

## PÉNDULO IMPULSADO

Juliana Timotheo da Costa Pardal<sup>1</sup>

Klauko Pinheiro Mota<sup>2</sup>

Paulo Murilo Castro de Oliveira<sup>3</sup>

*Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense  
Campus da Praia Vermelha, Av. Litorânea s/n, Boa Viagem  
Niterói, RJ, 24210-340, Brazil*

### RESUMEN

Los modos normales de oscilación de un péndulo simple (rígido) forman una banda **continua** de frecuencias, ya que el periodo depende de la amplitud de oscilación. El periodo mínimo  $T_0$  corresponde a pequeñas oscilaciones y cualquier periodo  $T > T_0$  puede ser fijado escogiendo una amplitud apropiada  $\theta_0(T)$ . En el presente trabajo, estudiamos el comportamiento de resonancia de este sistema cuando se encuentra forzado por repetidos impulsos externos dados por golpes con periodo  $T > T_0$ . También incluimos un termino disipativo y las ecuaciones de movimiento son resueltas numericamente. Para golpes de poca intensidad, el sistema entra en resonancia y oscila de acuerdo al periodo externo. Cuando incrementamos la intensidad de los golpes, observamos la aparición de una cascada de duplicación de periodos que sigue la ruta del caos de Feigenbaum.

### 1. INTRODUCCIÓN

Algunos sistemas simples presentan comportamientos sorprendentes. El presente trabajo muestra una situación de este tipo, concerniente a un péndulo simple. Consideramos una barra rígida, sin masa, de tamaño  $\ell$ , con una masa puntual en un extremo y el otro sujeto a un eje horizontal sin fricción, que permite que la barra oscile en un plano vertical por efecto de la fuerza de gravedad terrestre. Para poder obtener la posición  $\theta(t)$  como función del tiempo  $t$ , que representa el ángulo relativo a la posición vertical de equilibrio, necesitamos resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta, \quad (1)$$

para una condición inicial dada; por ejemplo, podemos escoger una posición inicial  $\theta_0$  (amplitud) sin velocidad inicial. En el límite de pequeñas amplitudes, para las cuales  $\sin(\theta)$  puede ser remplazado por el mismo ángulo  $\theta$ , este es un ejercicio trivial, que generalmente se resuelve en los cursos básicos de física. En este caso, el movimiento corresponde a oscilaciones armonicas simples con un periodo dado por (para pequeñas amplitudes):

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad |\theta_0| \ll 1. \quad (2)$$

Mas allá de este límite, la solución analítica de la ecuación (1) no es simple. De hecho, la Figura (1a) muestra algunos gráficos experimentales para diferentes amplitudes. Cuanto más grande es la amplitud, los gráficos

difieren más de una curva sinusoidal: el péndulo ya no es un oscilador armonico simple.

### 2. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Teóricamente, una alternativa es resolver la ecuación (1) de forma numérica, por ejemplo, reemplazando la segunda derivada por:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \simeq \frac{\theta_{t+1} - 2\theta_t + \theta_{t-1}}{\Delta t^2}, \quad (3)$$

donde el tiempo  $t = 1, 2, 3, \dots$  es ahora una variable discreta, que corresponde a instantes separados por incrementos iguales de tiempo  $\Delta t$ . Podemos obtener cualquier precisión numérica predefinida, escogiendo apropiadamente un valor suficientemente pequeño de  $\Delta t$  para estos intervalos. En este sentido, la solución numérica

$$\theta_{t+1} = 2\theta_t - \theta_{t-1} - K \sin \theta_t, \quad (4)$$

donde  $K = g\Delta t^2/\ell$  es exacta. Comenzamos con una amplitud dada  $\theta_0$  en  $t = 0$  y fijamos  $\theta_1 = \theta_0 - (K/2) \sin \theta_0$ , que corresponde a una velocidad inicial nula. Para  $t = 1$ , la ecuación (4) nos proporciona  $\theta_2$ . Para  $t = 2$ , la misma ecuación (4) nos proporciona  $\theta_3$ , y así sucesivamente. La Figura (1b) muestra algunos gráficos obtenidos usando esta solución numérica para diferentes amplitudes, que pueden ser comparados con los gráficos experimentales de la Figura (1a). En realidad, nuestro péndulo experimental es una barra rígida sin una masa extra en el extremo oscilante. En este caso,  $\ell = 23.2\text{cm}$  corresponde a su tamaño efectivo  $\ell = G^2/d$ , donde  $G$  es el radio de giro y  $d$  es la distancia entre el eje de rotación y el centro de masa. Nosotros adoptamos el mismo valor  $\ell = 23.3\text{cm}$ ,

<sup>1</sup>Email: juliana@if.uff.br

<sup>2</sup>Email: klauko@if.uff.br

<sup>3</sup>Email: pmco@if.uff.br

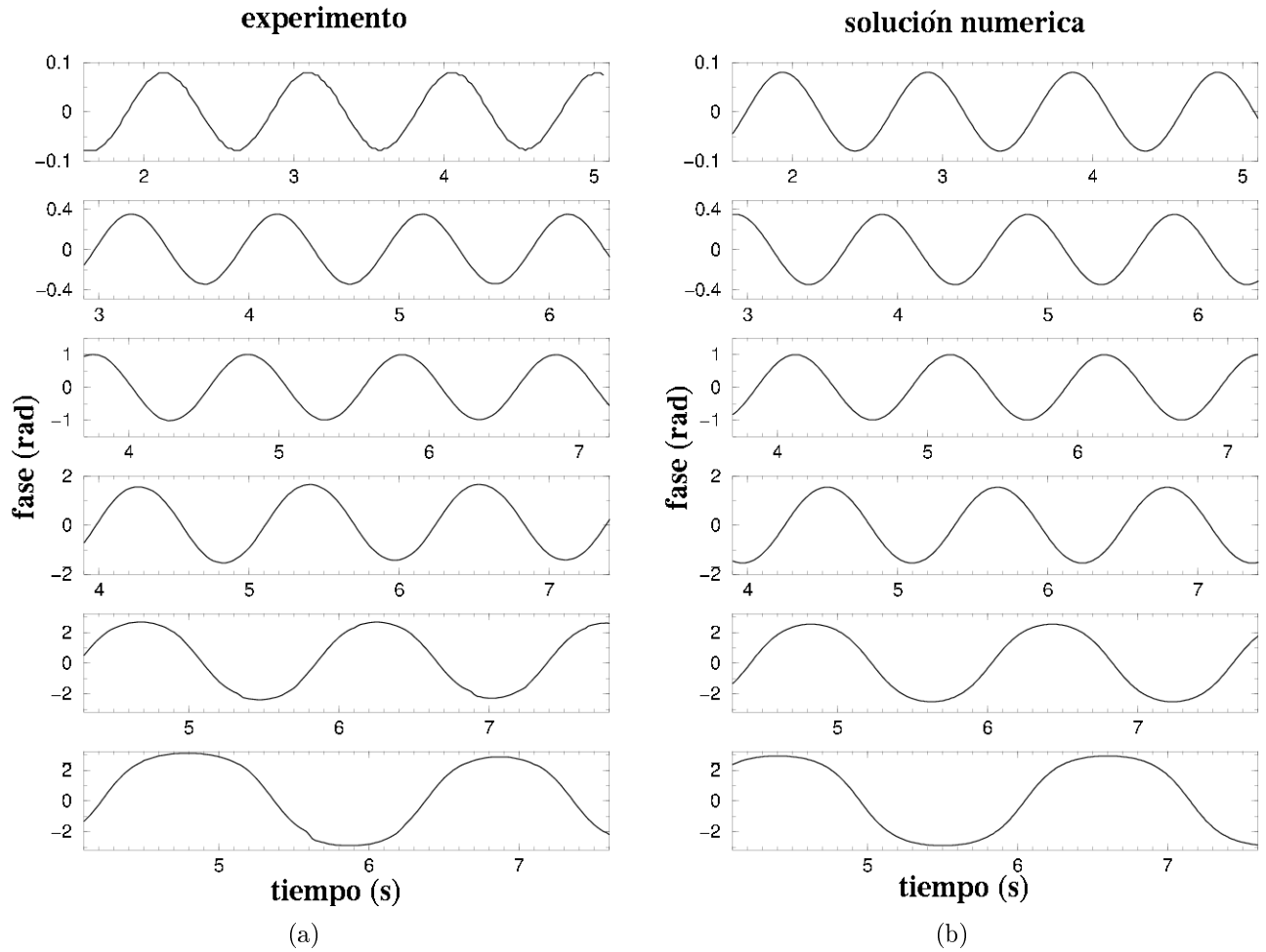


Figura 1. Posición  $\theta(t)$  de un péndulo simple como función del tiempo para diferentes amplitudes (note las diferentes escalas verticales): experimentos (a) y soluciones numéricas (b).

con  $g = 9.81m/s^2$  y  $\Delta t = 0.01$  para nuestra solución numérica mostrada en la Figura (1b).

Nótese que en la Figura (1a), cuanto más grande es la amplitud, más grande es el periodo. Usando las soluciones numéricas, podemos medir el periodo de cada amplitud. La Figura (2) muestra el resultado  $T(\theta_0)$  de estas medidas. Este gráfico es universal, es decir, que se mantiene idéntico para cualquier valor de  $\ell$ , con  $T/T_0$  a lo largo del eje vertical. La elección de cada valor de  $\ell$  significa que **cualquier** periodo  $T$  mayor que  $T_0$  puede ser alcanzado, escogiendo la amplitud apropiada  $\theta_0(T)$ . Debido a su banda **continua** de frecuencias, este sistema simple es una herramienta muy conveniente para experimentos de resonancia y sincronización.

### 3. PÉNDULO IMPULSADO

Ahora vamos a tratar el péndulo simple desde otro punto de vista, simplemente invirtiendo nuestro razonamiento. En lugar de fijar la amplitud para obtener una frecuencia dada, podemos **forzar** al péndulo a oscilar de acuerdo a un cierto periodo  $T$  (mayor que  $T_0$ ). Decidimos fijar  $T$  golpeando el péndulo con una in-

tensidad proporcional a  $\Delta\theta$ , que hace el papel de un parámetro de control. Una secuencia de golpes impulsantes son repetidos en intervalos  $T$ . Inmediatamente después de cada golpe, al valor actual de  $\theta_t$  es instantáneamente cambiado a  $\theta_t + \Delta\theta$ . También incluimos un término disipativo de baja intensidad, que permite al sistema liberar la energía excedente proporcionada por los golpes periódicos. Hemos escogido una fricción viscosa proporcional a la velocidad actual. Incluyendo estos dos nuevos ingredientes, golpes y fricción, la solución numérica está dada por:

$$\theta_{t+1} = \theta_t + \lambda(\theta_t - \theta_{t-1} - K \sin \theta_t) \quad (5)$$

y

$$\theta_{t+1} = \theta_t + \Delta\theta \quad (6)$$

siempre que  $t \bmod (T/\Delta t) = 0$ . Se escoge  $T$  como un entero múltiplo de  $\Delta t$ , que es el menor paso de tiempo adoptado para transformar el tiempo  $t$  en una variable discreta. Además,  $\lambda < 1$  es una constante (digamos,  $\lambda = 0.99$ ) que toma en cuenta la fricción viscosa. La condición inicial es nuevamente irrelevante. Iteramos

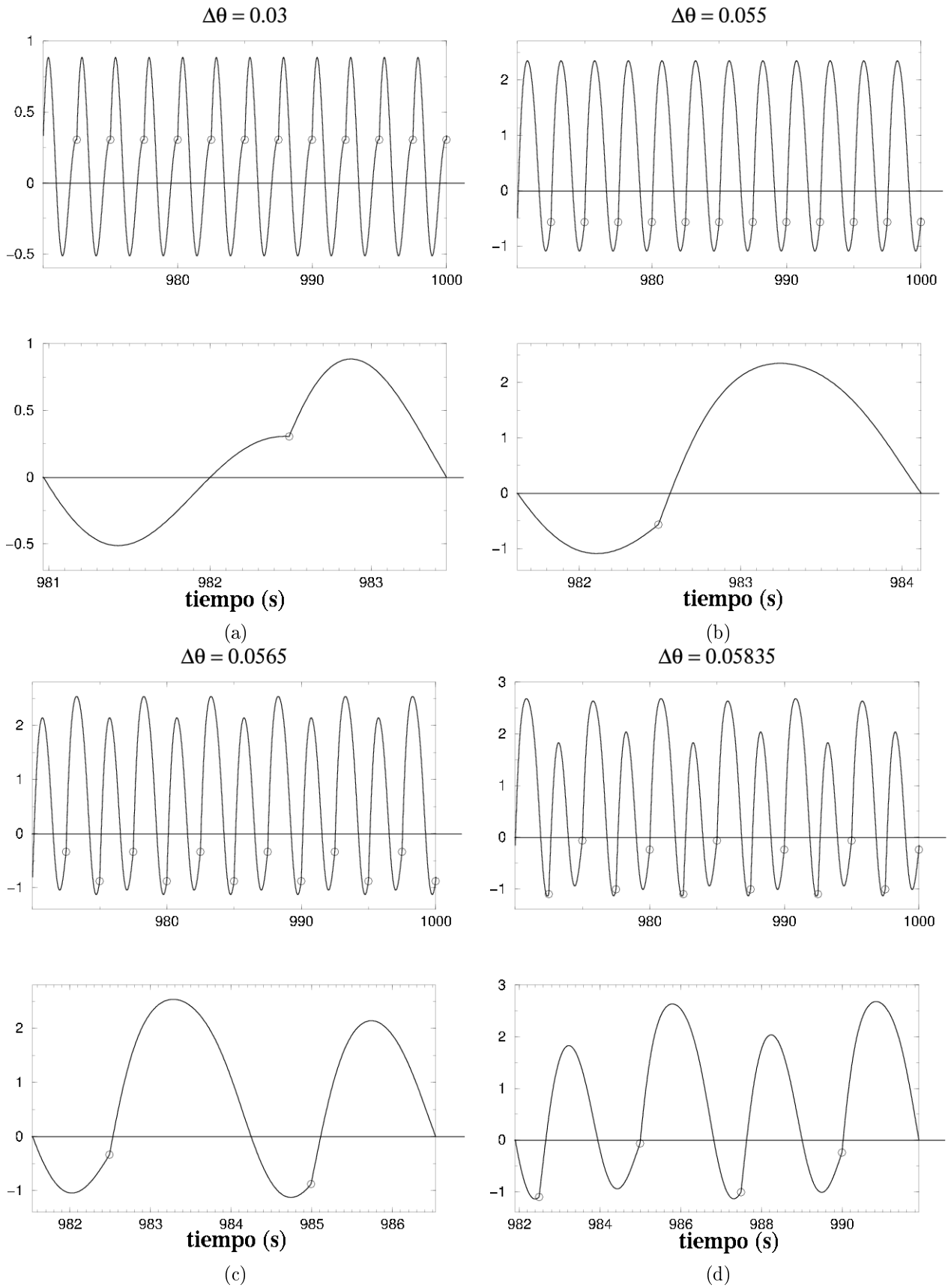


Figura 3. Posición  $\theta(t)$  del péndulo impulsado, para diferentes valores de la intensidad del golpe  $\Delta\theta$ . El periodo impuesto externamente es  $T = 2.5s \cong 1.25T_0$ . En cada caso, el detalle inferior muestra sólo un periodo completo.

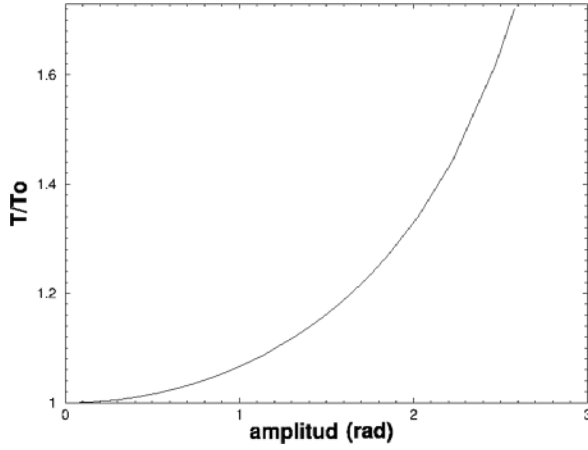


Figura 2. Periodo  $T$  del péndulo simple como función de la amplitud  $\theta_0$ , obtenido de nuestras soluciones numéricas. Aquí,  $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$  es el límite inferior válido sólo para pequeñas amplitudes. El periodo se incrementa al incrementar las amplitudes. Finalmente, éste diverge logarímicamente [6] cuando la amplitud se aproxima al límite opuesto  $\theta_0 = \pi$ .

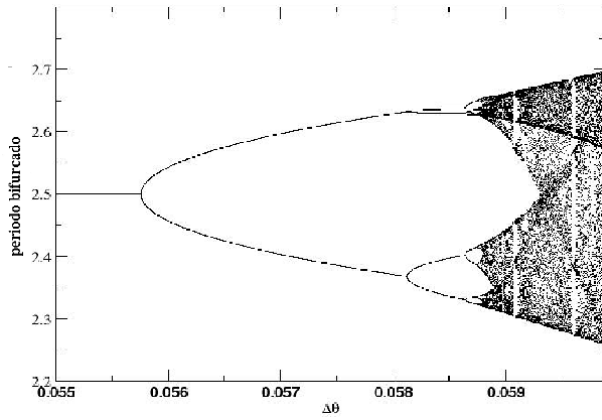


Figura 4. Diagrama de bifurcación para la cascada de duplicación de periodo, obtenida a partir de nuestros resultados numéricos. En este caso, el parámetro de control  $\Delta\theta$  es menor que  $\Delta\theta^{(crisis)}$ .

las ecuaciones (5) y (6) para un determinado conjunto de parámetros  $g, \ell, T, \Delta t$  y  $\lambda$ , cuyo valor se mantuvo constante. Estos valores son irrelevantes, pues: i)  $g$  y  $\ell$  simplemente determinan el periodo mínimo  $T_0$ , cualquier cambio en sus valores corresponde a un simple cambio de escala **global** del tiempo (hemos escogido  $\ell = 1.0m$  y  $g = 9.81m/s^2$ , lo que corresponde a  $T_0 \cong 2.006s$ ); ii) mantenemos el mismo razonamiento para  $T$ , el cual es medido en terminos de  $T_0$  (hemos escogido  $T = 2.5s \cong 1.25T_0$ ); iii) el único papel de  $\Delta t$  es la precisión numérica, sólo necesita ser lo suficientemente pequeño (hemos escogido  $\Delta t = 0.01$  que corresponde a una precisión de una parte en  $10^4$ , por lo menos) y finalmente, iv)  $\lambda$  controla cuán rápido se disipa la energía provista por cada golpe, cualquier cambio en ese valor puede ser compensado por el correspondiente cambio en la intensidad de los golpes. Así, una vez que la razón

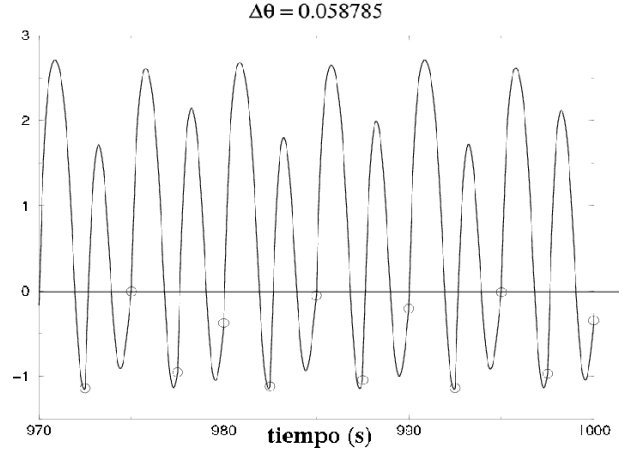


Figura 5. Posición  $\Delta\theta(t)$  del péndulo impulsado como función del tiempo al comienzo del caos. Aquí, el parámetro de control es  $\Delta\theta = 0.058785$ .

$T/T_0$  es fijada, la intensidad del golpe  $\Delta\theta$  es nuestro único parámetro de control, que se debe cambiar de una simulación a otra.

Un caso límite simplificado de nuestro sistema se puede obtener tomando  $g = 0$ , recuperando el llamado rotor impulsado. Aunque éste carece de cualquier tipo de modo normal de oscilación, debido a la ausencia de intercambio entre energía potencial y cinética, es un sistema dinámico rico que presenta un comportamiento caótico, aparte de otras características interesantes (ver, por ejemplo, [1]). Otro sistema similar es estudiado en [2], donde el péndulo se impulsa de manera continua por una fuerza sinusoidal. En lugar de eso, nuestro impulso mediante golpes proporciona un carácter discreto, que conduce naturalmente a un mapa de Poincaré, permitiendo el estudio de fenómenos de sincronización. Nuestro péndulo impulsado por golpes (con  $g \neq 0$ ) incluye algunos otros ingredientes, particularmente, la ya citada posibilidad de un comportamiento resonante dentro de una banda continua de frecuencias de modos normales de oscilación. El propósito del presente trabajo es el de investigar las consecuencias de estos nuevos ingredientes.

La Figura (3) muestra el movimiento asintótico (después de que el régimen transitorio dependiente de la condición inicial ha terminado) para diferentes valores de la intensidad de los golpes  $\Delta\theta$ . Para un amplio rango de valores de  $\Delta\theta$ , menores que  $\Delta\theta \cong 0.05$ , tenemos siempre el mismo tipo de movimiento mostrado en la Figura (3a). Los golpes periódicos están sincronizados y ocurren siempre en la misma fase cerca del que debería ser el punto de retorno (velocidad cero). Mas allá de  $\Delta\theta \cong 0.05$ , los golpes periódicos comienzan a sincronizarse a fases bajas antes del punto de retorno (Figura (3b)).

Incrementando aún  $\Delta\theta$ , encontramos una transición, o, lo que es en realidad, una “cascada” de dicha transición. Primero, justo después de  $\Delta\theta^{(1)} = 0.05577525$ , dos oscilaciones completas sucesivas ya no son idénticas (Figura (3c)): las repeticiones ocurren sólo después de

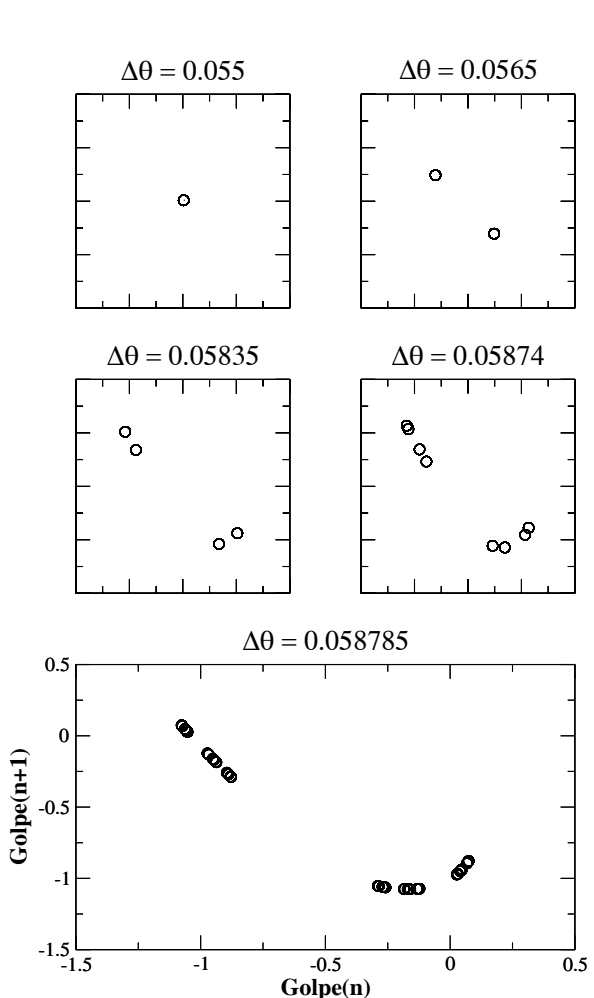


Figura 6. Primer mapa de retorno para las fases donde golpes sucesivos sincronizan. Los ejes son los mismos para todos los gráficos, mostrado en la parte inferior que corresponde al comienzo del caos.

dos oscilaciones sucesivas y el periodo real es duplicado. Este periodo consiste de dos intervalos de tiempo sucesivos pero diferentes, uno más pequeño que el otro, a los que llamaremos “periodos **bifurcados**” por simplicidad.

Una segunda bifurcación sucede mas allá de  $\Delta\theta^{(2)} = 0.05813020$  (Figura (3d)): ahora el periodo verdadero corresponde a cuatro intervalos sucesivos de tiempo diferentes. Podemos determinar también una tercera y cuarta bifurcaciones que suceden más allá de  $\Delta\theta^{(3)} = 0.05864550$  y  $\Delta\theta^{(4)} = 0.05875531$ , respectivamente. La Figura (4) muestra (parte de) el diagrama de bifurcación obtenido de nuestros resultados numéricos. Estas bifurcaciones sucesivas del periodo parecen seguir la clase de universalidad descubierta por M. Feigenbaum [3]. Para una descripción simple e interesante de este descubrimiento y su correspondiente teoría de grupo de renormalización, ver, por ejemplo, la ref. [4]. De hecho, podemos estimar la constante de Feigenbaum:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta\theta^{(n)} - \Delta\theta^{(n-1)}}{\Delta\theta^{(n+1)} - \Delta\theta^{(n)}} = 4.669\dots, \quad (7)$$

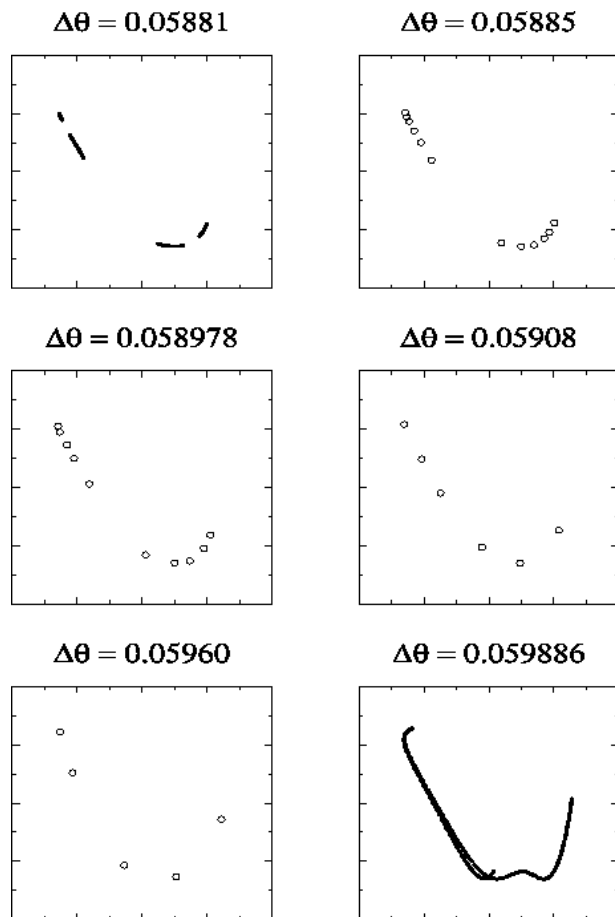


Figura 7. Lo mismo que en la figura anterior, ahora para golpes con intensidad mas allá del comienzo del caos.

usando nuestros valores medidos  $\Delta\theta^{(1)}, \Delta\theta^{(2)}, \Delta\theta^{(3)}$  y  $\Delta\theta^{(4)}$  donde ocurren las cuatro primeras bifurcaciones. Como una primera estimación, obtenemos  $\delta \cong 4.5373$  de los primeros tres valores. La segunda estimación mejorada es  $\delta \cong 4.669$ , obtenida usando los tres últimos valores, y se encuentra en perfecta concordancia con el valor teórico [3] mostrado en la parte derecha de la ecuación (7) (cf. pag. 1 en [4]). Extrapolando a partir de estos resultados, esperamos un comportamiento caótico mas allá de  $\Delta\theta^{(\infty)} = 0.058785$ . La Figura (5) muestra el movimiento asintótico obtenido con esta intensidad particular de golpe; ésto corresponde al principio del caos.

Los anteriores resultados se obtuvieron mediante la medida de los “periodos de bifurcación”, esto es, el tiempo que demora una oscilación completa. Una alternativa es construir un mapa de Poincaré, observando las fases donde golpes sucesivos pasan a ser sincronizados, es decir, la secuencia de ángulos  $\theta_{nt} = \theta_{t=nT}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) [5]. Estos puntos están marcados con círculos en las figuras (3) y (5). De hecho, esta aproximación proporciona una mayor precisión numérica que en el análisis anterior, que fue elaborado sobre la base de los “periodos bifurcados”.

Para golpes de baja intensidad ( $\Delta\theta < \Delta\theta^{(1)}$ ) esta secuencia converge a un simple punto fijo. El atractor se convierte en un ciclo de periodo 2 mas allá de  $\Delta\theta^{(1)}$ , un

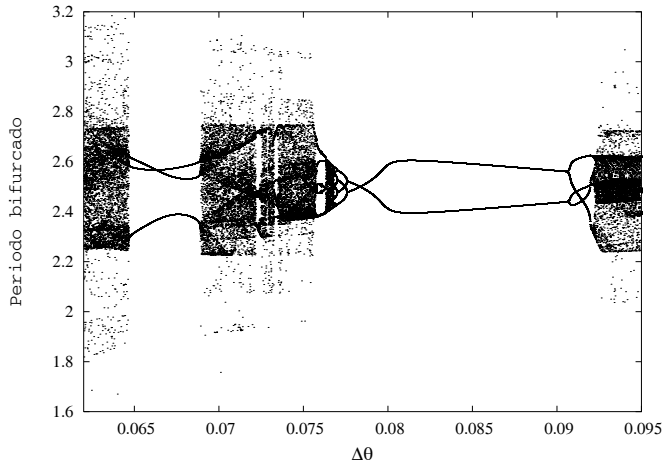


Figura 8. Diagrama de bifurcación (una parte) mostrando claramente la presencia de dos grandes ventanas; en una de ellas (en el extremo izquierdo) tenemos el ciclo 3.

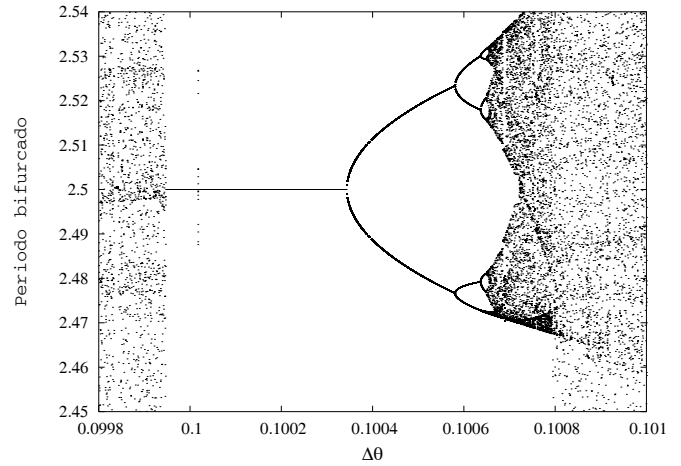


Figura 10. Una repetición del escenario caótico y secuencia de bifurcaciones visto anteriormente en la Figura (4).

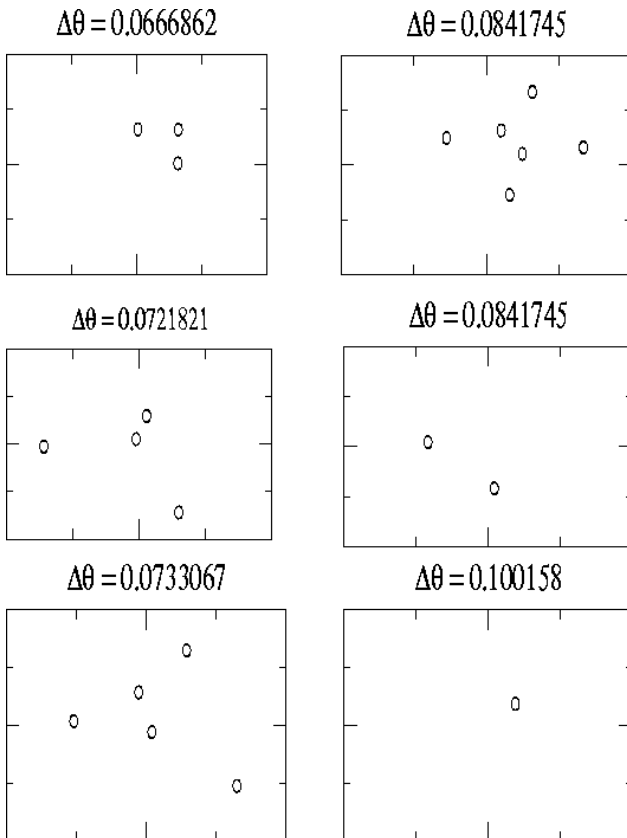


Figura 9. Primer mapa de retorno exhibiendo comportamiento periódico en medio del caos, para algunos valores de  $\Delta\theta$ .

ciclo de periodo 4 mas allá de  $\Delta\theta^{(2)}$  y así sucesivamente. Para  $\Delta\theta = \Delta\theta^{(\infty)}$  la secuencia ya no es periódica. La cascada de bifurcación puede ser visualizada mejor, observando los mapas de retorno  $\theta_{(n+1)T} \times \theta_{nT}$  (Figura (6)). Al comienzo del caos (grafico inferior) los puntos sucesivos forman una curva fractal donde se pierde la

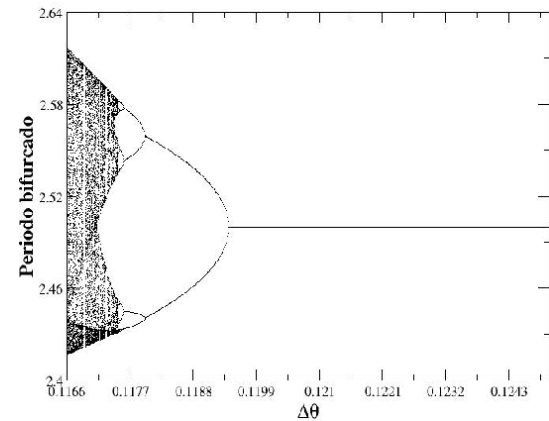


Figura 11. Diagrama de bifurcación para la cascada de duplicación de periodo obtenida de nuestros resultados numéricos. En este caso, el parámetro de control  $\Delta\theta$  es mayor que  $\Delta\theta^{(crisis)}$ .

sincronización por primera vez.

Finalmente, mas allá de  $\Delta\theta^{(\infty)}$  puede observarse un comportamiento caótico sin nada de sincronización. El primer mapa de retorno está formado ahora por (piezas de) una curva continua (Figura (7), parte superior izquierda). Incrementando más la intensidad de los golpes, la sincronización es reestablecida dentro de algunas ventanas estrechas, correspondientes a periodos que ya no están determinados por potencias de 2 como antes. Dentro de estas ventanas, los periodos son múltiplos de  $T$  impuestos por los golpes; los factores correspondientes son números impares y sus múltiplos (3, 5, 6, ...). Este comportamiento también se observa en muchos otros sistemas dinámicos, por ejemplo, el mapa logístico estudiado originalmente por Feigenbaum. La Figura (7) muestra algunos ejemplos con periodos  $5T, 10T, 6T$  y  $12T$ . Dentro de las ventanas periódicas se puede observar de nuevo un comportamiento caótico (no

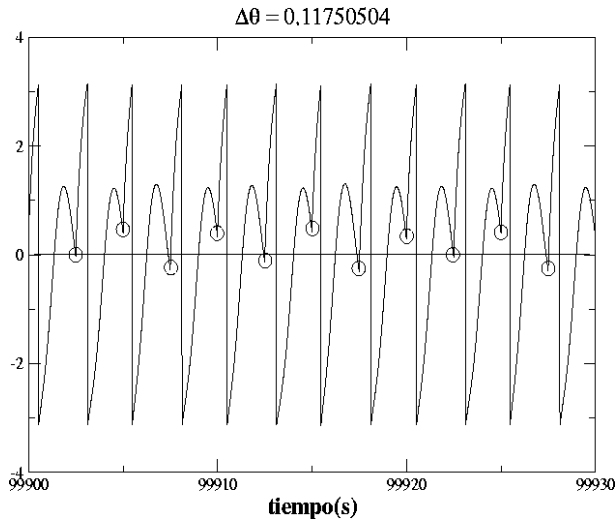


Figura 12. Posición  $\Delta\theta(t)$  del péndulo impulsado como función del tiempo al comienzo del caos. El parámetro de control es  $\Delta\theta = 0.11750504$ .

mostrado). Estas ventanas periódicas también muestran cascadas de bifurcación, por ejemplo, en  $3T, 6T, 12T, \dots$  y —como otro ejemplo— en  $5T, 10T, 20T, \dots$ . Dichas cas-

cadras aparecen en el sentido inverso (primero periodos grandes), para acumularse asimismo en el principio del caos. Este comportamiento (caos con ventanas de periodos impares) termina en  $\Delta\theta^{(crisis)} = 0.05989$ , a partir del cual el movimiento ya no es oscilatorio: el péndulo realiza giros enteros, sobrepasando su posición vertical superior. La Figura (7) (inferior derecha) muestra el comportamiento caótico justo antes de este límite. La ventana de periodo 3 no aparece para el periodo externo particular  $1.25T_0$  que adoptamos en este trabajo, pues considerando golpes de intensidad para los cuales los periodos  $6T$  y  $12T$  fueron encontrados (Figura (7)), estimamos que dicha ventana caería más allá de  $\Delta\theta^{(crisis)}$ .

Para  $\Delta\theta > \Delta\theta^{(crisis)}$ , el péndulo también presenta un comportamiento interesante. En particular, verificamos en medio del caos ventanas anchas donde el comportamiento del péndulo es periódico. De hecho, observamos la presencia de dos grandes ventanas, una representando un ciclo 3, que como ya imaginábamos, caería para valores de  $\Delta\theta$  mas allá de  $\Delta\theta^{(crisis)}$ , y otra ventana ancha representando un ciclo 2. La Figura (8) nos muestra claramente este comportamiento, ligeramente diferente del conocido mapa logístico, donde no observamos esas grandes ventanas. Evidentemente, existen (Figura (9)) pequeñas ventanas donde tenemos nuevamente comportamiento periódico.

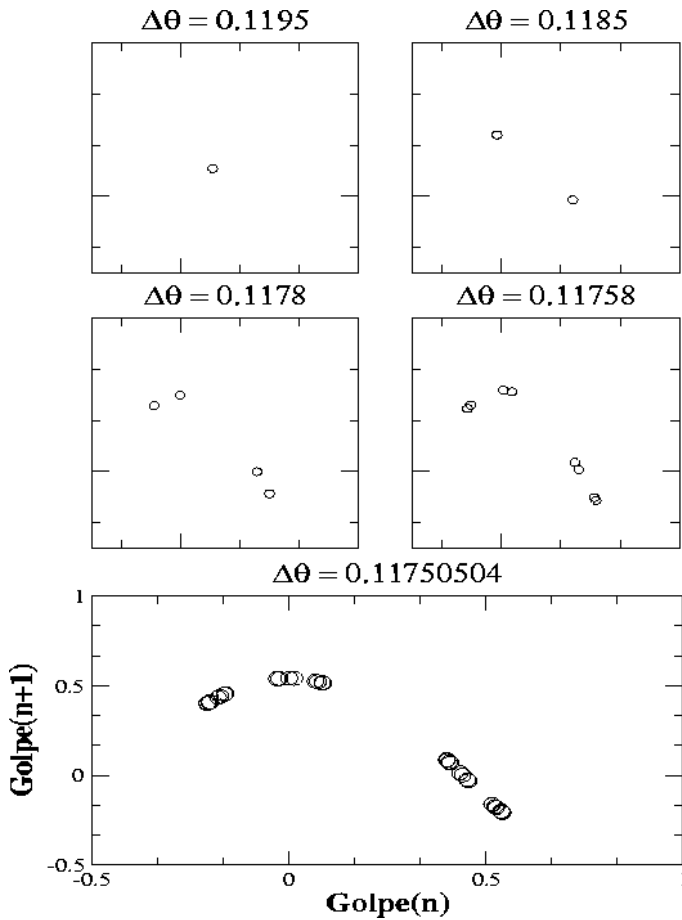


Figura 13. Primeros mapas de retorno para las fases donde golpes sucesivos están sincronizados. Los ejes son los mismos para todos los gráficos, mostrado en la parte inferior que corresponde al comienzo del caos.

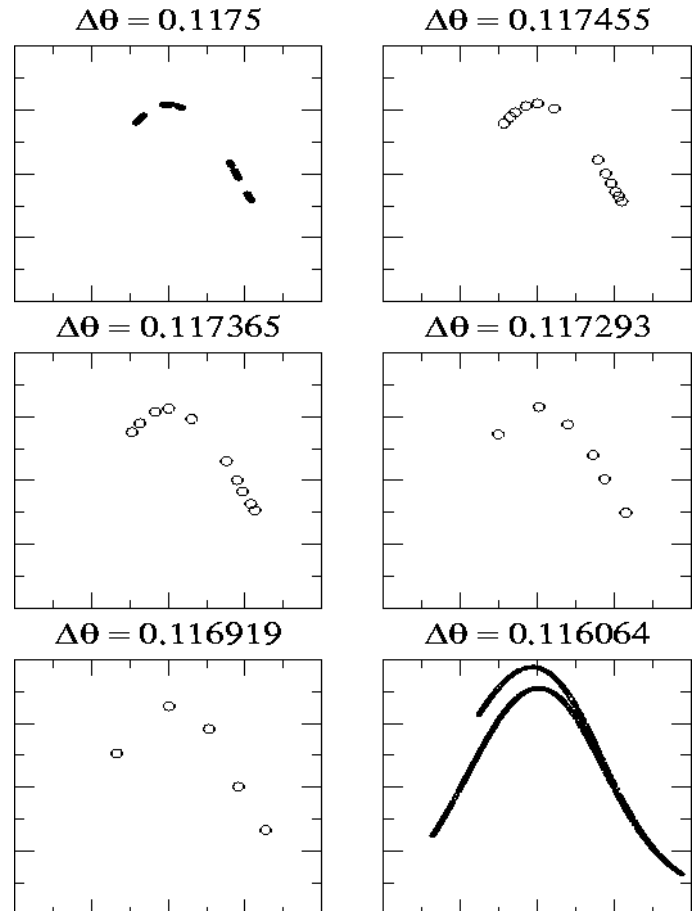


Figura 14. Lo mismo que en la figura anterior, ahora para golpes con intensidad más allá del comienzo del caos.

En una de esas ventanas encontramos un resultado muy interesante. Como puede verse en la Figura (10), existe una repetición del escenario de bifurcaciones y caos visto anteriormente en la Figura (4). De hecho, como sabemos, una peculiaridad en estos mapas es la auto-similitud.

Aumentando el parámetro  $\Delta\theta$ , observamos una secuencia de bifurcaciones bastante similar a lo que se vio anteriormente. Entretanto, esta secuencia ocurre —de forma un poco diferente— a medida que disminuimos el valor de  $\Delta\theta$  a partir de  $\Delta\theta^{(1)} = 0.119427$ , donde tenemos la primera bifurcación. Para  $\Delta\theta > \Delta\theta^{(1)}$ , el péndulo vuelve a tener un periodo  $T = 2.5s$ . Para valores menores que  $\Delta\theta^{(1)}$ , el periodo se duplica, esto es, dos oscilaciones ya no son idénticas. Disminuyendo más el valor de  $\Delta\theta$ , encontramos una segunda bifurcación en  $\Delta\theta^{(2)} = 0.117962$ , donde el periodo es duplicado nuevamente, correspondiendo a cuatro intervalos sucesivos de tiempo. Una tercera y cuarta bifurcación ocurren en  $\Delta\theta^{(3)} = 0.1176029$  y  $\Delta\theta^{(4)} = 0.117526$ , respectivamente. Esta secuencia de bifurcaciones puede ser observada en el diagrama de bifurcación (en la Figura (11) se muestra una parte de él) que se obtuvo con nuestras simulaciones numéricas.

Notamos nuevamente que esa secuencia de bifurcaciones sigue la clase de universalidad de Feigenbaum [4]; luego estimamos el valor de la constante  $\delta$  a partir de los valores  $\Delta\theta^{(1)}$ ,  $\Delta\theta^{(2)}$ ,  $\Delta\theta^{(3)}$  y  $\Delta\theta^{(4)}$ . A partir de los tres primeros valores obtuvimos  $\delta \cong 4.07964$  y a partir de los últimos tres valores obtuvimos  $\delta \cong 4.6698$ . Este último resultado nuevamente concuerda bien con el resultado teórico previsto por Feigenbaum [4]. Extrapolando esos resultados, esperamos un comportamiento caótico a partir de  $\Delta\theta^{(\infty)} = 0.11750504$ . La Figura (12) muestra el comportamiento del péndulo para este valor particular.

A continuación construimos de nuevo los mapas de retorno para algunos valores de  $\Delta\theta$ . Para golpes con intensidades mayores que  $\Delta\theta^{(1)}$ , la secuencia converge a un punto fijo simple. Disminuyendo  $\Delta\theta$  a valores menores que  $\Delta\theta^{(1)}$ , el atractor pasa a tener un periodo de ciclo 2, un periodo de ciclo 4 antes de  $\Delta\theta^{(2)}$  y así sucesivamente. La secuencia ya no es periódica cuando fijamos  $\Delta\theta^{(\infty)}$ . Esta secuencia de bifurcaciones puede ser observada en la Figura (13). Antes de  $\Delta\theta^{(\infty)}$ , se tiene nuevamente un comportamiento caótico, donde no se observa sincronización fuera de las ventanas impares. El primer mapa de retorno, como antes, está formado por piezas de una curva continua (Figura (14), parte superior izquierda). Disminuyendo las intensidades de los golpes, la sincronización es reestablecida dentro de algunas ventanas, pero los periodos ya no están determinados por potencias de 2. La Figura (14) muestra ejemplos de periodos  $5T, 10T, 6T$  y  $12T$ .

#### 4. CONCLUSIONES

Para concluir, hemos resuelto numéricamente la ecuación de movimiento para un péndulo rígido bajo el impulso de golpes. Para golpes de baja intensidad, el

péndulo entra en resonancia, siguiendo un movimiento periódico. El periodo coincide con el periodo externo  $T$  impuesto por los golpes. Los golpes sucesivos están sincronizados, ocurriendo siempre en la misma posición del péndulo (fase) cerca del punto de retorno (fase estacionaria). Incrementando la intensidad de los golpes, se observa una duplicación de periodo; las repeticiones ocurren sólo después de dos oscilaciones completas sucesivas. El movimiento aún está sincronizado con los golpes externos, pero no después de una oscilación completa, ya que las fases precisas donde los golpes sucesivos ocurren se alternan entre 2 valores diferentes que ya no están cerca del punto de retorno. En realidad, incrementando la intensidad de los golpes, el sistema presenta una cascada de bifurcaciones con periodos  $2T, 4T, 8T, \dots$  siguiendo la ruta al caos de Feigenbaum. Esta secuencia de bifurcaciones se acumula en el principio del caos, correspondiendo a la intensidad exacta del golpe, donde se pierde la sincronización. Mas allá de esto, se observa un comportamiento caótico. Incrementando aún la intensidad de los golpes (dentro de la región caótica), aparecen ventanas periódicas donde se restaura la sincronización. Los periodos son ahora múltiplos de números impares  $3T, 6T, 12T, \dots, 5T, 10T, 20T, \dots$ , etc. En el sentido inverso, es decir, disminuyendo la intensidad de los golpes, las secuencias también siguen cascadas de bifurcación hacia el comienzo del caos donde también se acumulan. Para  $\Delta\theta > \Delta\theta^{(crisis)}$ , el péndulo realiza vueltas completas, superando su posición vertical superior. A partir del punto  $\Delta\theta^{(crisis)}$ , el péndulo presenta un comportamiento bastante peculiar: observamos, en particular, dos grandes ventanas donde el movimiento es periódico, una de ciclo 3 y otra de ciclo 2. Además, varias otras ventanas son observadas en medio del caos. A partir de un cierto valor del parámetro  $\Delta\theta$ , el péndulo presenta un comportamiento similar al que tuvo para  $\Delta\theta < \Delta\theta^{(crisis)}$ , o sea, verificamos una secuencia de bifurcaciones con periodos  $\dots 8T, 4T, 2T$ , hasta que el péndulo vuelve a tener un comportamiento periódico con  $T = 2.5s$ .

#### REFERENCIAS

- [1] J. V. José e E. J. Saletan, *Classical Dynamics*, Cambridge University Press, pag. 453 (1998).
- [2] L. N. Hand and J. D. Finch, *Analytical Mechanics*, Cambridge University Press, pag 453 (1998).
- [3] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19**, 25 (1978); **21**, 669 (1979).
- [4] M. J. Feigenbaum, *Los Alamos Science* **1**, 4 (1980).
- [5] Existe un mapa discreto proporcionando la fase y su derivada, justo después de algunos golpes, como función de las mismas cantidades, justo después del golpe previo. G. M. Zaslavskii, *Phys. Lett.* **A69**, 145 (1978). Esta aproximación evita la solución completa de la ley de Newton entre golpes sucesivos, permitiendonos explorar mucho mejor el espacio de fases. U. Feudel, C. Grebogi, B. R. Hunt and J. A. Yorke, *Phys. Rev.* **E54**, 71 (1996); R. Chacon and A. Martinez Garcia-Hoz, *Phys. Lett.* **A281**, 231 (2001). Por razones didácticas, preferimos la aproximación tradi-



cional, obteniendo el movimiento continuo completo, algunos ejemplos son mostrados en la Figura (3). De esta manera, la cascada de duplicación de periodos puede ser directamente observada, dando al estudiante un mejor entendimiento conceptual del fenómeno.

[6] Aparte del límite simple  $\theta_0 \rightarrow 0$ , una solución analítica cerrada también es posible en el límite  $\theta_0 \rightarrow \pi$ . Ver, por ejemplo, P. M. C. de Oliveira, *Comportamento Crítico no Pêndulo Simples*, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **17**, 21 (1995).