Revista Boliviana de Física **10**, 63–70 (2004)

EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS: UNA DEDUCCIÓN ALTERNATIVA
(The Method of the Least Squares: An Alternative Deduction)

Wilton P. Silva[1], Cleide M. D. P. S. e Silva[2], Diogo D. P. S. e Silva[3], Cleiton D. P. S. e Silva[4]

[1,2]*Departamento de Física*
[3]*Departamento de Matemática e Estatística*
[1,2,3]*UFCG, 58109-970, Campina Grande, PB, Brasil*
[4]*ITA, São José dos Campos, São Paulo, Brasil*

RESUMEN

La mayoría de los libros didácticos que abordan el problema del ajuste de curvas deducen el método de los mínimos cuadrados a partir de la presunción de que un conjunto de puntos experimentales del tipo $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$ fluctuan, en torno de la función ajustada, con una distribución gaussiana de errores. En este artículo es propuesta una deducción alternativa, sin partir de esta presunción. Se obtienen fórmulas para los parámetros de una función de primer grado, para sus incertidumbres y para la covarianza entre sus parámetros. Estas fórmulas son aplicadas a un conjunto de puntos $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$ que se ajustan a una recta. La determinación de una incertidumbre para la función ajustada a puntos del tipo $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$ es discutida y, con ello, dicha función pasa a estar dada por $y(x) = y(x)_m \pm \sigma_{y(x)m}$, donde $y(x)_m$ es la "expresión media" de la función y $\sigma_{y(x)m}$ es su incertidumbre. Una aplicación del estudio desarrollado se hace para datos obtenidos en un péndulo de torsión y el análisis de los resultados obtenidos a través de las expresiones deducidas permite establecer el modelo que relaciona el torque aplicado al péndulo y su ángulo de torsión.

ABSTRACT

The majority of didactic textbooks treating the problem of curve fitting deduces the method of least squares from the presupposition that a set of experimental points of the type $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$ is distributed normally around the fitted function. This article proposes an alternative deduction without use of this presupposition. Formulas are obtained for the parameters of a function of first degree, for their uncertainties and for the covariance between these parameters. These formulas are applied to a set of points $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$ suited around a straight line. The determination of the uncertainty of the function fitted to points of the type $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$ is discussed and the fitted function is then given by $y(x) = y(x)_m \pm \sigma_{y(x)m}$, where $y(x)_m$ is the "averaged expression" of the function and $\sigma_{y(x)m}$, is its uncertainty. An application of the study is carried out for dates obtained from a torsion pendulum and the analysis of the results permits to establish the relationship between the torque applied on the pendulum and its torsion angle.

1. INTRODUCCIÓN

En el trabajo experimental, en general estamos involucrados con medidas que, muchas veces, resultan en tablas que poseen una representación gráfica. Hasta inicios de la década de los 80 era común extraer resultados experimentales a partir del análisis de gráficos, en general trazados en papel milimetrado, *semilog* y *log-log*. Con la popularización de los microcomputadores, varios *softwares* fueron desarrollados con el objetivo de analizar datos experimentales que pueden ser representados gráficamente. El método utilizado en esos *softwares* es el método de los mínimos cuadrados que, en la mayoría de los textos didácticos, es desarrollado a partir de la presunción de que los puntos experimentales presentan flutuaciones con una distribución normal de errores en torno de la función ajustada. En este artículo proponemos una deducción alternativa para el método de los mínimos cuadrados, sin la consideración de la distribución normal de errores, en el ajuste de una función de dos parámetros a puntos del tipo $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$. Conviene observar que y_i es el valor medio de la ordenada del i-ésimo punto y que σ_{ymi} es la incertidumbre de ese valor medio. Incluiremos además, la deducción de una importante información con relación a la función ajus-

[1]Email: wiltonps@uol.com.br

tada, que es la determinación de una incertidumbre asociada a esa función. Específicamente, la función objeto de este estudio será la función de primer grado.

A pesar de que la determinación de incertidumbres para puntos del tipo $(x_i; y_i)$ sea común en muchos trabajos; nosotros lo haremos para puntos del tipo $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$, esto es, para puntos cuya incertidumbre de la variable dependiente sea conocida. Para esos casos, el sistema físico objeto de estudio pasa a ser descrito de forma completa, por la expresión $y(x) = y(x)_m \pm \sigma_{y(x)m}$, siendo $y(x)_m$ la función ajustada, y $\sigma_{y(x)m}$ la incertidumbre de esa función. En todo el artículo supondremos que la variable independiente está excenta de errores. Si no fuera así, el estudio desarrollado aquí continúa siendo válido pero, en este caso, hay que hacer un ajuste previo con x excento de errores y, en seguida, transferir las incertidumbres de x para y, por propagación de errores, seguido por un nuevo ajuste. De los *softwares* más conocidos disponibles en el mercado, pocos como el "Origin"[2] y el "LAB Fit Curve Fitting"[3] determinan una incertidumbre para funciones de primer grado ajustadas a puntos del tipo $(x_i; y_i)$. El "LAB Fit" es el único conocido por los autores de este artículo que hace la transferencia de las incertidumbres de x para y de forma automática, a partir de la información de las incertidumbres de x. A propósito, el presente artículo tiene su origen en el desarrollo de este *software*, creado en complementación al libro "Tratamento de Dados Experimentais" [1].

2. DEDUCCIÓN USUAL DEL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

Dado un conjunto de N puntos $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$ y una función $f(x, a, b)$, donde x es la variable independiente y a y b son los parámetros de esa función, su ajuste al conjunto de puntos puede ser obtenido a través del método de los mínimos cuadrados. Este método ha sido desarrollado en muchos textos didácticos a partir de la siguiente presunción: las distribuciones de los errores de los puntos experimentales en torno de la curva ajustada deben ser gaussianas. Eso significa que en un gráfico, la probabilidad de que un punto $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$ "esté sobre la curva ajustada" está dada por la función de distribución normal (ver, por ejemplo, la referencia [2]):

$$P_i = \frac{C}{\sigma_{ymi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y_i - f(x_i, a, b)}{\sigma_{ymi}}\right]^2}, \tag{1}$$

donde C es una constante que tiende a uno por cuanto P_i es, de hecho, una densidad de probabilidad. Así, la probabilidad de que la curva contenga todos los N puntos experimentales está dada por el prodcuto de las probabilidades individules:

$$P = \frac{C^N}{\prod_{i=1}^{N} \sigma_{ymi}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{y_i - f(x_i, a, b)}{\sigma_{ymi}}\right]^2}. \tag{2}$$

Naturalmente, la función que mejor se ajusta a los puntos es aquella para la cual la probabilidad P es máxima. A eso se da el nombre de principio de la máxima probabilidad. Entonces, el exponente negativo de la función dada en la Eq. (2), debe ser, en módulo, un mínimo. Denotando la sumatoria del exponente de la Eq. (2) por χ^2, esto es, haciendo

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} [y_i - f(x_i, a, b)]^2 \frac{1}{\sigma_{ymi}^2}, \tag{3}$$

las condiciones para que χ^2 sea un mínimo son:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0 \quad y \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0. \tag{4}$$

A partir de las condiciones dadas en (4) y de la expresión obtenida en (3), tenemos un sistema de dos ecuaciones que nos posibilita determinar los parámetros a y b para una función específica. Esta es la deducción usual del método de los mínimos cuadrados, y es presentada de esa forma en la mayoría de los libros que tratan el problema del ajuste de curvas. Aún cuando el razonamiento empleado en la deducción sea bastante simple, induce al estudiante a creer que tal método sólo puede ser aplicado si los puntos experimentales fluctúan con distribución normal en torno de la función ajustada. En este artículo, mostraremos que el método de los mínimos cuadrados puede ser desarrollado sin la suposición de la distribución normal. Naturalmente, si la distribución normal existe, habrá mayor disponibilidad de información sobre la función ajustada, como por ejemplo, la asociación de una probabilidad a los intervalos determinados para los valores de los parámetros.

Para nuestra deducción alternativa, debemos hacer una revisión de un tema normalmente estudiado en el primer curso dedicado a la Física Experimental: valor medio de medidas no similares.

3. REVISIÓN DE UN TÓPICO RELEVANTE: VALOR MEDIO DE MEDIDAS NO SIMILARES

Antes de la deducción alternativa propiamente dicha, hagamos un análisis del tratamiento de medidas no similares de una misma cantidad. Este tipo de tratamiento será utilizado en nuestra deducción y, para ello, supongamos que hayamos hecho n_1 lecturas de una cantidad x que, entonces, puede expresarse así:

$$x_1 = \bar{x}_1 \pm \sigma_{xm1}. \tag{5}$$

[2] www.originlab.com
[3] www.angelfire.com/rnb/labfit

Aqui, $\bar{x}_1$ es el valor medio de x_1 y σ_{xm1} es la desviación estándar de este valor medio. Con un otro conjunto de n_2 lecturas de la cantidad x, obtenidas con el mismo instrumento y en las mismas condiciones, podemos escribir:

$$x_2 = \bar{x}_2 \pm \sigma_{xm2}. \tag{6}$$

A pesar de que x_1 y x_2 son medidas de la misma cantidad x se llaman medidas no similares, por tener precisiones diferentes. Los valores medios de x_1 y de x_2 son determinados a través de la expresión para la media aritmética de las lecturas

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{7}$$

donde n es el número de lecturas efectuadas en cada conjunto de datos. La desviación estándar de cada media se obtiene por las expresiones [2, 3 y 4]

$$\sigma_{xm} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}, \tag{8}$$

donde σ_x es la desviación estándar de las lecturas. Hay que observar que la relación entre σ_{xm} y σ_x dada en la Eq. (8) está demostrada en las referencias [2, 3 y 4] sin partir de la suposición de que las lecturas tengan una función de distribución normal.

Debemos observar que, para extraer un único resultado final de las medidas x_1 y x_2, no podemos simplemente calcular la media aritmética de esas medidas, porque ellas tienen precisiones diferentes. Para evitar el problema, basta comprender que un nuevo valor medio puede ser obtenido por la "unión" de los dos conjuntos de lecturas originales en un único conjunto con $n_1 + n_2$ lecturas, con lo que usamos la Eq (7):

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1 + n_2}\left[\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} + \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}\right], \tag{9}$$

donde x_{1i} y x_{2i} son las i-ésimas lecturas de los conjuntos de datos 1 y 2.

De la Eq. (7) podemos escribir $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$ y, entonces, la Eq. (9) puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1 + n_2}\left[n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2\right], \tag{10}$$

lo que significa que el nuevo valor medio es igual a la media ponderada de x_1 y x_2, teniendo el número de lecturas de cada conjunto de datos como el factor peso. Por otro lado, de la Eq. (8) podemos escribir $n = \sigma_x^2/\sigma_{xm}^2$ que, sustituido en (10), nos da:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 \frac{1}{\sigma_{xm1}^2} + \bar{x}_2 \frac{1}{\sigma_{xm2}^2}}{\frac{1}{\sigma_{xm1}^2} + \frac{1}{\sigma_{xm2}^2}}. \tag{11}$$

En esta última expresión los desvios estándar σ_x de las lecturas de los dos conjuntos fueron considerados iguales, lo que permitió su simplificación. Esa consideración es bastante razonable porque hicimos la suposición de que los dos conjuntos de lecturas fueron obtenidos con el mismo instrumento, y en las mismas condiciones. Una generalización de la Eq. (11) para N medidas no similares nos da:

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \bar{x}_i \frac{1}{\sigma_{xmi}^2}}{\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{N} \sigma_{xmi}^2}}, \tag{12}$$

donde el término $1/\sigma_{xmi}^2$ es denominado peso estadístico de la i-ésima medida. Entonces, dadas N medidas no similares $x_i = \bar{x}_i \pm \sigma_{xmi}$, el valor medio de esas medidas es calculado con la utilización de la Eq. (12).

4. DEDUCCIÓN ALTERNATIVA DEL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

Cuando un conjunto de N puntos del tipo $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$ se obtiene en un laboratorio, el desprecio de las incertidumbres σ_{ymi} significaría una pérdida de la información disponible. Más que eso, lo que haríamos, de hecho, sería provocar una "distorsión" de la información disponible. Lo más correcto sería desarrollar el método de los mínimos cuadrados tomando en consideración las incertidumbres de y. Para ello, recordemos que, si las lecturas y_i tuviesen pesos estadísticos desconocidos y quisiésemos ajustar una función $f(x, a, b)$ a esos puntos, deberíamos minimizar la siguiente expresión para la varianza del ajuste [1, 5 y 6]:

$$\sigma_{y(x)}^2 = \frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}[y_i - f(x_i, a, b)]^2. \tag{13}$$

La expresión (13) puede ser reescrita del siguiente modo:

$$\sigma_{y(x)}^2 = \frac{N}{N-2}\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}[y_i - f(x_i, a, b)]^2}{N}, \tag{14-a}$$

o

$$\sigma_{y(x)}^2 = \frac{N}{N-2}\overline{\epsilon^2}, \tag{14-b}$$

donde

$$\overline{\epsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}[y_i - f(x_i,a,b)]^2}{N}. \tag{14-c}$$

La expresión (14-c) define el error cuadrático medio de los puntos (x_i, y_i) a los que fue ajustada una función del tipo $f(x,a,b)$. Como las diferencias $[y_i - f(x_i,a,b)]$ no poseen pesos estadísticos propios, ya que los y_i no los poseen, la media de los cuadrados de esas diferencias se determina por la Eq. (7), que define una media aritmética. Puesto que consideramos puntos experimentales del tipo $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$, lo que significa que se considera a los x_i excentos de error, pero no así a los y_i. Entonces, vamos a utilizar a Eq. (12), que define una media ponderada, para determinar la media de los cuadrados de los errores para puntos con incertidumbres en y_i:

$$\overline{\epsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}[y_i - f(x_i,a,b)]^2\frac{1}{\sigma_{ymi}^2}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{ymi}^2}}, \tag{15-a}$$

Entonces, la Eq. (14-b), que define la varianza del ajuste, debe ser reescrita con $\overline{\epsilon^2}$ dado por la Eq. (15-a), que toma en consideración el peso estadístico de cada y_i:

$$\sigma_{y(x)}^2 = \frac{N}{N-2}\frac{\sum_{i=1}^{N}[y_i - f(x_i,a,b)]^2\frac{1}{\sigma_{ymi}^2}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{ymi}^2}}, \tag{15-b}$$

o

$$\sigma_{y(x)}^2 = \frac{N}{N-2}\frac{\chi^2}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{ymi}^2}}, \tag{15-c}$$

donde el término

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N}[y_i - f(x_i,a,b)]^2\frac{1}{\sigma_{ymi}^2}, \tag{15-d}$$

es el llamado chi-quadrado de ajuste a la función. Entonces, la condición para que el ajuste tenga la menor varianza posible implica la minimización del chi-quadrado:

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial a} = 0 \quad y \quad \frac{\partial\chi^2}{\partial b} = 0. \tag{16}$$

Naturalmente, la Eq. (15-d) es idéntica a la Eq. (3) y las condiciones de la Eq. (16) son las mismas obtenidas en la deducción usual del método de los mínimos cuadrados, dadas en la Eq. (4). Pero debemos observar que, en esta dedución alternativa, no ha sido necesario considerar que los puntos tengan una distribución normal de errores en torno a la función ajustada. En muchos cursos iniciales de Física Experimental, la distribución normal de errores apenas se menciona y eso dificulta, desde el punto de vista didáctico, la presentación del método de los mínimos cuadrados a través de la deducción usual. En este contexto, la dedución presentada aquí constituye una alternativa viable porque nos dispensa de un conocimiento más profundo de la función de distribución normal.

Es importante percibir que los y_i para los diferentes puntos i se refieren a cantidades distintas, pero las diferencias $[y_i - f(x_i,a,b)]$ fluctuan en torno de cero y, por tanto, pueden ser consideradas como medidas de una misma cantidad. Eso justifica el uso de la Eq. (12) en la determinación de $\overline{\epsilon^2}$, en este caso, en que los puntos tienen pesos estadísticos propios. Aunque una observación poco atenta puede llevarnos a suponer que la deducción propuesta sea excesivamente larga, sin embargo, hay que resaltar que la revisión hecha en la sección 3 es necesaria en cualquier curso básico de Física Experimental y, por tanto, nuestra deducción se restringe, de hecho, apenas a la sección 4.

5. EL MÉTODO APLICADO A UNA RECTA CUALQUIERA

Las condiciones de minimización dadas por las Eq. (16) pueden ser extendidas a una función con una cantidad cualquiera de parámetros. Aplicaremos tales condiciones al ajuste de una función de primer grado, dada por $y(x) = ax + b$. En este caso, el chi-cuadrado viene dado de la siguiente forma:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N}[y_i - ax_i - b]^2\frac{1}{\sigma_{ymi}^2}$$

Así, de la primera condición de mínimo, encontramos:

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2}\right)a + \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2}\right)b = \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i y_i}{\sigma_{ymi}^2}\right) \tag{17-a}$$

Y de la segunda condición de mínimo:

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2}\right)a + \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{ymi}^2}\right)b = \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i}{\sigma_{ymi}^2}\right) \tag{17-b}$$

Las Eqs. (17-a) y (17-b) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que, resuelto, nos dá:

$$a = \frac{1}{D}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i y_i}{\sigma_{ymi}^2}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{ymj}^2} - \sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2}\sum_{j=1}^{N}\frac{y_j}{\sigma_{ymj}^2}\right] \quad (18)$$

y

$$b = \frac{1}{D}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2}\sum_{j=1}^{N}\frac{y_j}{\sigma_{ymj}^2} - \sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2}\sum_{j=1}^{N}\frac{x_j y_j}{\sigma_{ymj}^2}\right], \quad (19)$$

donde

$$D = \sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{ymj}^2} - \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2}\right)^2. \quad (20)$$

Nos cabe ahora, deducir las expresiones para las incertidumbres de los parámetros a y b y también para la covarianza entre esos parámetros. Con ello, podemos escribir la función en la forma $y(x) = y(x)_m \pm \sigma_{y(x)m}$, siendo $y(x)_m$ la función ajustada y $\sigma_{y(x)m}$ la incertidumbre de la función. Eso es lo que haremos a continuación.

5.1. *Determinación de las incertidumbres de los parámetros*

La determinación de las incertidumbres de los parámetros a y b se hace a través de la fórmula de propagación de errores [2, 3, 4]:

$$\sigma_{am} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\sigma_{ymi}\right)^2}. \quad (21)$$

Como el parámetro a está dado por la Eq. (18), es fácil mostrar que la expresión (21) queda como:

$$\sigma_{am} = \sqrt{\frac{1}{D}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{ymi}^2}}, \quad (22)$$

donde D está dada por la Eq. (20). Análogamente, para b obtenemos:

$$\sigma_{bm} = \sqrt{\frac{1}{D}\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2}}. \quad (23)$$

Determinemos, ahora, la covarianza entre los parámetros de ajuste.

5.2. *Determinación de la covarianza entre los parámetros de ajuste*

En los casos en que los parámetros a y b dependen de valores independientes y_i, que a su vez poseen incertidumbres σ_{ymi}, la covarianza entre esos parámetros está definida del siguiente modo [2, 3, 5]:

$$cov(a,b) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial a}{\partial y_i}\frac{\partial b}{\partial y_i}\sigma_{ymi}^2 \quad (24)$$

La Eq. (24) define la covarianza entre a y b presuponiendo que las medidas y_i sean independientes entre sí. Así, conocidos los parámetros a y b a través de las expresiones (18) y (19), y sustituyendo esas expresiones en (24), encontramos:

$$cov(a,b) = -\frac{1}{D}\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2}, \quad (25)$$

donde D fue definida en la Eq. (20). Habiendo determinado σ_{am}, σ_{bm} y $cov(a,b)$ podemos, finalmente, determinar la incertidumbre de la función ajustada. Vale resaltar que los principales resultados obtenidos en esta sección ya fueron presentados en un artículo anterior [7], en un contexto de linealización, pero no fueron deducidos, cosa que ahora hemos hecho aqui.

5.3. *Determinación de la incertidumbre para la función ajustada*

Además de presentar una deducción alternativa para el método de los mínimos cuadrados, el propósito de este artículo es añadir una incertidumbre a la función ajustada, semejante a la que fue propuesta en la referencia [5] para puntos de incertidumbre desconocida, esto es, para puntos del tipo (x_i, y_i). La diferencia es que, en nuestro caso, los puntos experimentales están dados por $(x_i, y_i \pm \sigma_{ymi})$ y, por tanto, los parámetros, las incertidumbres de esos parámetros y la covarianza entre ellos son calculados por fórmulas diferentes, dadas por las Eqs. (18), (19), (22), (23) y (25). Ahora, la expresión para la incertidumbre de la función ajustada puede obtenerse a través de la expresión general para la propagación de errores, aplicada a una función de dos parámetros [3 y 5]:

$$\sigma_{y(x)m} = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial a}\sigma_a\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\sigma_b\right)^2 + 2\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}cov(a,b)}. \quad (26\text{-a})$$

Como $y(x) = ax + b$, de la Eq. (26-a) resulta:

$$\sigma_{y(x)m} = \sqrt{(x\sigma_a)^2 + \sigma_b^2 + 2x\,cov(a,b)}. \quad (26\text{-b})$$

Entonces, con σ_{am}, σ_{bm} y $cov(a,b)$ dados respectivamente por (22), (23) y (25), la incertidumbre de la función queda completamente determinada.

6. EL MÉTODO APLICADO A UNA RECTA QUE PASA POR EL ORIGEN

Para una recta que pasa por el origen, dada por $y(x) = ax$, la aplicación de la condición de minimización

TABLA 1

Puntos $(\theta_i; M_i \pm \sigma_{Mmi})$.

	1	2	3	4	5	6
$\theta(rad)$	0,227	0,349	0,473	0,642	0,768	0,873
$M(N.m)$	0,00233	0,00372	0,00522	0,00676	0,00817	0,00946
$\sigma_{Mm}(N.m)$	0,00011	0,00015	0,00020	0,00025	0,00030	0,00035

del chi-cuadrado junto con el estudio de propagación de errores para el parámetro obtenido da:

$$y(x) = (a \pm \sigma_{am})x, \tag{27}$$

con

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i y_i}{\sigma_{ymi}^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2}} \quad \text{y} \quad \sigma_{am} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2}}}. \tag{28}$$

7. UNA APLICACIÓN NUMÉRICA A PUNTOS QUE SE AJUSTAN A UNA RECTA

Vamos a aplicar los resultados obtenidos a un conjunto de puntos que se ajustan a una recta, siendo los datos del tipo $(x_i, y_i \pm \sigma_{ymi})$. Después, vamos a discutir cómo nuestros resultados podrían ser utilizados para puntos del tipo $(x_i; y_i)$.

7.1. *Recta definida por dos parámetros*

Para puntos de incertidumbres conocidas, podemos hacer el ajuste a una recta con dos parámetros a través de la aplicación directa de las Eqs. (18) y (19) en la determinación de los parámetros. Las incertidumbres de los parámetros a y b son obtenidas a través de las Eqs. (22) y (23) y la covarianza entre estos parámetros está determinada por la Eq. (25). Con eso, podemos determinar la incertidumbre de la función ajustada a través de la Eq. (26-b).

Hagamos una aplicación numérica al conjunto de datos $(x_i, y_i \pm \sigma_{ymi})$ mostrados en la tabla 1, referidos a un péndulo de torsión. Estos datos fueron extraídos de la referencia [8] y se busca establecer un modelo que relacione el torque M aplicado en los extremos de un hilo metálico y el ángulo θ de torsión. El montaje experimental se propone en la referencia [9], con la utilización del "Kit para Experiencias de Mecánica" (K.E.M.) [10]. Pasemos a los datos extraídos de la referencia [9] (tabla 1).

Aplicando la solución propuesta para una función de primer grado con dos parámetros, finalmente obtenemos:

$$M(\theta) = (0,010913\theta - 0,00011) \pm \\ 10^{-4}\sqrt{14,3988\theta^2 - 11,0708\theta + 2,66169}, \tag{29}$$

donde, en la función $M(\theta) = a\theta + b$, tenemos $\sigma_{am} = 0,00038 N.m/rad$, $\sigma_{bm} = 0,00016 N.m$ y $cov(a,b) = -5,53534 \times 10^{-8} N^2.m^2/rad$.

La expresión (29) nos permite trazar el gráfico de la función ajustada a través de tres líneas: la línea central que representa los valores medios de la funcióm $y(x)_m$, y dos líneas más de incertidumbres, representando los límites inferior y superior de la faja de confianza de la función. Admitiendo que los puntos fluctúen según la distribución normal en torno de la función ajustada, podemos multiplicar $\sigma_{y(x)m}$ por un factor que dé la faja de confianza de la función con una probabilidad de $95,4\%$: para los cuatro grados de libertad del ajuste tenemos $f = 2.87$ (ver, por ejemplo, el "LAB Fit Curve Fitting Software"). Así, la función ajustada pasa a estar dada por la siguiente expresión:

$$M(\theta) = (0,010913\theta - 0,00011) \pm \\ 2,87 \times 10^{-4}\sqrt{14,3988\theta^2 - 11,0708\theta + 2,66169}, \tag{30}$$

con $95,4\%$ de confianza. Con la Eq. (30) podemos trazar el gráfico mostrado en la figura 1, relativo al ajuste, extrapolado hasta $\theta = 0 rad$. En este gráfico, la línea central representa la función ajustada y las líneas superior e inferior definen la faja de incertidumbre de la función. Una inspección de la figura 1 sugiere que la recta podría pasar por el origen, y eso merece ser investigado.

7.2. *Recta que pasa por el origen*

En el ajuste realizado en el inciso anterior, nos quedó la sospecha de que la recta podría pasar por el origen. Para determinar la probabilidad de que el coeficiente lineal (parámetro b) sea cero, se utilizó el test t de Student [11] con el siguiente resultado: $t = -0,703737$; lo que implica una probabilidad $P(t) = 0,520$ de que el parámetro b sea cero. Así, el modelo "recta con dos parámetros" debe ser abandonado y el ajuste debe ser rehecho utilizando las Eqs. (27) y (28), lo que da el siguiente resultado:

$$M = (0,01067 \pm 0,00017)\theta \tag{31}$$

La Eq. (31) genera el gráfico mostrado en la figura 2.

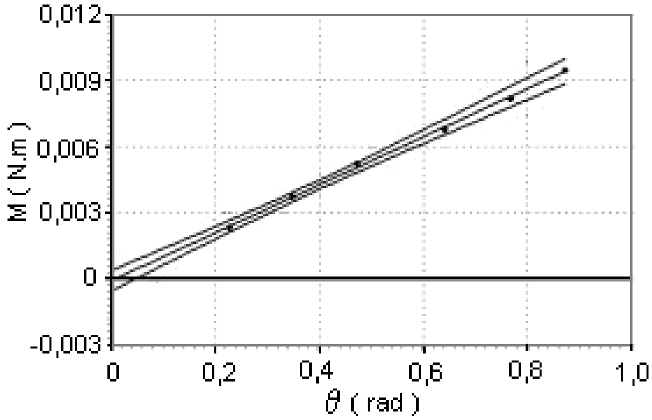

Figura 1. Momento M aplicado en los extremos del hilo versus el ángulo θ de torsión. La línea central es la función ajustada: $M = a\theta + b$, y las líneas externas definen una faja con $95,4\%$ de confianza.

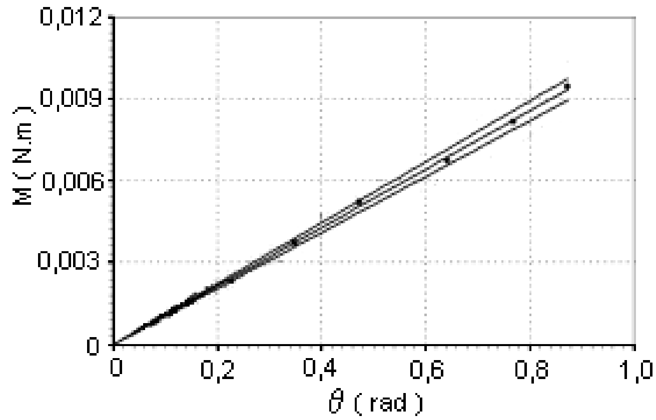

Figura 2. Momento M aplicado en los extremos del hilo versus el ángulo θ de torsión. La línea central es la función ajustada, $M = a\theta$, y las líneas externas definen una faja con $95,4\%$ de confianza.

7.3. *AJUSTE DE UNA FUNCIÓN A PUNTOS CON PESOS ESTADÍSTICOS DESCONOCIDOS*

Para puntos de incertidumbres desconocidas, podemos hacer un pre-ajuste considerando los $\sigma_{ymi} = 1$, lo que permite determinar la varianza del ajuste $\sigma^2_{y(x)}$ y consecuentemente $\sigma_y(x)$, que da una medida de la incertidumbre de los puntos experimentales. Así, considerando cada σ_{ymi} igual a $\sigma_{y(x)}$, podemos volver a aplicar las Eqs. (18), (19), (22), (23), (25) y (26-b), y determinar la función ajustada de forma completa, lo que es equivalente a lo que se hizo en la referencia [5]. Hay que se observar que el procedimiento descrito aquí impone, de hecho, que el chi-cuadrado reducido del ajuste sea igual a 1, lo que lo hace lo más verosímil posible (ver, por ejemplo, [3]).

8. CONCLUSIONES

Queda en evidencia que un conjunto de puntos no necesariamente tiene que tener flutuaciones estadísticas que obedezcan a una distribución normal en torno de la curva ajustada para que podamos deducir las expresiones para los parámetros de la función ajustada. Así, es posible demostrar el método de los mínimos cuadrados también para alumnos que no tengan un conocimiento profundizado en Estadística, lo que es una ventaja desde el punto de vista didáctico y un recurso disponible más. Además de ello, por no restringir los resultados a un cierto tipo de datos, la deducción alternativa es más general que la dedución usual. Por otro lado, la inclusión de una desviación estándar para la función ajustada enriquece considerablemente el nivel de información acerca del ajuste, tornando los resultados obtenidos más confiables. También para funciones con puntos de incertidumbres desconocidas, la técnica del pre-ajuste con $\sigma_{ymi} = 1$, generadora de esas incertidumbres, se revela satisfactoria y es equivalente a lo que fue propuesto en la referencia [5].

En cuanto a los resultados experimentales para el péndulo de torsión queda claro, a través del test t de Student, que la función $M = a\theta + b$ debe ser descartada en favor del modelo $M = a\theta$. En ese modelo, como sabemos, el parámetro a es la constante de torsión del hilo.

Un otro aspecto que se percibe de forma clara en el análisis de la figura 1 es el cuidado que debemos tener al hacer extrapolaciones de rectas ajustadas. En la medida en que nos separamos de la región de los datos, la incertidumbre del valor medio de la función ajustada va aumentando, esto es, la precisión de los resultados va disminuyendo, como evidencian las líneas que definen la faja de incertidumbre de la función.

REFERENCIAS

[1] Silva, Wilton P. e outros - *Tratamento de Dados Experimentais* - UFPB/Editora Universitária , João Pessoa, 1ª Ed. (1995), pag. 109.

[2] Vuolo, José H. - *Fundamentos da Teoria de Erros* - Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1ª Ed., (1992), pag. 140, 89, 215.

[3] Silva, Wilton P. e Silva, Cleide M. D. P. S. - *Tratamento de Dados Experimentais* - UFPB/Editora Universitária, João Pessoa, 2ª Ed. (Revisada e Ampliada), (1998), pag. 64, 162, 111, 175, 185

[4] Helene, Otaviano A. M. e Vanin, Vitor R. - *Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental* - Ed. Edgard Blücher LTDA, São Paulo, (1981), pag. 42, 66.

[5] Silva, Wilton P. et al. - *Geração de Incertidumbres de Funções Redutíveis ao Primeiro Grau Ajustadas pelo Método dos Mínimos Quadrados* - Rev. Bras. Ensino de Física, Vol. 21, No 3, setembro, 1999

[6] Press, William H. et al. - *Numerical Recipes in Pascal: The Art of Scientific Computing* - Cambridge University Press (1989), pag. 551

[7] Silva, Wilton P. et al. - *Consideración del Peso Estadístico en la Generación de Incertidumbres de Funciones Reducibles a Primer Grado Ajustadas por el Método de Mínimos Cuadrados* - Rev. Bol. Fís., Vol. 9, novembro, 2003

[8] Silva, Wilton P. e Fagundes, Mona L. M. - *Relatório*

Final do Projeto "Aperfeiçamento de Kits Experimentais no Ensino de Física" - CNPQ/REENGE/PICT - CCT/UFPB, Campina Grande, (1997)

[9] Silva, Wilton P. e Silva Cleide M. D. P. S. - *Mecânica Experimental para Físicos e Engenheiros* - UFPB/ Editora Universitária, João Pessoa, (2000), pag. 206

[10] KEM - *Kit para Experiências de Mecânica*, info online, http://www.extensao.hpg.com.br/kits/kits.html

[11] Bussab, Wilton O. e Morettin, Pedro A - *Estatística Básica* - Atual Editora LTDA, São Paulo, (1995), pag. 264