estacionario K, i.e, cuando dicha carga está en reposo en el sistema estacionario y ejerce una fuerza de una dina sobre otra carga de igual magnitud a una distancia de 1 cm. Por el principio de relatividad, esta carga eléctrica también tiene magnitud "uno" cuando se mide desde el sistema en movimiento. Si esta cantidad de electricidad está en reposo respecto al sistema estacionario, entonces, por definición, la fuerza que actúa sobre dicha carga es igual el vector (X, Y, Z). Si esta cantidad de electricidad está en reposo respecto al sistema en movimiento (al menos, durante un instante relevante), entonces la fuerza que actúa sobre la carga, medida desde el sistema en movimiento, es igual al vector (X', Y', Z'). En consecuencia, las primeras tres ecuaciones escritas arriba se pueden expresar en palabras así:

1. Si una carga puntual unitaria está moviéndose en un campo electromagnético, además de la fuerza eléctrica actúa una "fuerza electromotriz" sobre esta carga; si despreciamos los términos multiplicados por la segunda potencia de v/c y potencias mayores, dicha fuerza es igual al producto vectorial de la carga y la fuerza magnética dividida por la velocidad de la luz.

2. Si una carga puntual unitaria está moviéndose en un campo electromagnético, la fuerza que actúa sobre ésta es igual a la fuerza eléctrica que está presente en el sitio de la carga y que asignamos, por transformación del campo, al sistema de coordenadas que está en reposo respecto a la carga eléctrica (nueva forma de expresión). La analogía es válida para las "fuerzas magnetomotrices". Vemos que en la teoría desarrollada aquí, la fuerza

[8] Por ejemplo, si $X = Y = Z = L = M = 0$ y $N \neq 0$, está claro por simetría que cuando v cambia de signo sin cambiar su valor numérico, Y' también debe cambiar de signo sin cambiar su valor numérico.

electromotriz juega meramente el rol de un campo auxiliar, que se debe a la circunstancia de que tanto las fuerzas eléctricas como magnéticas no existen independientemente del estado de movimiento del sistema de coordenadas.

Está claro además, que la asimetría mencionada en la introducción de este trabajo, surgida como consecuencia de las corrientes producidas por el movimiento relativo de un imán y un conductor, ahora desaparece. Por lo tanto, cuestiones tales como cuál es el asiento de las fuerzas electromotrices (máquinas unipolares), ya no tienen sentido.

7. TEORÍA DEL EFECTO DOPPLER Y DE LA ABERRACIÓN

En el sistema K, muy lejos del origen del sistema de coordenadas, supongamos que existe una fuente de ondas electromagnéticas que, en la parte del espacio que contiene al origen del coordenadas, se puede representar hasta un grado suficiente de aproximación por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} X &= X_0 \sin\phi, \qquad & L &= L_0 \sin\phi, \\ Y &= Y_0 \sin\phi, \qquad & M &= M_0 \sin\phi, \\ Z &= Z_0 \sin\phi, \qquad & N &= N_0 \sin\phi, \end{aligned}$$

donde

$$\phi = \omega[t - (lx + my + nz)/c].$$

Aqui, (X_0, Y_0, Z_0) y (L_0, M_0, N_0) son vectores que definen la amplitud del tren de ondas, y l, m, n son los cosenos directores de la dirección de propagación de las ondas. A continuación nos preguntamos sobre la constitución de estas ondas cuando se examinan por un observador en reposo en el sistema en movimiento k.

Aplicando las ecuaciones de transformación halladas en la sección 6 para las fuerzas eléctricas y magnéticas, y las ecuaciones de la sección 3 para las coordenadas y el tiempo, se obtiene directamente:

$$\begin{gathered} X' = X_0 \sin\phi', \quad L' = L_0 \sin\phi', \\ Y' = \beta(Y_0 - vN_0/c)\sin\phi', \; M' = \beta(M_0 + vZ_0/c)\sin\phi', \\ Z' = \beta(Z_0 + vM_0/c)\sin\phi', \; N' = \beta(N_0 - vY_0/c)\sin\phi', \\ \phi' = \omega'[\tau - (l'\xi + m'\eta + n'\zeta)/c], \end{gathered}$$

donde

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega\beta(1 - lv/c), \\ l' &= \frac{l - v/c}{1 - lv/c}, \\ m' &= \frac{m}{\beta(1 - lv/c)}, \\ n' &= \frac{n}{\beta(1 - lv/c)}. \end{aligned}$$

De la ecuación para ω' sigue que sin un observador se mueve con velocidad v respecto a una fuente de luz de frecuencia ν e infinitamente distante, de tal forma que la línea "fuente-observador" forme un ángulo ϕ con la velocidad del observador referida a un sistema de coordenadas que está en reposo respecto a la fuente de luz, entonces la frecuencia ν' de la luz percibida por el observador está dada por

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos\phi \; v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Esta ecuación representa al efecto Doppler para velocidades cualesquiera. Cuando $\phi = 0$, la ecuación anterior toma la forma

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

Vemos pues que, en contraste con el punto de vista habitual, cuando $v = -c$, entonces $\nu' = \infty$.

Si designamos por ϕ' al ángulo entre la dirección de propagación de las ondas en el sistema en movimiento y la línea "fuente-observador", entonces la ecuación para l' toma la forma

$$\cos\phi' = \frac{\cos\phi}{1 - \cos\phi \; v/c}.$$

Esta ecuación expresa la ley de aberración en su forma más general. Si $\phi = \pi/2$, la ecuación se transforma en

$$\cos\phi' = -v/c.$$

Aún tenemos que encontrar la amplitud de las ondas tal como se ven desde el sistema en movimiento. Si designamos por A o A' a la amplitud de la fuerza eléctrica o magnética respectivamente, según se mida desde el sistema estacionario o en movimiento, obtenemos

$$A'^2 = A^2 \frac{(1 - \cos\phi \; v/c)^2}{1 - v^2/c^2},$$

que, para $\phi = 0$, se simplifica a

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - v/c}{1 + v/c}.$$

De estos resultados sigue que, para un observador que se aproxima con velocidad c a una fuente de luz, dicha fuente parece tener una intensidad infinita.

8. TRANSFORMACIÓN DE LA ENERGÍA DE LOS RAYOS LUMINOSOS. TEORÍA DE LA PRESIÓN DE RADIACIÓN EJERCIDA SOBRE REFLECTORES PERFECTOS

La energía de la luz por unidad de volumen es $A^2/8\pi$, así que, por el principio de relatividad, $A'^2/8\pi$ debe ser la densidad de energía medida desde un sistema en movimiento. El cociente A'^2/A^2 sería pues la razón de la "medida en movimiento" y la "medida en reposo" de la energía de un cierto ente luminoso, si el volumen de dicho ente fuera el mismo, ya sea que se mida en K o en k. Pero este no es el caso. Si l, m, n son los cosenos directores del rayo de luz en el sistema estacionario, ninguna energía atraviesa los elementos de área de una superficie esférica que se mueve con la velocidad de la luz; la ecuación de esta superficie es

$$(x - lct)^2 + (y - mct)^2 + (z - nct)^2 = R^2.$$

Así, podemos afirmar que esta superficie contiene permanentemente al mismo ente luminoso. Nos preguntamos ahora cuál es la cantidad de energía contenida por esta superficie cuando se ve desde el sistema k, es decir, la energía del ente luminoso con respecto al sistema k.

la superficie esférica, cuando se de desde el sistema en movimiento, se convierte en una superficie elipsoidal, cuya ecuación en el instante $\tau = 0$ es:

$$(\beta\xi - l\beta\xi v/c)^2 + (\eta - m\beta\xi v/c)^2 + (\zeta - n\beta\xi v/c)^2 = R^2.$$

Si designamos por S al volumen de la esfera y por S' al volumen del elipsoide, entonces se obtiene

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \cos\phi\, v/c}.$$

Luego, si E es la energía contendida por esta superficie en el sistema estacionario, y E' es la correspondiente energía en el sistema en movimiento, tenemos que

$$\frac{E'}{E} = \frac{A'^2 S'}{A^2 S} = \frac{1 - \cos\phi\, v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

que, para $\phi = 0$, se simplifica a

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

Debe notarse que la energía y la frecuencia de un ente energético varían según la misma ley, de acuerdo al estado de movimiento del observador.

Supongamos a continuación que el plano $\xi = 0$ consiste de una superficie reflejante perfecta, donde se reflejan las ondas consideradas en la sección 7. Queremos calcular la presión que ejerce la luz sobre la superficie reflejante, así como la dirección, frecuencia e intensidad de la luz reflejada. Sean las cantidades A, $\cos\phi$ y ν (referidas al sistema K) que caracterizan a la luz incidente. Desde el sistema k las correspondientes cantidades son:

$$\begin{aligned} A' &= A\frac{1 - \cos\phi\, v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ \cos\phi' &= \frac{\cos\phi - v/c}{1 - \cos\phi\, v/c}, \\ \nu' &= \nu\frac{1 - \cos\phi\, v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Para la luz reflejada, refiriéndonos al sistema k, se obtiene:

$$\begin{aligned} A'' &= A', \\ \cos\phi'' &= -\cos\phi', \\ \nu'' &= \nu'. \end{aligned}$$

Finalmente, transformando las expresiones de nuevo al sistema K, obtenemos para la luz reflejada:

$$\begin{aligned} A''' &= A''\frac{1 + \cos\phi''\ v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = A\frac{1 - 2\cos\phi\, v/c + v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}, \\ \cos\phi''' &= \frac{\cos\phi'' + v/c}{1 + \cos\phi''\ v/c} = -\frac{(1 + v^2/c^2)\cos\phi - 2v/c}{1 - 2\cos\phi\, v/c + v^2/c^2}, \\ \nu''' &= \nu''\frac{1 + \cos\phi''\ v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \nu\frac{1 - 2\cos\phi\, v/c + v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}. \end{aligned}$$

La energía que, medida desde el sistema estacionario, incide sobre un área unitaria de la superficie reflejante en un lapso unitario, es evidentemente $A^2(c\ \cos\phi - v)/8\pi$. La energía que se refleja de esta área en un lapso unitario es $A'''^2(-c\ \cos\phi''' + v)/8\pi$. La diferencia entre estos dos términos es, por el principio de energía, el trabajo hecho por la presión de la luz durante un lapso unitario. Así, si designamos a este trabajo como el producto Pv, donde P es la presión de la luz, obtenemos

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\frac{(\cos\phi - v/c)^2}{1 - v^2/c^2},$$

que se reduce, hasta una primera aproximación, a

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\phi,$$

lo que está de acuerdo con los experimentos y con otras teorías.

Así, todos los problemas sobre la óptica de los cuerpos en movimiento se pueden resolver por el método empleado aquí. Lo esencial es que la fuerza eléctrica y magnética de la luz, fuerza que es afectada por el cuerpo en movimiento, se transforme a un sistema de coordenadas en reposo respecto al cuerpo. De esta forma, todos los problemas de la óptica de los cuerpos en movimiento se reducen a problemas de óptica para cuerpos estacionarios.

9. TRANSFORMACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL-HERTZ CUANDO SE TOMA EN CUENTA CORRIENTES CONVECTIVAS

Comencemos por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\left(\frac{\partial X}{\partial t} + u_x\rho\right) &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, & \frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \frac{1}{c}\left(\frac{\partial Y}{\partial t} + u_y\rho\right) &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & \frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \frac{1}{c}\left(\frac{\partial Z}{\partial t} + u_z\rho\right) &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \end{aligned}$$

donde

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

denota 4π veces la densidad de corriente eléctrica y (u_x, u_y, u_z) denota al vector velocidad de la carga. Si imaginamos a las cargas eléctricas unidas a pequeños cuerpos rígidos (iones, electrones), las anteriores ecuaciones constituyen la base electromagnética de la teoría electrodinámica de Lorentz, así como de la óptica de los cuerpos en movimiento

Supongamos que estas ecuaciones son válidas en el sistema K, y las transformamos al sistema k con la ayuda de las ecuaciones de transformación dadas en las secciones 3 y 6. Obtenemos así:

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial X'}{\partial \tau} + u_\xi \rho'\right) = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$
$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial Y'}{\partial \tau} + u_\eta \rho'\right) = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$
$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial Z'}{\partial \tau} + u_\zeta \rho'\right) = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi},$$

donde

$$\begin{aligned} u_\xi &= \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \\ u_\eta &= \frac{u_y}{\beta(1 - u_x v/c^2)}, \\ u_\zeta &= \frac{u_z}{\beta(1 - u_x v/c^2)}, \end{aligned}$$

y

$$\rho' = \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta} = \beta(1 - u_x v/c^2)\rho.$$

Ya que —como se deduce del teorema de adición de velocidades (sección 5)— el vector (u_ξ, u_η, u_ζ) no es más que que la velocidad de la carga eléctrica medida desde el sistema k, tenemos pues la prueba, sobre la base de nuestros principios cinemáticos, de que los fundamentos de la teoría de Lorentz sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento está de acuerdo con el princpio de la relatividad.

Añadiré brevemente que de las anteriores ecuaciones se puede deducir de una manera sencilla la siguiente ley importante: si una carga eléctrica está en movimiento en cualquier lugar del espacio, sin alterar su magnitud al medirse desde un sistema de coordenadas que se mueve junto al cuerpo, entonces dicha carga permanece constante al medirse desde el sistema estacionario K.

10. DINÁMICA DEL ELECTRÓN LENTAMENTE ACELERADO

Supongamos que una partícula eléctrica con carga ε (llamada “electrón” en lo sucesivo) se mueve en un campo electromagnético, de tal forma que obedece la siguiente ley de movimiento: si el electrón está en reposo en un cierto instante, su movimiento en el siguiente instante está dado por

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \varepsilon X, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \varepsilon Y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \varepsilon Z, \end{aligned}$$

donde x, y, z denotan las coordenadas del electrón y m es su masa en tanto su movimiento sea lento. Si la velocidad del electrón es v en un cierto instante, queremos conocer la ley de movimiento del electrón para los instantes inmediatamente posteriores.

Sin afectar el caracter general de nuestras consideraciones, supondremos que el electrón, un cierto instante relevante, se encuentra en el origen del coordenadas y se mueve con velocidad v a lo largo del eje X del sistema K. Está claro pues que en ese instante $(t = 0)$ el electrón está en reposo respecto al sistema de coordenadas que se mueve paralelamente con velocidad v a lo largo del eje X. De esta suposición, junto con el principio de relatividad, está claro que para los siguientes instantes inmediatos (valores de t pequeños), el electrón, visto desde el sistema k, se moverá de acuerdo a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= \varepsilon X', \\ m\frac{d^2\eta}{d\tau^2} &= \varepsilon Y', \\ m\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} &= \varepsilon Z', \end{aligned}$$

donde los símbolos $\xi, \eta, \zeta, X', Y', Z'$ se refieren al sistema k. Si además decidimos que cuando $t = x = y = z = 0$ entonces $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$, las ecuaciones de transformación de las secciones 3 y 6 son válidas, de tal forma que

$$\begin{aligned} \tau &= \beta(t - vx/c^2), \\ \xi = \beta(x - vt), \quad & X' = X, \\ \eta = y, \quad & Y' = \beta(Y - vN/c), \\ \zeta = z, \quad & Z' = \beta(Z + vM/c). \end{aligned}$$

Con la ayuda de estas ecuaciones, transformamos las ecuaciones de movimiento del electrón del sistema k al sistema K y obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{m\beta^3} X, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{m\beta}(Y - vN/c), \qquad (1) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{m\beta}(Z + vM/c). \end{aligned}$$

Nos preguntamos ahora, de acuerdo al punto de vista usual, cuál es la masa “longitudinal” y cuál es la masa "transversal" del electrón en movimiento. Para responder re-escribimos las ecuaciones (1) en la forma

$$m\beta^3 \frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X = \varepsilon X',$$

$$m\beta^2 \frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon\beta(Y - vN/c) = \varepsilon Y',$$

$$m\beta^2 \frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon\beta(Z + vM/c) = \varepsilon Z',$$

y recalcamos que $\varepsilon X', \varepsilon Y', \varepsilon Z'$ son las componentes de la fuerza ponderomotriz que actúa sobre el electrón, tal como se ven en ese momento desde el sistema que se mueve junto al electrón (esta fuerza se puede medir, por ejemplo, por un resorte en reposo en este último sistema). Si llamamos a esta fuerza simplemente "la fuerza que actúa sobre el electrón" ([9]) y mantenemos la ecuación *masa*× *aceleración=fuerza*, midiendo las aceleraciones en el sistema estacionario K, obtenemos de las anteriores ecuaciones que

$$\text{masa longitudinal} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^3},$$

$$\text{masa transversal} = \frac{m}{1 - v^2/c^2}.$$

Con otra definición de fuerza, naturalmente deberíamos obtener otros valores para las masas. Esto nos muestra que al comparar diferentes teorías sobre el movimiento del electrón, debemos proceder con mucha cautela.

Señalemos que estos resultados referidos a la masa también son válidos para puntos materiales ponderables, ya que un punto material ponderable puede convertirse en un electrón (de acuerdo a nuestro sentido de esta palabra) añadiéndole una carga eléctrica, *sin importar cuán pequeña*.

A continuación calcularemos la energía cinética del electrón. Si éste se mueve a partir del reposo en el origen de coordenadas del sistema K a lo largo del eje X bajo la acción de una fuerza electrostática X, está claro que la energía tomada del campo electrostático tiene el valor $\int \varepsilon X dx$. Ya que el electrón se acelerará lentamente, y en consecuencia no emitirá energía en forma de radiación, entonces la energía tomada del campo debe ser igual a la energía de movimiento W del electrón. Teniendo en cuenta que durante todo este proceso es válida la primera de las ecuaciones en (1), obtenemos:

$$W = \int \varepsilon X dx = m \int_0^v \beta^3 v dv = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right].$$

Así, cuando $v = c$, W es infinito. Por lo tanto, las velocidades mayores a la de la luz —como en nuestros resultados previos— no tienen posibilidad de existir. La expresión encontrada para la energía cinética debe, por el argumento dado antes, aplicarse asimismo a las masas ponderables.

A continuación enumeraremos las propiedades que resultan del sistema de ecuaciones (1) para el movimiento de un electrón, siendo estas propiedades accesibles a la experimentación.

1. De la segunda ecuación del sistema (1) sigue que una fuerza eléctrica Y y una fuerza magnética N, cuando $Y = Nv/c$, tienen acciones deflectivas igualmente intensas sobre un electrón con velocidad v. Vemos pues que es posible, de acuerdo a nuestra teoría, determinar la velocidad de un electrón a partir del cociente entre la intensidad de deflexión magnética A_m y la intensidad de deflexión eléctrica A_e (para cualquier velocidad), aplicando la ley

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{c}.$$

Esta relación puede verificarse experimentalmente, ya que la velocidad del electrón se puede medir de manera directa, por ejemplo, por medio de campos eléctricos y magnéticos rápidamente oscilantes.

2. De la deducción de la energía cinética del electrón, sigue directamente que entre la diferencia de potencial P y la velocidad v adquirida por el electrón debe darse la relación

$$P = \int X dx = \frac{m}{\varepsilon} c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right].$$

3. Calculemos ahora el radio de curvatura de la trayectoria seguida por el electrón cuando está presente una fuerza magnética N (sólo como una fuerza deflectiva) que actúa perpendicularmente sobre la velocidad del electrón. De la segunda ecuación del sistema (1) obtenemos

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{e}{m}\frac{v}{c} N \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

o bien

$$R = \frac{mc^2}{\varepsilon} \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{1}{N}.$$

Estas tres relaciones constituyen, según la teoría presentada en este trabajo, la expresión completa de las leyes de acuerdo a las que el electrón se debe mover.

Para concluir, deseo decir que al trabajar en el problema tratado aquí, tuve la asistencia leal de mi amigo y colega M. Besso, con quien quedo en deuda por varias sugerencias valiosas.

[9]La definición de fuerza dada aquí no es conveniente, tal como lo señaló por primera vez M. Planck. Es más adecuado definir la fuerza de tal manera que las leyes del *momentum* y la energía tomen su forma más simple.