CAPITULO III. ESPACIO SIMPLECTICO SOBRE UN ANILLO DE HERMITE.

§ - 1 ANILLOS DE HERMITE Y β-ANILLOS.

Los trabajos recientes de Quillen [17], Vaserstein [27] y Suslin [22] prueban que los anillos de polinomios sobre anillos locales regulares de dimensión menor o igual que 2, en un número finito de indeterminadas, son anillos de Hermite y como estos anillos son noetherianos, son también β-anillos. Recordemos aquí para comodidad en la lectura de este capítulo los conceptos de fila unimodular y anillo de Hermite (terminología de Lam. [15].

Sea A un anillo conmutativo y con elemento unidad. Diremos que $\alpha = (a_1\ a_2 \ldots a_n) \in A^n$ es una fila unimodular si y solo si α. A = A; diremos que α es ampliable si y solo si existe $M \in GL_n(A)$ con una fila igual a α. En estas condiciones diremos que A es un anillo de Hermite si y sólo si toda fila unimodular es ampliable. Las propiedades más importantes, así como algunas caracterizaciones de este tipo de anillos pueden verse en Abia E. [1].

Nuestro objetivo en esta sección es comparar detalladamente los conceptos de anillo de Hermite y β-anillos, demostrando que existen β-anillos que no son anillos de Hermite y recíprocamente.

Simultáneamente, analizaremos condiciones bajo las cuales los anillos de funciones continuas o diferenciables son anillos de Hermite, condiciones íntimamente relacionadas con la orientabilidad, o más precisamente, con la para lelizabilidad.

Para encontrar ejemplos de β-anillos que no sean anillos de Hermite, el camino más lógico es construir un anillo cociente, pues la condición de β-anillo es estable por paso al cociente mientras que la de anillo de Hermite no lo es. La construcción del ejemplo recíproco es más complicada y nos llevará a profundizar en algunas propiedades de los anillos de funciones diferenciables.

Nota 1.1. En esta nota analizaremos los conceptos de fila unimodular y fila ampliable, así como las condiciones de anillo de Hermite para los anillos de funciones continuas.

En todo lo que sigue X es un espacio topológico y K un cuerpo, que será indistintamente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con sus topologías habituales, o un cuerpo valorado no arquimediano, con la topología asociada a la valoración. Designaremos por $C(X, K)$ al anillo de funciones continuas de X en K, o si no hay confusión en ello, simplemente por $C(X)$.

1.1.1. Existe un isomorfismo natural de $C(X)$-módulos entre $C(X)^r$ y el $C(X)$-módulo de aplicaciones de X en K^r, que asocia a toda aplicación de X en K^r la familia de sus componentes, con la topología producto.

En lo sucesivo designaremos con el mismo símbolo f a un elemento de $C(X)^r$, es decir a una fila de $C(X)$ compuesta por r elementos, y a la aplicación de X en K^r correspondiente a ella, indicando con $f_i(x)$ a la componente i-ésima de la misma.

1.1.2. Una fila $f \in C(X)^r$ es unimodular si y sólo si $\|f(x)\| \neq 0 \quad \forall x \in X$, donde $\| \ \|$ tiene el sentido usual, según se trate de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o un cuerpo K valorado no arquimediano.

Entonces si f es unimodular, $\forall x \in X$ existe $i \in I$ con $f_i(x) \neq o$ ya que existen funciones $g_i(x)$ con $\Sigma f_i(x) \cdot g_i(x) = 1$; luego $\|f(x)\| \neq o$. Recíprocamente, si $\|f(x)\| \neq o$ $\forall x \in X$, se pueden construir de forma inmediata funciones

$$g_i : X \longrightarrow K$$

con $\Sigma f_i(x)\, g_i(x) = 1 \quad \forall x \in X$

1.1.3. Si $K = \mathbb{R}$, $f \in C(X, \mathbb{R})^r$ es ampliable si y sólo si existen funciones $g_1, g_2, \ldots, g_{r-1} \in C(X, \mathbb{R})^r$ tales que $\forall x \in X$, $\{\frac{1}{\|f(x)\|} \cdot f(x), g_1(x), \ldots g_{r-1}(x)\}$ forman una referencia ortonormal de $\mathbb{R}^r$. Además podemos añadir que, en este caso, $f \in C(X, \mathbb{R})^r$ es unimodular si y sólo si $\Sigma f_i^2(x) \neq o$ $\forall x \in X$ pues $\Sigma f_i^2(x) = \|f(x)\|^2$

Nota 1.2. Analicemos ahora el caso particular en que X sea una esfera.

1.2.1. Sea $X = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. La aplicación de inclusión:

$$i_n : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

es ampliable si y sólo si existe una base del espacio tangente $T_{S^{n-1},x}$ que varía continuamente con $x \in S^{n-1}$, es decir, si y sólo si S^{n-1} es paralelizable. En efecto, la condición anterior aplicada a este caso dice que i_n es ampliable si y sólo si existen funciones continuas $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1} : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tales que $\frac{1}{\|i_n(x)\|}$ $i_n(x)$; $g_1(x),\ldots,g_{n-1}(x)$ forman una referencia de $\mathbb{R}^n$, $\forall x \in S^{n-1}$, es decir, si y sólo si $g_1(x),\ldots,g_{n-1}(x)$ son una base de $T_{S^{n-1},x}$ que varía continuamente con x.

<u>1.2.2.</u> Como S^2 no es paralelizable, la función

$$1_3 : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

no es ampliable.

Consideremos entonces el anillo $A = \mathbb{Z}[x_1\ x_2\ x_3]/_I$ con $I = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$. $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$. A es un anillo noetheriano, por tanto es β-anillo, sin embargo no es un anillo de Hermite pues la fila $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ con $\overline{f}(x) = f(x) + I$ es unimodular ya que $\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 + \overline{x}_3^2 = 1$. Sin embargo no es ampliable pues si lo fuera existirían funciones polinómicas con coeficientes en $\mathbb{Z}$ sobre la esfera $g_1(x)$, $g_2(x)$ tales que la matriz

$$M = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 & \overline{x}_2 & \overline{x}_3 \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{bmatrix}$$

es inversible en A. Por otra parte, A se puede sumergir como anillo en $C(S^2, \mathbb{R})$ y de esta forma la función $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ se transforma en i_3. La inversibilidad de M en A implica que M es también inversible en $C(S^2, \mathbb{R})$ en contradicción con el hecho de que i_3 no es ampliable. Por tanto, $A = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]/_I$ es un β-anillo pero no es un anillo de Hermite.

<u>Proposición 1.3</u> Sea X un espacio topológico no discreto, compacto y completamente regular $C(X,\mathbb{R})$ no es un β-anillo.

Demostración. Sea $A = C(X, \mathbb{R})$. Sabemos que $\mathrm{Max}(A)$, con la topología de Zariski, coincide con X. Sea p un ideal primo de A. Veamos que p está contenido en un único ideal maximal. En efecto: sea

$$V(p) = \{m \in \mathrm{Max}(A) \mid p \subset m.\} = \{x \in X \mid f(x) = o, \ \forall f \in p\}.$$

si existiesen $x, y \in V(p)$, $x \neq y$, por ser X completamente regular, se pueden construir funciones f_x y f_y y entornos abiertos U_x, U_y de x e y respectivamente tales que $f_x\big|_{X - U_x} \equiv o$, $f_y\big|_{X - U_y} \equiv o$, $f(x) \neq o$, $f(y) \neq o$. Entonces $f_x \cdot f_y = o$ y $f_x \cdot f_y \in p$ no perteneciendo a p ni f_x ni f_y con lo que p no sería primo. Por tanto $V(p)$ es o vacío o consta de un único punto.

Si $V(p) = \Phi$, entonces para todo $x \in X$, $x \notin V(p)$ y existe $f_x \in p$ con $f_x(x) \neq o$; luego existe U_x entorno de x en X con $f_x\big|_{U_x}(y) \neq o$ $\forall y \in U_x$. Como por hipótesis X es compacto y la familia de entornos $\{U_x\}_{x \in X}$ forman un recubrimiento abierto de X, existen $x_1, x_2, \ldots x_n \in X$ tales que la subfamilia $\{U_{x_i}\}$ forman un recubrimiento abierto de X. Construimos $f(x) = \Sigma f_i^2(x)$, $f(x) \neq o$ $\forall x \in X$, luego $f(x)$ es unidad y $f(x) \in p$. Por tanto $p = A$.

Como consecuencia $V(p) \neq \Phi$ y $V(p)$ consta de un único punto, es decir, existe un único ideal maximal que contiene a p.

En este caso $A_\beta = A_M$, siendo $A_\beta = \varprojlim \{A_p\}_{p \in \mathrm{Spec}\, A}$

$A_M = \varprojlim \{A_m\}_{m \in \mathrm{Max.}(A)} = \prod_{m \in \mathrm{Max}(A)} A_m$, Abia [1]. Pero $A \neq A_M$ pues al no ser la topología de X la discreta, no toda familia $\{f_x\}_{x \in X}$ de gérmenes de aplicaciones de X en $\mathbb{R}$ es compatible y da lugar a una aplicación continua de X en $\mathbb{R}$. Luego $A \neq A_\beta$ y A no es un β-anillo.

Consecuencia 1.4. Si X es una variedad diferenciable de clase infinito compacta, $A = \text{Dif } C^{\infty}(X, \mathbb{R})$ no es un β-anillo.

Demostración. El razonamiento es análogo al de la proposición anterior.

Nota 1.5. Consideremos $S_1 \subset \mathbb{R}^2$ y sea $A = \text{Dif } C^{\infty}(S^1, \mathbb{R})$. A es anillo de Hermite. En efecto: Sea

$$f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

una fila unimodular. Entonces $\|f(x)\| \neq o \ \ \forall x \in S^1$ y podemos construir $f^*(x) = \frac{1}{\|f(x)\|} f(x)$, $f^*(x)$ toma sus valores en S^{n-1} y su imagen es una curva diferenciable cerrada en S^{n-1} Si $n = 2$ entonces la función $g(x) = (-f_2^*(x), f_1^*(x))$ cumple las condiciones buscadas y si n es mayor que 2, existe algún punto $x \in S^{n-1}$, $x \notin \text{im } f^*$ y un casquete esférico C_x centrado en x que no corta a im f^*. Por proyección estereográfico, $S^{n-1} - C_x$ es difeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^{n-1}$ que es paralelizable. Luego existe una referencia ortonormal en $T_{S^{n-1},y}$, $y \in S^{n-1} - C_x$, que varía diferenciablemente con y. Sea $g_1(x),\ldots,g_{n-1}(x)$ esta referencia, entonces las funciones $g_1(x),\ldots,g_{n-1}(x)$ son precisamente las funciones buscadas.

Por tanto, hemos encontrado un anillo de Hermite que no es β-anillo.

§ - 2. TEOREMA DE ESTRUCTURA DE ESPACIO SIMPLECTICO SOBRE UN ANILLO DE HERMITE.

En todo este párrafo A representará un anillo de Hermite. Este hecho es importante con vistas a un teorema de estructura para espacios simplécticos sobre A pues, si U es un submódulo libre sumando directo de V, $\omega(U)$ es un submódulo libre sumando directo de V^* y $\dim\cdot U + \dim\,\omega(U) = \dim V$. Abia [1].

Por esta razón nos interesa analizar la relación de ortogonalidad respecto de Φ y reducirla a una ortogonalidad de V en V* cuyo comportamiento esté perfectamente determinado.

Las definiciones y notaciones serán las mismas de los capítulos anteriores.

Nota 2.1. Frecuentemente utilizaremos sumas directas internas y externas simultáneamente. Para evitar confusión, precisaremos que los sumas directas internas dependen de la inmersión que se tome de un módulo en otro (es decir, manejaremos estas sumas en el sentido de sumas de subconjuntos en la teoría general de categorías). Para manejarnos con comodidad conviene hacer las dos precisiones siguientes:

1. Sean U y V A-Módulos, $f : U \longrightarrow V$ un homomorfismo. Diremos que U es sumando directo de V respecto de f si y solo si existe un A-módulo U' con $V \simeq U \oplus U'$ y el homomorfismo asociado a esta suma directa $q_1 : U \longrightarrow V$ es precisamente f (o lo que es lo mismo, la proyeccción $\Pi : V \longrightarrow U$ es el inverso de f por la derecha).

2. Si V es un submódulo de V e $i : U \longrightarrow V$ es la inclusión, decir que U es sumando directo de V respecto de i equivale a decir que $V = U + U'$ con U'

submódulo de V y + suma directa interna. En este caso diremos simplemente U es sumando directo de V. La razón de esta precisión se encuentra en el ejemplo siguiente:

Sea $A = \mathbb{Z}/_{(2)} \oplus \mathbb{Z}/_{(4)}$ como $\mathbb{Z}$-módulo. Entonces $\mathbb{Z}/_{(2)}$ es submódulo directo de A respecto del homomorfismo de inclusión

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/_{(2)} &\longrightarrow \mathbb{Z}/_{(2)} \oplus \mathbb{Z}/_{(4)}. \\ a + (2) &\longrightarrow (a+(2),\ o+(4)). \end{aligned}$$

pero no lo es respecto del homomorfismo tambien inyectivo

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/_{(2)} &\longrightarrow \mathbb{Z}/_{(2)} \oplus \mathbb{Z}/_{(4)} \\ a + (2) &\longrightarrow (o+(2),\ 2a+(4)) \end{aligned}$$

<u>Nota 2.2</u>. Si A es un anillo de Hermite y U es un submódulo libre sumando directo de V, toda base $\{u_1, u_2,\ldots,u_t\}$ de U se puede ampliar a una base B de V. Si tamamos la matriz $M_{\Phi,B}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11}\cdots & a_{1t}\cdots & a_{12n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1}\cdots & a_{tt}\cdots & a_{t2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n1}\cdots & a_{2nt}\cdots & a_{2n,2n} \end{bmatrix}$$

la matriz de $d_{(\Phi|U)}$ respecto de $\{u_1, u_2\ldots u_t\}$ y su base dual es

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & \cdots & a_{tt} \end{bmatrix}$$

Nota 2.3. Aunque parezca, dada la similitud de los anillos de Hermite con los cuerpos, que sería posible prescindir de la condición de ser U libre en la nota anterior, como sucede en el caso de un anillo local en el cual por ser U sumando directo de un A-módulo libre V es proyectivo y por tanto libre, sobre un anillo de Hermite el hecho de que U e $\mathrm{imd}_{(\Phi|U)}$ sean sumandos directos de V y V* respectivamente no implica que U sea libre como lo prueba el ejemplo siguiente:

Sea el anillo $\mathbb{Z}/_{(6)}$ que es de Hermite por ser anillo noetheriano y o-dimensional [1]. Consideremos el $\mathbb{Z}/_{(6)}$ - módulo libre. $(\mathbb{Z}/_{(6)})^2$ y sobre él la forma hemisimétrica Φ que respecto de la base canónica tiene por matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ Consideremos el homomorfismo

$$(\mathbb{Z}/_{(2)})^2 \longrightarrow (\mathbb{Z}/_{(6)})^2$$

$$(a + (2),\ b + (2)) \longrightarrow (3a + (6),\ 3b + (6)).$$

$(\mathbb{Z}/_{(2)})^2$ es sumando directo (su complementario es $(\mathbb{Z}/_{(3)})^2$ e $\mathrm{im}\, d_{(\Phi|U)}$ es sumando directo de $(\mathbb{Z}/_{(2)})^2$ (de hecho coincide con él pues tiene cuatro elementos distintos). Sin embargo $(\mathbb{Z}/_{(2)})^2$ tiene cuatro elementos y $4 \neq 6^n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Luego $(\mathbb{Z}/_2)^2$ no es un $\mathbb{Z}/_{(6)}$ - módulo libre.

Nota. 2.4. La forma bilineal Φ induce en el retículo L(V) de submódulos de V una relación de ortogonalidad a la que designaremos por ω_Φ . La relación entre ω y ω_Φ es la siguiente. El isomorfismo $d_\Phi : V \longrightarrow V^*$ induce un isomorfismo de retículos. (que preserva la dimensión)

$$D_\Phi : L(V) \longrightarrow L(V^*)$$

de forma que el diagrama.

$$\begin{tikzcd} L(V) \arrow[r, "D_\Phi"] \arrow[dr, "\omega_\Phi"'] & L(V^*) \arrow[d, "\omega"] \\ & L(V) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. En efecto: Para todo $L \in L(V)$ es

$$\omega_\Phi(L) = \{x \in V \mid d_\Phi(v)\ (u) = 0,\ \ \forall u \in L\} = \{v \in V \mid d_\Phi(u)\ (v) = o,\ \ \forall u \in L\} =$$

$$= \{v \in V \mid u^*(v) = o,\ \ \forall u^* \in D_\Phi(L)\} = \omega .\ D_\Phi(L) \Longrightarrow \omega_\Phi = \omega\ D_\Phi$$

<u>Nota 2.5</u>. Si U es un sumando directo de V, $\omega_\Phi(U)$ se puede calcular de la forma siguiente: Sea $\tau_\Phi : V \longrightarrow V^*$ el homomorfismo definido en el capítulo I. τ_Φ es sobre y además se verifica que.

i) τ_Φ es una sección

ii) Ker $\tau_\Phi = \omega_\Phi(U)$.

En efecto: i) sea $\Pi ; V \longrightarrow U$ la sección de la inclusión $i : U \longrightarrow V$ y $\Pi^* : U^* \longrightarrow V^*$ el homomorfismo transpuesto. Como $d_\Phi : V^* \longrightarrow V^*$ es isomorfismo, podemos construir $d_\Phi^{-1} : V^* \longrightarrow V$ y la composición $d_\Phi^{-1} . \Pi^* : U^* \longrightarrow V$. Veamos que este homomorfismo es una retracción de τ_Φ. En efecto:

$$\tau_\Phi . d_\Phi^{-1} . \Pi^*(f) = \tau_\Phi . d_\Phi^{-1}(f.\Pi) = d_\Phi . d_\Phi^{-1}(f\ \Pi)i = f.\Pi.i = f.$$

ya que por definición $\tau_\Phi(v) = d_\Phi(v)\big|_U . i \quad \forall v \in V$

ii) Demostrado en capítulo I.

Proposición 2.6. Sea V un espacio simpléctico, U un submódulo libre sumando directo de V. Se verifica que:

i) $\omega_\Phi(U)$ es un submódulo libre sumando directo de V, al que llamaremos sumando ortogonal de U respecto de Φ, con $\dim V = \dim U + \dim \omega_\Phi(U)$

ii) $\omega^2_\Phi(U) = U$

iii) Ker. $d_{(\Phi|_U)} = U \cap \omega_\Phi(U)$

Demostración.

i) Decir que $U \xrightarrow{i} V$ es libre y sumando directo de V, por ser d_Φ isomorfismo, implica que $D_\Phi(U)$ es libre y sumando directo, respecto de la inclusión de $D_\Phi(U)$ en V^*, de V. Por otra parte, como A es anillo de Hermite, para todo U libre y sumando directo, $\omega(U)$ es libre y sumando directo de V^* respecto de la inclusión.

Teniendo en cuenta las observaciones anteriores se tiene que:

$$\dim \omega_\Phi(U) = \dim \omega(D_\Phi(U) = \dim.\ V - \dim D_\Phi(U) = \dim V - \dim U$$

ii) Por análogo razonamiento al anterior $\omega^2_\Phi(U)$ es libre y sumando directo de V. Por tanto

$$\dim \omega^2_\Phi\ (U) = \dim(U)$$

Sabemos que $U \subset \omega^2_\Phi(U)$. Veamos que coinciden. Sea $\{u_1,\ldots,u_t\}$ una base de U. Por ser A anillo de Hermite se puede prolongar a una base $\{u_1,\ldots u_t,u_{t+1},\ldots,u_n\}$

de V. Si $U \neq \omega_\Phi^2(U)$ existe $v \in \omega_\Phi^2(U)$, $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_t u_t + \dots + \lambda_n u_n$ siendo algún $\lambda_i \neq o$ para $t+1 \leq i \leq n$. Por tanto el $R_u(u_1, \dots, u_t, V) = t + 1$.

Sea $\{v_1, \dots, v_t\}$ una base de $\omega_\Phi^2(U)$. Por ser A anillo de Hermite se puede ampliar a una base $\{v_1 \dots v_t, \dots, v_n\}$ de V. Como para todo i, $1 \leq i \leq t$, $u_i \in \omega_\Phi^2(U)$ y $v \in \omega_\Phi^2(U)$ es $u_i = a_{i1} v_1 + \dots + a_{it} v_t$ y $v = b_1 v_1 + \dots + b_t v_t$. Veamos que $R_u(u_1, \dots, u_t, v) = t+1$ lleva a una contradicción. En efecto, la matriz de coordenados de $(u_1, \dots, u_t, v)$ respecto de la base $\{v_1, \dots, v_t\}$ es

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} \dots & a_{1t} & o \dots & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{t1} \dots & a_{tt} & o \dots & o \\ b_1 \dots & b_t & o \dots & o \end{bmatrix}$$

luego $R_u(M) < t + 1$ y $U = \omega_\Phi^2(U)$.

iii) Análogo a I.2.3.

Proposición 2.7. Si U es un subespacio no isotrópico de V, $\omega_\Phi(U)$ es un subespacio no isotrópico de V.

Demostración. En este caso $V = U + \omega_\Phi(U)$ y la suma es directa. Eligiendo una base $B = \{u_1, \dots, u_t, u_{t+1}, \dots, u_n\}$ de V con $u_i \in V$, $1 \leq i \leq t$, $u_j \in \omega_\Phi(U)$, $t + 1 \leq j \leq n$, la matriz de Φ asociada a esta base es

$$M_\Phi = \left[\begin{array}{c|c} M_1 & o \\ \hline o & M_2 \end{array}\right]$$

con det M_1. det M_2 = det M_Φ = ε, ε unidad de A. Entonces det M_1 y det M_2 son unidades y $(\omega_\Phi(U), \Phi_{\omega_\Phi(U)})$ es un espacio simpléctico. Por tanto $\omega_\Phi(U)$ es un subespacio no isotrópico de V.

Proposición 2.8. Sea U un subespacio de V. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) U es no isotrópico

(ii) $\omega_\Phi(U)$ es no isotrópico

(iii) $V = U \perp \omega_\Phi(U)$

Demostración. i) $\Longrightarrow$ (ii). Trivial de 2.7.

(ii) $\Longrightarrow$ iii). Al ser $\omega_\Phi(U)$ no isotrópico $\operatorname{Ker} d_{\Phi|\omega_\Phi(U)} = o$ pero $\operatorname{Ker} d_{\Phi|\omega_\Phi(U)} = \omega_\Phi(U) \cap \omega_\Phi^2(U)$ y como $\omega_\Phi^2(U) = U$ es $V = U + \omega_\Phi(U)$ y por definición de ortogonalidad respecto de Φ es $V = U \perp \omega_\Phi(U)$

iii) $\Longrightarrow$ (i). Trivial pues $\operatorname{Ker} d_{(\Phi|U)} = \{o\}$.

Proposición 2.9. Sea U un subespacio no isotrópico de V. Entonces $\forall a \in U$ con $o(a) = A$ existe $b \in U$ tal que $\Phi(a, b) = 1$.

Demostración. Sea M_Φ la matriz correspondiente a $\Phi|_U$ respecto de una base de U. Veamos que existe $b \in U$ con $(a).\, M_\Phi(b)^t = 1$. Por ser $o(a) = A$, $a = (a_1, \ldots a_n)$ es unimodular y existe $G \in GL_n(A)$ tal que $a.\, G = (1, o \ldots o)$ Abia [1]. Considerando la matriz $C^{-1} M_\Phi$ es $\det(C^{-1} M_\Phi) = 1$ y por tanto sus filas son unimodulares siendo $(1, o \ldots o).\, C^{-1}.\, M_\Phi = (a_{11} \ldots a_{1n})$ primera fila de $G^{-1}.\, M_\Phi$

unimodular. Como existe S tal que $(a_{11} \ldots a_{1n})$. S = (1,0...0) es

$$(a_{11} \ldots a_{1n}).\ S. \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

y tomando $b = (1,0 \ldots 0).\ S^t$ es $(a).\ M_\Phi (b)^t = 1$.

Definición 2.10. Un par de vectores ordenados $(a,\ b)$ tal que $\Phi(a,\ b) = 1$ se llama PAR HIPERBOLICO.

Definición 2.11. Al submódulo engendrado por un par hiperbólico se le llama PLANO HIPERBOLICO. Es evidente que un plano hiperbólico es un subespacio no isotrópico de dimensión dos.

Teorema 2.12. Todo espacio simpléctico es suma ortogonal de planos hiperbólicos.

Demostración. Es consecuencia inmediata de las proposiciones anteriores actuando por recurrencia sobre la dimensión de V.

Corolario 2.13. Dos espacios simplécticos de la misma dimensión son isométricos ya que siempre existe una aplicación lineal, que transforma base canónica en base canónica, y es isomorfismo.

§ - 3. EL GRUPO SIMPLECTICO SOBRE ANILLOS DE HERMITE DE FUNCIONES DIFERENCIABLES

El problema a resolver en esta sección es encontrar una clase de anillos de Hermite para la cual el grupo simpléctico de cada dimensión esté generado por las transvecciones simplécticas.

Hemos probado que ésto sucede para β-anillos y dado que existe una clase muy amplia (que contiene al menos a todos los anillos de polinomios con coeficientes en un cuerpo o anillo local regular de dimensión menor o igual que dos) de anillos de Hermite que son simultáneamente β-anillos, podemos afirmar que existen anillos de Hermite con esta propiedad. El problema está en demostrar que esta propiedad se verifica para todos los anillos de Hermite, resultado que no creemos cierto.

Trabajaremos con anillos de Hermite cuyos elementos se pueden considerar como funciones aunque la existencia de funciones continuas "patológicas", como las curvas de Peano, hace necesaria que esta consideración de los elementos del anillo como funciones deba ser el de funciones diferenciables (de comportamiento regular en la dimensión). Para este tipo de anillos probaremos que el grupo simpléctico, en cualquier dimensión, está generado por las transvecciones simplécticas.

Siempre que hablemos de variedad diferenciable, se entenderá una variedad diferenciable real y compacta, con lo cual, si X es una variedad diferenciable y F(X) su anillo de funciones con valores reales, Max(F(X)) con la topología de Zariski coincide con X y el haz F. de funciones diferenciables sobre X coincide con el haz F imagen recíproca por la inclusión.

$$\text{Max.}(F(X)) \longrightarrow \text{Spec}(F(X))$$

del haz F(X) sobre Spec(F(X)).

Definición 3.1. Sea X una variedad diferenciable n-dimensional, sea U un abierto de X. Llamaremos paralelización de U a una familia de campos vectoriales $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n\}$ linealmente independientes en los puntos de U.

Diremos que X es una variedad paralelizable si existe una paralelización de X como abierto.

Nota 3.2. Es un resultado conocido de geometría diferencial que las esferas S^n son paralelizables solamente para $n = 1,3,7$, así como que X es paralelizable si y sólo si su fibrado tangente es trivial

Analicemos entonces el comportamiento de las filas unimodulares y la ampliabilidad en el caso en que X sea una variedad diferenciable compacta y A el anillo de funciones diferenciables sobre X con valores en $\mathbb{R}$.

3.2.1. Una fila $f \in A^r$ es unimodular si y sólo si $\Sigma f_i^2(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, es decir, si y sólo si la aplicación $f^*(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{\Sigma f_i^2(x)}}$ de X en $\mathbb{R}^r$ esta definida como $\|f^*(x)\| = 1$ para todo $x \in X$. f^* toma sus valores en la esfera S^{r-1}, luego las filas unimodulares se pueden interpretar como aplicaciones -vía reducción a 1 de una norma- de X en S^{n-1}.

3.2.2. Una fila $f \in A^r$ es ampliable si y sólo si existen $g_1, g_2, \ldots, g_{r-1} \in A^r$ con

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_r(x) \\ g_{1,1}(x) & g_{1,2}(x) & \dots & g_{1,r}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{r-1,1}(x) & g_{r-1,2}(x) & \dots & g_{r-1,r}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

para todo $x \in X$; o equivalentemente, si y solo si existen funciones $g_i^*: X \longrightarrow \mathbb{R}^r$ tales que para todo $x \in X$ el conjunto $\{g_i^*(x)\}_{1 \leqslant i \leqslant r-1}$ son un sistema de vec tores en $\mathbb{R}^r$ ortonormales y generan siempre un hiperplano ortogonal a $\mathfrak{f}(x)$.

Consideremos ahora S^{r-1} sumergido en $\mathbb{R}^r$. Identificando para todo $\alpha \in S^{r-1}$ el espacio tangente $T_{S^{r-1},\alpha}$ con el hiperplano $\omega(\underline{\alpha})$; la observación anterior nos da las siguientes condiciones para que una fila $\mathfrak{f}$ unimodular sea ampliable:

Proposición 3.2.3. La fila $\mathfrak{f}$ unimodular es ampliable si y sólo si existe un abierto paralelizable de S^{r-1} que contenga a im f^*

Nota 3.3. S^n, con $n = 1,3,7$, es paralelizable, luego toda fila unimodular de 2, 4,8 elementos es ampliable siempre. Por tanto todo anillo de funciones diferenciables es de Hermite a niveles 2,4 y 8.

El problema se presenta cuando $n \neq 1,3,7$. En este caso, puesto que por proyección estereográfica, $S^n - \{P\}$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{n-1}$, basta con que f^* no sea sobre para que si $P \notin \operatorname{im} f^*$, $\operatorname{im} f^* \subset S^n - \{P\}$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{n-1}$ y por tanto $\operatorname{im} f^*$ está contenida en un abierto paralelizable y f^* es ampliable.

Como consecuencia, hemos obtenido los siguientes resultados.

Proposición 3.3.1.

a) Todo anillo de funciones diferenciables de X en $\mathbb{R}$ es de Hermite a nivel 2,4 y 8.

b) Un anillo de funciones diferenciables de X en $\mathbb{R}$ es de Hermite si y sólo si no existe ninguna aplicación diferenciable suprayectiva de $X \longrightarrow S$ con $n \neq 1,3,7$.

Nota 3.4. Un refinamiento evidente de b) es el siguiente:

Si X es una variedad diferenciable r-dimensional, el anillo de funciones diferenciables de X en $\mathbb{R}$ es de $(r-1)$-Hermite, es decir, toda fila unimodular de longitud mayor o igual que $r+1$ es ampliable. En efecto: Si X es de dimensión r, una aplicación $f^*: X \longrightarrow S^n$ sólo puede ser suprayectiva para n menor o igual que r ya que im f^* se puede estratificar como unión de variedades diferenciables de dimensión menor o igual que r.

Esta es la razón por la cual hemos debido considerar anillos de funciones diferenciales y no anillos de funciones continuas, pues si f es continua la dimensión de im f^* no queda limitada en general, como prueban las curvas de Peano, por la dimensión de X.

Observemos también que aquí se amplia un resultado conocido de geometría algebraica ya que, Bass [4], probó que todo anillo de funciones polinómicas sobre una variedad algebraica no singular y de dimensión r es $(r-1)$-Hermite.

En cualquier caso existen suficientes anillos en la clase de los anillos de funciones diferenciables que son de Hermite. El problema de encontrar una clase más amplia de anillos con esta propiedad, no ha sido resuelto, al menos en nuestro conocimiento, y continuaremos trabajando sobre él.

Otro tipo de anillos interesantes son los anillos de funciones complejas sobre variedades complejas, en los que suponemos que las cosas marcharán de forma perfecta, dado que la complexificación del fibrado tangente a una n-esfera es siempre trivial. Este es, no obstante, un campo interesante al que pensamos dedicar un próximo trabajo, ya que, en este caso, la matriz simpléctica presenta también características especiales que la hacen más interesante.

Para terminar esta memoria, destacaremos algunas propiedades importantes de las transvecciones simplécticas en espacios simplécticos sobre anillos de Hermite. Usaremos las mismas notaciones que en el capítulo II siendo válidos aquí todos los resultados de carácter general obtenidos allí.

<u>Definición 3.5.</u> Sea A un anillo de Hermite, (V, Φ) un espacio simpléctico sobre A. Diremos que un submódulo libre $H \subset V$ de dimensión $n-1$ es un hiperplano si y sólo si existe $\rho \in V^*$ tal que

$$h \in H \Longleftrightarrow \rho(h) = 0$$

<u>Proposición 3.6.</u> Las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) τ es transvección simpléctica.

(ii) $\tau \in SP_n(A)$ y existe L libre y sumando directo de dimensión 1 con $\tau(x) - x \in L \;\; \forall x \in V$.

(iii) $\tau \in SP_n(A)$ y existe un hiperplano H tal que $\tau|_H = 1_H$.

Demostración. Sea $\tau(x) = x + \lambda\, \Phi(a\ x)\, a$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Sea $L = L(a)$, a unimodular $\Longrightarrow \omega_\Phi(L) = H$ es un hiperplano. Como para todo $x \in V$ $\tau(x) - x \in L$ se verifica que para todo $y \in H$.

$$\Phi(\tau(x) - x, y) = o = \Phi\,(\tau(x), y) - \Phi(x, y) \Longrightarrow \Phi(\tau(x), y) = \Phi(x, y)$$

Al ser τ, $\tau^{-1} \in SP_n(A)$ se tiene que

$$\Phi(\tau^{-1}(x),\ \tau^{-1}(y)) = \Phi(\tau(x), y) = \Phi(x, y) \Longrightarrow \Phi(x, \tau^{-1}(y)) = \Phi(x,\ y)$$

Luego

$$\Phi(x, \tau^{-1}(y) - y) = o \text{ para todo } x \in V$$

y por tanto

$$\tau^{-1}(y) - y \in \operatorname{Ker} d_\Phi \Longrightarrow \tau^{-1}(y) - y = o \Longrightarrow y = \tau(y)$$

para todo $y \in H$. c.q.d.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Sea $\tau \in SP_n(A)$, $\tau_H = 1_H$ con H hiperplano. Sea $L = \omega_\Phi(H) = L(a)$. Puesto que a es generador de una línea es unimodular y existe $b \in L(a)$ con $\Phi(a, b) = 1$, es decir, $L(a, b)$ es un plano hiperbólico.

Sea $V = L(a, b) \perp P$. Como para todo $x \in V$ es $\tau(x) - x \in L(a)$ particularizando para $b \in V$ es $\tau(b) - b \in L(a)$, luego existe $\lambda \in A$ tal que

$$\tau(b) - b = \lambda\ a \Longrightarrow \tau(b) = b + \lambda\ a.$$

Tenemos que ver, pues, que $\forall x \in V$ es $\tau(x) = x + \lambda \Phi(a, x)a$. Si $x \in V$, $x = ra + sb + p$, $r, s \in A$, $p \in P$. Entonces

$$\tau(x) = r.\ \tau(a) + s.\ \tau(b) + \tau(p) = r.\ a + s.\ \tau(b) + p.$$

(ya que a y b pertenecen a H)

$$= r\ a + s(b + \lambda a) + p = ra + sb + s.\lambda.\ a + p =$$

$$= r\ a + sb + p + \lambda \Phi(a,\ r.\ a + sb + p).\ a \quad \text{pues } \Phi(a, p) = 0$$

$$= x + \lambda\ \Phi(a, x).\ a \quad \text{c.q.d.}$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Sea $\tau \in SP_n(A)$. Considerando $L = L(a)$ que evidentemente es libre y sumando directo de V por ser a unimodular, se verifica que $\tau(x) - x = \lambda\ \Phi(a, x)a \in L(a)$ $\forall x \in V$.

Nota 3.7. Sea $\tau = \tau_{a,\lambda}$ una transvección simpléctica. $L(a)$ recibe el nombre de LINEA de τ y $H = \omega_\Phi\ (L(a))$ se llama HIPERPLANO de τ.

Si λ es unidad de A, la transvección simpléctica $\tau_{a,\lambda}$ se llama UNIMODULAR.

Pasemos, para finalizar, al estudio del grupo simpléctico y el grupo simpléctico especial n-dimensional de un anillo de Hermite de funciones diferenciables.

Proposición 3.8. Sea A un anillo de Hermite de funciones diferenciables; sea (A^n, Φ) el espacio simpléctico de dimensión n sobre A con $n = 2k$. Si $u, v \in A^n$ son dos filas unimodulares de A^n se puede encontrar una cadena de transvecciones simplécticas con orden contenido en $o(v - u)$ que transforma u en v.

Demostración. Haremos la demostración en tres etapas.

1) Supongamos que $o(v - u) = A$ y que $u\ v = \Phi(u,v) = (u)\ M_\Phi(v)^t$ es una unidad en A.

En este caso la transvección

$$\tau(x) = x + \varepsilon\ \ \Phi(v - u,\ x).(v - u)$$

con $\varepsilon = \Phi(v,\ u)^{-1}$ verifica que

$$\tau(u) = u + \Phi(v,\ u)^{-1}.\ \Phi(v-u,\ u).(v - u) = u + v - u = v$$

2) Supongamos que $o(v - u) = A$ y que $u\,v$ no es una unidad de A. En este caso, veamos que existe una fila unimodular w que verifica que $o(u-w) = o(v - w) = A$ siendo $u.w$ y $v.w$ unidades de A, con lo que aplicando 1), existen transvecciones τ_1 y τ_2 que transforman u en w y v en w, respectivamente. La cadena de transvecciones buscada sería la composición $\tau_2^{-1} \circ \tau_1$.

Para demostrar ésto, necesitamos el teorema siguiente de Abia [1]: un sistema $\Sigma a_{ij}\ \lambda_j = b_i$ se dice libre si y sólo si $R(a_{ij}) = R_u(a_{ij})$ y $R(a_{ij},b_i) = R_u(a_{ij},b_i)$. Entonces un sistema libre sobre un anillo de Hermite posee solución si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz del sistema.

Entonces, la existencia de una tal w se prueba demostrando que el sistema

$$\begin{cases} u.\ w = \varepsilon_1 \\ v.\ w = \varepsilon_2 \end{cases}$$

con ε_1, ε_2 unidades en A, posee solución. Como trabajamos en un anillo de Hermite, siempre que

$$R_u \begin{bmatrix} u_1, & u_2 \ldots & \ldots u_n \\ v_1 & v_2 \ldots & v_n \end{bmatrix} = 2$$

el sistema posee solución cualesquiera que sean ε_1 y ε_2. El problema se presenta cuando

$$R_u \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix} = 1$$

Esta circunstancia se puede presentar por dos causas distintas:

a) Porque $v = \lambda.\ u$. En este caso, y puesto que u y v son unimodulares, λ es una unidad y u se puede transformar en v por una transvección simpléctica.

b) Porque

$$R \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix} = 2 \quad y \quad R_u \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix} = 1$$

En este caso, si consideramos para cada punto $x \in X$ la matriz numérica.

$$\begin{bmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ v_1(x) & v_2(x) & \dots & v_n(x) \end{bmatrix}$$

el rango de esta matriz en cada punto al menos es 1 -y además- la matriz no puede tener una fila nula. Llamando $M_{ij}(x)$ a los menores de orden dos de esta matriz y $\Delta = \Sigma M_{ij}^2(x)$, en los puntos de $D(\Delta) = X - V(\Delta)$ el rango de esta matriz será 2 y en los puntos de $V(\Delta)$ será 1.

El hecho de que ninguna de las filas de la matriz sea nula, nos permite construir funciones $\varepsilon_1(x)$ y $\varepsilon_2(x)$ no nulas sobre x y tales que

$$R \begin{bmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) & \varepsilon_1(x) \\ v_1(x) & v_2(x) & \dots & v_n(x) & \varepsilon_2(x) \end{bmatrix} = 1.$$

para todo $x \in V(\Delta)$, sin más que elegir $\varepsilon_1(x) = 2 \sum_i u_i(x)\ u_i(x)$, $\varepsilon_2(x) = 2\ \Sigma v_i\,(x).\ v_i(x)$ sobre $V(\Delta)$ y prolongar por partición de la unidad. Con ello, la columna $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ es combinación lineal de los restantes columnas. En los puntos de $V(\Delta)$ en los cuales $\Delta = o$ es $u = \lambda v$, $\lambda \neq o$ y $\Sigma u_i . v_i = \Sigma \lambda v_i^2$ con $\Sigma \lambda v_i^2 \neq o$ al ser $\Sigma v_i^2 \neq o$

Entonces se pueden elegir unidades ε_1 y ε_2 de forma que el sistema se pueda resolver localmente. Obviamente las soluciones locales son siempre compatibles y el sistema admite solución global. Además, al añadir el coeficiente dos, hemos garantizado que no puede ser $u(x) = w(x)$ o $v(x) = w(x)$ con lo que $w - u$ y $w - v$ son unidades.

3) Supongamos $o(v-u) = J \neq A$. Podemos construir en este caso una base canónica $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de A^n con $e_i \perp e_j$ y $e_1 = u$ ya que u es unimodular. Entonces $v - u = v - e_1 = \sum_1^n \lambda_i e_i$, $\lambda_i \in J$ luego $v = e_1 + \sum_1^n \lambda_i e_i$.

Si llamamos $a_0 = e_1 = u$, $a_1 = e_1 + \lambda_1 \cdot e_1, \ldots\ldots, a_i = e_1 + \sum_1^i \lambda_i . e_i$ se tiene que

$$a_0 = e_1 = u \qquad a_n = e_1 + \sum_1^n \lambda_i e_i = v, \quad \lambda_i \in J$$

Veamos que es posible pasar de a_{i-1} a a_i mediante un producto de transvecciones simplécticas de orden contenido en J. En efecto:

$e_2 + e_i$ es unimodular para todo $i > 1$ ya que sería la función de componentes (o,1,0...1...o) si $i \neq 2$ o (o 2 o ... o) si $i = 2$, que son unimodulares por se 2 una función constante y se verifica que

$$(e_2 + e_1).\ a_{i-1} = (e_2 + e_1)[e_1 + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j e_j] = -1 - \lambda_1$$

Ahora bien, podemos suponer sim perdida de generalidad que $|\lambda_1(x)| < 1$, pues en cualquier caso, siempre se pueden dividir u y v por $2\|u\|$ o $2\|v\|$ sin dejar de ser unimodulares. Por tanto, siempre se puede suponer que $(e_2 + e_i).\ a_{i-1}$ es unidad

Podemos entonces construir la transvección

$$\tau_j^1(x) = x + \lambda_j .\ \Phi(e_2 + e_j,\ a_{j-1})^{-1}\ \Phi(e_2 + e_j,\ x)(e_2 + e_j)$$

y del mismo modo se comprueba que es viable la transvección

$$\tau_j^2(x) = x-\lambda_j \,.\, \Phi(e_2,\, a_j + \lambda_j\, e_2)^{-1} .\, \Phi(e_2,\, x).\, e_2$$

y se verifica que

$$o(\tau_j^1) \subset J \qquad o(\tau_j^2) \subset J.$$

siendo

$$\tau_j^2 .\, \tau_j^1(a_{j-1}) = a_j$$

Por tanto, el producto de estos productos de transvecciones cumple las condiciones requeridas.

Proposición 3.9. Sean (u, v_1), (u, v_2) pares hiperbólicas en (A^n, Φ) con las condiciones de la proposición anterior. Entonces, existe una cadena de transvecciones simplécticas de orden contenido en $o(v_2 - v_1)$ que dejan u invariante y transforman v_2 en v_1.

Demostración. Esta proposición es muy parecida a la anterior. Divideremos su demostración en tres etapas:

1). Sea $o(v_2 - v_1) = A$ y $v_1 .\, v_2$ unidad en A. Entonces la transvección buscada es la 1) de la proposición anterior.

2). Sea $o(v_2 - v_1) = A$ y $v_1 \cdot v_2$ una no unidad en A. Podemos suponer siempre que $\|v_2 .\, v_1\| < 1$ puesto que dejando u invariante, podemos dividir v por $2\|v_2 \,.\, v_1\|$. De esta forma $(1 - v_2 \,.\, v_1)$ es una unidad.

Por otra parte al ser (u, v_1) y (u, v_2) pares hiperbólicos lo es

$(u, v_2 - v_1)$ y al ser tanto u como $v_2 - v_1$ unimodulares forman parte de una base canónica. Por tanto $v_2 - v_1 - u$ es una fila unimodular ya que, respecto de esta base, tiene por coordenados (-1, 1, 0...0). Entonces considerando las transvecciones

$$\tau(x) = x + (u.x)u$$

$$\tau'(x) = x - (1 - v_2\, v_1)\, [(v_2 - v_1 - u).\, x](v_2 - v_1 - u)$$

el producto $\tau' . \tau$ es la cadena buscada.

3). Sea $o(v_2 - v_1) = J \neq A$. Basta construir la base canónica con $e_1 = - v_1$, $e_2 = u$ y repetir el proceso de 3) de la proposición anterior.

Teorema 3.10. Si A es un anillo de Hermite de funciones diferenciables, el grupo simpléctico $SP_n(A)$ está generado por las transvecciones simplécticas.

Demostración. Trivial de 3.8 y 3.9 por un proceso de inducción.

Nota 3.11. X es una variedad diferenciable conexa si y sólo si centro $SP_n(A) = \{1, -1\}$. En efecto, como X tiene componentes conexas si y sólo si existen 2^n raices de 1 en F(X) Si $X = \overset{n}{\underset{1}{\cup}} X_i$ son las componentes conexas de X, $f \in F(X)$ verifica que $f^2 = 1 \iff f|_{X_i} = \pm 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Luego las raíces de 1 son las funciones definidas por $f|_{X_i} = \pm 1$ que son en total 2^n). Entonces X es conexo si y sólo si las únicas raíces de 1 en F(X) son 1 y -1.

Teorema 3.12. Si A es un anillo de Hermite de funciones diferenciables

$E.S.P_n(A, J)$ está generado por las transvecciones simplécticas de orden contenido en J.

<u>Demostración.</u> Veamos que $\sigma \in ESP_n(A, J)$ puede escribirse como un producto de transvecciones de orden contenido en J.

Sea $\{e_1\ e_2\ \ldots\ e_n\}$ una base canónica de V. Sea $\sigma(e_i) = e_i'$. Entonces $\sigma(e_i' - e_i) \subset J$. De acuerdo con la proposición 3.8 e_1 se transforma en e_1' por transvecciones de orden contenido en J. Estas transvecciones transforman $\{e_i\}$ en $\{e_i''\}$, para todo $i > 1$, tenemos $\sigma(e_i'' - e_i) \subset J$. La proposición 3.9 prueba que e_2'' puede transformarse en e_2' por transvecciones de orden contenido en J permaneciendo invariante e_i'. Por tanto $\{e_1, e_2\}$ puede transformarse en $\{e_1' . e_2'\}$ por transvecciones de orden contenido en J. De esta forma el ortogonal $L(e_1, e_2)$ irá al ortogonal $L(e_1' . e_2')$. Asi podemos concluir la demostración por inducción sobre la demensión de V.