

# RADIACIÓN GRAVITACIONAL DURANTE EL PROCESO DE COLISIÓN EN UN SISTEMA BINARIO

J.A.C. Nogales<sup>1</sup>, V. Subieta<sup>2</sup>

*Instituto de Investigaciones Físicas  
Universidad Mayor de San Andrés  
La Paz—Bolivia*

## RESUMEN

Este siglo será el siglo de la observación de ondas gravitacionales, de modo que este ha sido y es un tópico de estudio importante en los últimos años. Uno de los eventos más esperado para detectarse es la colisión de sistemas binarios. En este artículo se estudian dos aspectos de la colisión. Primero el decrecimiento del periodo orbital y la energía radiada en ondas gravitacionales. Ambos aspectos son presentados en una aproximación newtoniana y luego en una aproximación relativista usando la métrica de Weyl.

## 1. INTRODUCCIÓN

La radiación gravitacional es un tópico muy importante y grandes esfuerzos en su detección están siendo llevados a cabo. Hay cinco detectores basados en interferometría láser en vacío: LIGO, GEO 600 y VIRGO operarán pronto, TAMA 300 está colectando datos y LISA, que se planea este en funcionamiento alrededor del año 2011.

Uno de los eventos más importantes en la generación de ondas gravitacionales es la colisión de agujeros negros en sistemas binarios, por ello en este artículo se estudian dos aspectos de la colisión: el decrecimiento del periodo orbital debido a la pérdida de energía en radiación gravitacional y la cantidad de energía perdida. Ambas características son estudiadas en dos aproximaciones: Una aproximación Newtoniana y una aproximación relativista en la cual se usa la métrica de Weyl.

El decrecimiento del periodo orbital puede ser comparado con el decrecimiento de periodo orbital observado en el pulsar binario PSR1913+16. Esta comparación en la aproximación Newtoniana llevo a Hulse y Taylor a ganar el Premio Nóbel en 1993.

La cantidad de energía perdida podrá ser comparada con los datos observados que serán obtenidos por los detectores de radiación.

El plan en este artículo es el siguiente. En la sección 2 se estudiara la tasa de energía emitida en ondas gravitacionales en un sistema binario, en el cual un miembro está orbitando alrededor del otro. En la sección 3 se presenta el decrecimiento del periodo en una aproximación Newtoniana (sección 3.1), y en una aproximación relativista (sección 3.2) usando la métrica de Weyl. Al final de esta sección se discuten los resultados. En la sección 4 se estudia la tasa de energía gravitacional radiada en una aproximación Newtoniana (sección 4.1) y en dos aproximaciones relativistas (sección 4.2 y 4.3) y luego se

comparan los resultados. En la sección 4.4 se obtiene la cantidad de energía radiada total para todas las aproximaciones y se discuten los resultados.

## 2. ENERGÍA RADIADA POR SISTEMAS BINARIOS

El cálculo de la energía gravitacional radiada por un sistema constituido por dos partículas una orbitando alrededor de la otra fue realizado por Shapiro y Teukolsky [1] de la siguiente forma:

La energía gravitacional radiada por cualquier sistema está dada por:

$$L_{GW} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \left[ \dot{I}_{jk} \dot{I}_{jk} \right]. \quad (1)$$

Aquí  $I_{jk}$  es el momento de masa cuadrupolar:

$$I_{jk} \equiv \sum_A \left[ x_j^A x_k^A - \frac{1}{3} \delta_{jk} (x^A)^2 \right], \quad (2)$$

y los puntos arriba denotan derivación respecto al tiempo

En nuestro sistema se consideran dos masas puntuales  $M_1$  y  $M_2$ , una orbitando alrededor de la otra con el eje z como el eje de rotación. Sus distancias al centro de masas son  $a_1$  y  $a_2$ , luego

$$M_1 a_1 = M_2 a_2 = \mu a, \quad (3)$$

donde

$$\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad (4)$$

es la masa reducida. Si  $\phi$  es el ángulo azimutal desde el eje x a la línea que une las masas, entonces tenemos

$$I_{xx} = -\frac{1}{2} \mu a^2 \cos 2\phi - \frac{1}{3} \frac{\mu a^2}{2}, \quad (5)$$

$$I_{yy} = \frac{1}{2} \mu a^2 \cos 2\phi - \frac{1}{3} \frac{\mu a^2}{2}, \quad (6)$$

<sup>1</sup>Email: jnogales@fiums.a.edu.bo

<sup>2</sup>Email: veronicasubieta@hotmail.com

$$I_{xy} = I_{yx} = \frac{1}{2}\mu a^2 \text{sen}2\phi - \frac{4}{3}\frac{\mu a^2}{2}, \quad (7)$$

con esto en la ecuación 1 y como  $\phi = \Omega t$  donde  $\Omega$  es la velocidad angular, se encuentra para este sistema

$$L_{GW} = \frac{32}{5}\frac{G^4}{c^5}\frac{M^3\mu^2}{a^5}, \quad (8)$$

donde  $M = M_1 + M_2$ . Aquí se uso la tercera ley de Kepler

$$\Omega^2 = \frac{GM}{a^3}. \quad (9)$$

### 3. EL DECRECIMIENTO DEL PERIODO ORBITAL

La pérdida de energía en radiación gravitacional lleva a un decrecimiento en la distancia  $a$  y por consiguiente a un decrecimiento en el periodo orbital  $P \equiv \frac{2\pi}{\Omega}$ .

#### 3.1. El decrecimiento del periodo orbital en una aproximación newtoniana

La energía del sistema es la suma de la energía cinética de rotación y la energía potencial Newtoniana

$$E = \left(\frac{1}{2}M_1a_1^2 + \frac{1}{2}M_2a_2^2\right)\Omega^2 - \frac{GM_1M_2}{a} = -\frac{1}{2}\frac{G\mu M}{a}. \quad (10)$$

Entonces el decrecimiento del periodo orbital debido a la variación de la energía es

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}. \quad (11)$$

Usando la ecuación 8 se obtiene

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = -\frac{96}{5}\frac{G^3}{c^5}\frac{M^2\mu}{a^4}. \quad (12)$$

Si las dos masas están en una órbita elíptica con excentricidad  $e$ , entonces

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dt}\Big|_{e=0} f(e), \quad (13)$$

donde

$$f(e) \equiv \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right)(1 - e^2)^{-7/2}. \quad (14)$$

Considerando una órbita elíptica y usando la tercera ley de Kepler (9) en la ecuación 12 se obtiene que el decrecimiento del periodo orbital es

$$\dot{P} = \frac{-192\pi}{5}\frac{G^{\frac{5}{3}}M_1M_2}{c^5(M_1 + M_2)^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{2\pi}{P}\right)^{\frac{5}{3}}f(e). \quad (15)$$

Este resultado podría ser testado usando los datos experimentales obtenidos del pulsar binario PSR1913+16. El valor predicho fue  $\dot{P} = -2.4010^{-12}$  [1], en excelente acuerdo con el medido de  $(-2.30 \pm 0.22)10^{-12}$ . Este resultado fue la primera evidencia indirecta de la existencia de las ondas gravitacionales y gracias a esto Hulse y Taylor ganaron el Premio Nobel en 1993.

### 3.2. El Decrecimiento del Periodo Orbital en una Aproximación Relativista

#### 3.2.1. La métrica de Weyl

Esta métrica describe un espacio tiempo vacío estático y axisimétrico.

El elemento de línea en coordenadas polares está dado por

$$ds^2 = e^{2\psi}dt^2 - e^{-2\psi}[e^{2\nu}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2d\phi^2], \quad (16)$$

donde  $\psi = \psi(\rho, z)$ ,  $\nu = \nu(\rho, z)$ ,  $0 < \rho < \infty$ ,  $-\infty < z < \infty$  y  $0 < \phi < 2\pi$ . Las ecuaciones de campo de Einstein son

$$\nabla^2\Psi \equiv \Psi_{\rho\rho} + \frac{\Psi_\rho}{\rho} + \Psi_{zz} = 0, \quad (17)$$

$$\nu_\rho = \rho(\Psi_\rho^2 - \Psi_z^2), \quad (18)$$

$$\nu_z = 2\rho\Psi_\rho\Psi_z. \quad (19)$$

Existe una solución exacta a estas ecuaciones, la cual es isométrica a la solución de Schwarzschild, esto significa que el espacio tiempo de un solo agujero está incluido en la clase de Weyl, esto puede ser demostrado desarrollando una transformación de coordenadas, de coordenadas polares a coordenadas esféricas. En coordenadas polares el horizonte del agujero negro está dado por  $\rho = 0$  y  $-M \leq z \leq M$ .

Como la ecuación (17) es lineal, uno puede superponer dos soluciones, cada una de ellas correspondiente a un agujero negro. Usando aquello uno puede resolver las ecuaciones (18) y (19) para obtener una solución que puede ser interpretada como dos agujeros negros con una singularidad entre ellos, la cual los mantiene apartados. Esta solución es

$$\Psi = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{R_+ + R_- - 2M}{R_+ + R_- + 2M}\right] + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{R'_+ + R'_- - 2M'}{R'_+ + R'_- + 2M'}\right], \quad (20)$$

donde

$$R_\pm = \sqrt{\rho^2 + [z - (Z_0 + M) \mp M]^2}, \quad (21)$$

$$R'_\pm = \sqrt{\rho^2 + [z + (Z_0 + M') \mp M']^2}. \quad (22)$$

y

$$\nu = \nu[\Psi] + \nu[\Psi'] + 2\sigma[\Psi, \Psi'], \quad (23)$$

donde  $\Psi$ ,  $\nu[\Psi]$  y  $\Psi'$ ,  $\nu[\Psi']$  son soluciones a un solo agujero negro y  $\sigma[\Psi, \Psi']$  es el término de interacción entre ellos donde la singularidad está dada por:

$$\sigma[\Psi, \Psi'] = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{(M' + Z_0)R_+ + (M + M' + Z_0)R_- - MR'_-}{Z_0R_+ + (M + Z_0)R_- - MR'_+}\right] + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{Z_0}{Z_0 + M'}\right]. \quad (24)$$

Aquí  $2M$  y  $2M'$  son las masas de cada agujero negro centradas a  $Z_0 + M$  y  $-Z_0 - M'$  respectivamente.

Araujo y Oliveira [2] obtuvieron la fuerza entre los dos agujeros negros usando este término en el que está la singularidad, y ellos asumieron que esta fuerza de Weyl es adecuada para describir el movimiento de los agujeros negros. De aquí ellos identificaron la energía potencial en el sistema como

$$V(r)_{W1} = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{r-M}{r+M} \right]. \quad (25)$$

Ellos llamaron a este el potencial de Weyl.

### 3.2.2. El decrecimiento del periodo orbital en una aproximación relativista usando el potencial de Weyl

El potencial de Weyl puede ser reescrito como

$$V = \frac{GM_1M_2}{2r_s} \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right), \quad (26)$$

donde  $x = \frac{r_s}{a}$ ,  $r_s$  es el radio de Schwarzschild y  $a$  es la separación entre los dos agujeros negros.

Nosotros usamos este potencial en lugar del potencial Newtoniano en la ecuación de movimiento de los agujeros de modo que la energía del sistema está dada por

$$E = \frac{1}{2} \mu a^2 \Omega^2 + \frac{1}{2} \frac{\mu GM}{r_s} \ln \left( \frac{a-r_s}{a+r_s} \right). \quad (27)$$

El decrecimiento de la distancia  $a$  debido a la variación de la energía en el tiempo es:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \mu GM \frac{1}{a^2} \left( \frac{a^2 - r_s^2}{a^2 + r_s^2} \right) \frac{da}{dt}. \quad (28)$$

Usando las ecuaciones (8) y (9) se obtuvo

$$\dot{P} = \frac{-192\pi}{5} \frac{G^{\frac{5}{3}} M_1 M_2}{c^5 (M_1 + M_2)^{\frac{1}{3}}} \left( \frac{2\pi}{P} \right)^{\frac{5}{3}} f(e) \frac{(GM)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{P}{2\pi} \right)^{\frac{4}{3}} - r_s^2}{(GM)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{P}{2\pi} \right)^{\frac{4}{3}} + r_s^2}. \quad (29)$$

Si se compara este resultado con el obtenido en la aproximación newtoniana (15), se puede ver que la diferencia entre ellos es el factor  $f$ :

$$f = \frac{(GM)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{P}{2\pi} \right)^{\frac{4}{3}} - r_s^2}{(GM)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{P}{2\pi} \right)^{\frac{4}{3}} + r_s^2}, \quad (30)$$

Este puede ser reescrito

$$f = \frac{\frac{\widetilde{M}^{\frac{2}{3}}}{4\alpha^{\frac{3}{4}}} \left( \frac{P}{4\pi} \right)^{\frac{4}{3}} - 1}{\frac{\widetilde{M}^{\frac{2}{3}}}{4\alpha^{\frac{3}{4}}} \left( \frac{P}{4\pi} \right)^{\frac{4}{3}} + 1}, \quad (31)$$

donde  $\widetilde{M}$  es la masa total del sistema en unidades de masa solar y  $\alpha = \frac{GM_{\odot}}{c^3} = 4.925490x10^{-6}s$ . Nótese que este factor se torna importante si:

$$\widetilde{M}^{\frac{2}{3}} 4\alpha^{\frac{4}{3}} \left( \frac{P}{4\pi} \right)^{\frac{4}{3}} \approx 1. \quad (32)$$

Esto es equivalente a:

$$P^2 M \approx 3.06 \times 10^{-8} s^2. \quad (33)$$

Entonces podemos concluir que la aproximación Newtoniana es buena y la aproximación relativista podría ser importante solo para sistemas con la característica (33).

## 4. EMISIÓN DE ENERGÍA GRAVITACIONAL

La energía radiada durante el proceso de colisión está dada por la siguiente expresión

$$\frac{dE_g}{da} = \frac{dE_g}{dt} \frac{1}{\dot{a}}, \quad (34)$$

donde  $a$  está decreciendo en el tiempo y la energía radiada por unidad de tiempo fue calculada en la sección 2.

### 4.1. Emisión de energía gravitacional en una aproximación newtoniana

Bajo las mismas condiciones para nuestro sistema hechas en la sección (2), se puede asumir, que la ecuación de movimiento del sistema, usando una energía potencial newtoniana, es

$$\epsilon = -\frac{1}{2} \frac{\mu GM}{a} + \mu \frac{\dot{a}^2}{2}. \quad (35)$$

Usando esto y la tasa de energía radiada (8) en la ecuación (34) se obtiene

$$\frac{dE}{da} = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{M^3 \mu^2}{a^5} \left( \frac{2\epsilon}{\mu} + \frac{GM}{a} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (36)$$

Haciendo  $M = 1$ , de esta forma se está reescalando las coordenadas del espacio tiempo. Entonces se tiene que  $\mu = M_1 M_2$ , o usando el factor de proporción entre las masas de los agujeros negros  $b$  ( $b = \frac{M_1}{M_2}$ ) se tiene:  $\mu = \frac{b}{(b+1)^2}$ , donde  $\mu$  representa la razón de masa de los dos agujeros negros. Nótese que  $\mu$  toma el máximo valor  $\frac{1}{4}$  cuando los agujeros negros tienen la misma masa.

Con este reescalamiento del espacio tiempo y en unidades geometrizadas se tiene

$$\frac{dE}{da}_N = \frac{32}{5} \frac{\mu^2}{a^5} \left( 2\epsilon' + \frac{1}{a} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (37)$$

donde  $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\mu}$ .

Ésta es la tasa de emisión de energía en ondas gravitacionales durante la colisión, es decir a medida que la distancia  $a$  entre los agujeros decrece, obtenida en una aproximación Newtoniana

### 4.2. Emisión de energía gravitacional en una aproximación relativista

#### 4.2.1. Primera aproximación

Se toma como energía potencial del sistema la energía encontrada por Araujo y Oliveira eq. (25), trabajando con la singularidad entre los dos agujeros, la cual los mantiene fijos.

TABLA 1

Cantidad total de energía radiada calculada para las tres aproximaciones desarrolladas, como función de  $a_{max}$ , para dos valores diferentes de  $\mu$ :  $\mu = \frac{1}{7}$ , o un agujero tiene una masa cinco veces mayor a la del otro y  $\mu = \frac{1}{256}$  cuando un agujero es mucho más grande que el otro. El valor de  $a_{min}$  usado es indicado dentro los *brackets*.

x	$\mu = 1/7 \Delta E [1.3871]$	$\mu = 1/256 \Delta E [1.1040]$	$\Delta E_{W1} [1.4537]$	$\Delta E_{Newton} [1]$
$\infty$	0.5425	0.9325	0.4415	1.8286
100	0.5462	0.9367	0.000	1.1708
20	0.5615	0.9526	0.4302	1.2010
5	0.6190	0.9954	0.00	1.3424

Luego, con esta energía potencial en unidades geometrizadas y en un espacio tiempo reescalado ( $M = 1$ ), la ecuación de movimiento es:

$$\epsilon' = \frac{1}{2a} + \frac{\dot{a}^2}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{a-1}{a+1}. \quad (38)$$

Usando esto y (8) en la ecuación(34), se obtiene

$$\frac{dE}{da}_{W1} = \frac{32}{5} \frac{\mu^2}{a^5} \left( 2\epsilon' - \frac{1}{a} - \ln \left( \frac{a-1}{a+1} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (39)$$

Ésta es la tasa de energía gravitacional radiada usando una aproximación relativista donde en la energía potencial del sistema es considerada sólo la singularidad entre los dos agujeros negros.

#### 4.2.2. Segunda Aproximación

Usando la métrica de Weyl y obteniendo el Tensor energía momento, se dedujo otra energía potencial para el sistema [3]. La diferencia con la energía potencial de Araujo y Oliveira es que en este potencial es considerado todo el sistema, esto significa: que los dos agujeros negros están incluidos además de la singularidad entre ellos. Esta energía potencial en unidades geometrizadas y en un espacio tiempo reescalado  $M = 1$  está dado por

$$V_{W2} = \frac{\mu}{4} \ln \left( \frac{a^2 - 2a + a}{a^2 + 2a - 3 + 16\mu} \right). \quad (40)$$

Con esto la ecuación de movimiento será

$$\epsilon' = \frac{1}{2a} + \frac{\dot{a}^2}{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{a^2 - 2a + a}{a^2 + 2a - 3 + 16\mu}. \quad (41)$$

Usando ésta y 8 en la ecuación 34 se obtiene

$$\frac{dE}{da}_{W2} = \frac{32}{5} \frac{\mu^2}{a^5} \left( 2\epsilon' - \frac{1}{a} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(a-1)^2}{(a+1)^2 - 4(1-4\mu)} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (42)$$

Ésta es la tasa de energía gravitacional radiada usando una aproximación relativista donde en la energía potencial del sistema se considera los dos agujeros negros y la singularidad entre ellos.

Es importante notar cuando  $\mu = \frac{1}{4}$ , esto es cuando los dos agujeros negros tienen masas iguales, la tasa de energía gravitacional radiada en la segunda aproximación decae en la obtenida en la primera aproximación. Cuanto más diferentes son las masas de los agujeros negros la segunda aproximación debería ser usada.

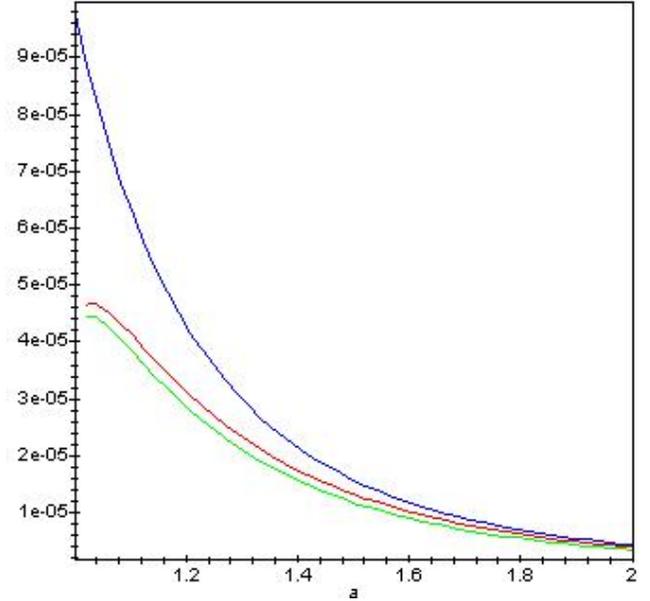


Figura 1. Tasa de emisión de energía gravitacional como una función de la distancia entre los agujeros para las tres aproximaciones desarrolladas. La curva superior es la obtenida para la aproximación newtoniana, la siguiente es la curva obtenida para la primera aproximación relativista, y la curva inferior es la obtenida para la segunda aproximación relativista. La condición inicial para las tres curvas es  $\epsilon' = 0$ , esto es cuando los agujeros se encuentran en reposo en el infinito. Y  $\mu = \frac{1}{256}$  esto es cuando los agujeros negros tienen masas muy diferentes. Cuanto mas similares se hacen las masas de los agujeros la curva inferior se aproxima a la curva obtenida en la segunda aproximación relativista.

#### 4.3. Cantidad total de energía radiada

La cantidad total de energía radiada en ondas gravitacionales será

$$\Delta E_{a_{max}, a_{min}} = \int_{a_{min}}^{a_{max}} \frac{dE}{dx} dx. \quad (43)$$

Aquí  $a_{max}$  es la distancia inicial entre los dos agujeros negros. Cuando los dos agujeros se encuentran muy cerca las aproximaciones hechas, obviamente pierden validez, entonces es importante escoger adecuadamente  $a_{min}$ . Una posibilidad es escoger el punto donde los agujeros negros alcanzan la velocidad de la luz cuando caen el

uno en el otro desde una distancia infinita, llamaremos a este punto  $a_{luz}$ . Esta elección está justificada por la Relatividad Especial.

$a_{luz}$  puede ser deducido de la ecuación de movimiento obtenida en cada aproximación que se hizo (ecuaciones 35, 38, 41). En la aproximación newtoniana  $a_{luzN} = 1$ , en la primera aproximación relativista  $a_{luzW1}$  es la solución para  $a$  de la ecuación  $e^{\frac{1+a}{a}} = \frac{a+1}{a-1}$ , y en la segunda aproximación relativista  $a_{luzW2}$  es la solución para  $a$  de la ecuación  $e^{\frac{2(1+a)}{a}} = \frac{(a+1)^2 - 4(1-4\mu)}{(a-1)^2}$ . Nótese que el valor de  $a_{luz}$  en la segunda aproximación relativista depende de  $\mu$ , y toma valores entre 1.4537, cuando los dos agujeros tienen la misma masa y el límite, 1.0880 cuando los agujeros negros son muy diferentes. La energía radiada calculada usando el segundo potencial decae en la energía obtenida usando la aproximación de Araujo y Oliveira cuando los agujeros se hacen mas similares, es

lo que se esperaba pues cuando hay menos simetría la segunda aproximación se hace importante porque considera dentro del potencial a los propios agujeros negros que al ser menos similares entre sí distorsionan más el espacio tiempo.

#### REFERENCIAS

- [1] Shapiro, S., Teukolsky, S. 1983, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*, Wiley, USA
- [2] Araujo, M., Oliveira, S. 1994 *Static axisymmetric approach for the head-on collision of two black holes*, Physical Review, 52,1995
- [3] Subieta V., Nogales, J.A.C. 2002, *Colisión de dos agujeros negros*
- [4] Anninos, P., Hobill, D., Siedel, E., Smarr, L., y Suen, W. 1994 *The Head-On Collision of Two Equal Mass Black Holes*, NCSA report No. 048