CAPITULO II ESTRUCTURA DE $SP_n(A)$.

§ - 1. TRANSVECCIONES SIMPLECTICAS.

En este capítulo trataremos de extender algunos resultados de Klingenberg [12] en anillos locales al caso general de un anillo cualquiera. Usaremos algunas de sus notaciones que detallaremos aquí.

Nota 1.1. Sea A un anillo conmutativo y con elemento unidad, J un ideal de A. Consideremos el homomorfismo natural

$$h : A \longrightarrow A/_J$$

El funtor $SP_n(-)$ transforma h en un homomorfismo de grupos

$$h_J : SP_n(A) \longrightarrow SP_n(A/_J).$$

Indiquemos brevemente quien es h_J. En primer lugar h induce un homomorfismo de espacios simplécticos.

$$(h.\ \overline{h}_J): (A^n,\ \Phi) \longrightarrow ((A/_J)^n.\ \Phi_J).$$

donde Φ y Φ_J son las formas bilineales hemisimétricas cuyas matrices, respecto de las bases canónicas de A^n y $(A/_J)^n$ son la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ \hline & & \ddots & & \\ & & & \multicolumn{1}{|c}{0} & 1 \\ & & & \multicolumn{1}{|c}{-1} & 0 \end{array}\right]$$

y $\bar{h}_J$ como homomorfismo de grupos abelianos es h^{2n} y -respecto de las bases canónicas de A^n y $(A/_J)^n$- $\bar{h}_J$ tiene por matriz la matriz identidad.

Entonces h_J está definido así: $\forall \sigma \in SP_n(A) = I(A^n, \Phi)$, $h_J(\sigma)$ es el homomorfismo que respecto de las bases canónicas tiene por matriz:

$$M_{h_J}(\sigma) = M_{\bar{h}_J} \cdot h(M_\sigma) \cdot M_{\bar{h}_J}^{-1} = h(M_\sigma).$$

donde $h(M_\sigma)$ es la matriz de clases de elementos M_σ módulo J.

Proposición 1.2. Se verifica que

(1) $h_J(\sigma) . \bar{h}_J = \bar{h}_J . \sigma$

para todo $\sigma \in SP_n(A)$ y $h_J(\sigma)$ queda univocamente determinado por (1).

Demostración. Al ser $\bar{h}_J$ epimorfismo de grupos abelianos, $h_J(\sigma)$ queda univocamente determinado por (1) como homomorfismo de grupos abelianos y por tanto como homomorfismo de $A/_J$-módulos.

Sea $x \in A^n$, $x = (x_1, \ldots x_n)$ respecto de la base canónica de A^n. Entonces

$$\forall x \in A^n, \quad h_J(\sigma) \, . \, \overline{h}_J(x) = (h(x_1),\ldots,h(x_n)) \, . \, M_{h_J}(\sigma) =$$

$$= h(x_1,\ldots,x_n) \, . \, h(M_\sigma) = h\,[(x_1,\ldots,x_n)\, M_\sigma] = h_J \, . \, \sigma(x)$$

lo que prueba (1).

Notaciones 1.3. Sea (V, Φ) un espacio simpléctico sobre A, h, $\overline{h}$ y $\overline{h}_J$ los homomorfismos de la nota 1.1.

1. $\forall\, u \in A$, Llamaremos ORDEN de u -y escribiremos $O(u)$- al ideal generado por u.

2. Sea $x \in V$. Llamaremos ORDEN de x -y escribiremos $O(x)$- al mínimo ideal J de A tal que $\overline{h}_J\,(x) = 0$.

3. Si $\sigma \in S.P_n(A)$, llamaremos ORDEN de σ -y escribiremos $o(\sigma)$- al mínimo ideal J de A tal que $h_J(\sigma)$ pertenece al centro de $SP_n(A/_J)$.

4. Sea G un subconjunto de $SP_n(A)$. Llamaremos ORDEN de G -y escribiremos $O(G)$- al mínimo ideal J de A tal que $h_J(G)$ está contenido en el centro de $SP_n(A/_J)$.

Proposición 1.4. Sea $B = \{v_1, v_2,\ldots,v_n\}$ base de V, $x = x_1\, v_1 + \ldots + x_n\, v_n$ un elemento cualquiera de V se verifica que:

1. $o(x) = J_1(x_1 \ldots x_n) = (x_1 \ldots x_n)\, A$ siendo $J_1(x_1 \ldots x_n)$ el ideal engendrado por lo menores de orden uno de la matriz $(x_1 \ldots x_n)$.

2. Si G es un subgrupo de $SP_n(A)$, $o(G) = \sum_{\sigma \in G} o(\sigma)$

Demostración

1. Trivial ya que $\overline{h}_J(x) = (x_1 + J,\dots,x_n + J)$ y el mínimo ideal J con $x_i + J = 0$, $\forall i = 1,2,\dots,n$ es $J_1(x_1 \dots x_n)$.

2. Obsérvese que si G y G' son dos subconjuntos de $SP_n(A)$ tales que $G \subset G'$, $h_{o(G')}(G) \subset h_{o(G')}(G') \subset$ centro $SP_n(A/_{o(G')})$ y por definición de $o(G)$ se verifica que $o(G) \subset o(G')$. Como consecuencia $\forall \sigma \in G$, $o(\sigma) \subset o(G)$ y por tanto $\sum_{\sigma \in G} o(\sigma) \subset o(G)$. Luego si demostramos que $\forall \tau \in G$, $h_{\sum_{\sigma\in G} o(\sigma)}(\tau)$ pertenece al centro de $SP_n(A/_{\sum_{\sigma\in G} o(\sigma)})$, $h_{\sum_{\sigma\in G} o(\sigma)}(G) \subset$ centro $SP_n(A/_{\sum_{\sigma\in G} o(\sigma)})$ y quedaría probada la proposición

Para ello consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
SP_n(A) \arrow[rr, "h_{o(\tau)}"] \arrow[d, "h_{\sum_{\sigma\in G} o(\sigma)}"'] & & SP_n(A/_{o(\tau)}) \arrow[dll, "h_{\sum_{\sigma\in G} o(\sigma)/o(\tau)}"] \\
SP_n(A/_{\sum_{\sigma\in G} o(\sigma)}) & &
\end{tikzcd}$$

Por el segundo teorema de isomorfía:

$$A/_{\sum_{\sigma\in G} o(\sigma)} \simeq A/_{o(\tau)} / _{\sum_{\sigma\in G} o(\sigma)/o(\tau)}$$

y por tanto tenemos el homomorfismo suprayectivo:

$$h_{\sum\limits_{\sigma\in G} o(\sigma)/o(\tau)} : SP_n(A/o(\tau)) \longrightarrow SP_n(A/\sum_{\sigma\in G} o(\sigma))$$

que hace el diagrama conmutativo

Como $h_{o(\tau)}(\tau) \in$ centro $SP_n(A/o(\tau))$ y $h_{\sum\limits_{\sigma\in G} o(\sigma)/o(\tau)}$ es suprayectivo se verifica que

$$h_{\sum\limits_{\sigma\in G} o(\sigma)/o(\tau)}[h_{o(\tau)}(\tau)] \in \text{centro } SP_n(A/\sum_{\sigma\in G} o(\sigma))$$

luego al ser el diagrama conmutativo se tiene:

$$h_{\sum\limits_{\sigma\in G} o(\sigma)}(\tau) \in \text{centro } S.P_n(A/\sum_{\sigma\in G} o(\sigma)) \quad \text{c.q.d.}$$

<u>Definición 1.5.</u> Sea (V, Φ) un espacio simpléctico sobre A. Llamaremos TRANSVECCION SIMPLECTICA, o simplemente transvección, a toda correspondencia $\sigma : V \longrightarrow V$ tal que existen $a \in V$ y $\lambda \in A$ con $o(a) = A$, tales que:

$$\forall x \in V, \ \sigma(x) = x + \lambda \ \Phi(a, x) \ a$$

a. recibe el nombre de DIRECCION de σ.

<u>Definición 1.6.</u> Diremos que $H \subset V$ es un HIPERPLANO de V si y sólo si existe $\rho \in V^*$ tal que:

$$h \in H \Longleftrightarrow \rho(h) = 0$$

<u>Proposición 1.7</u>. Toda transvección de (V, Φ) es un elemento de $I(V, \Phi) = SP_n(A)$.

<u>Demostración</u>. Sea σ una transvección de dirección a $\sigma(x) = x + \lambda\ \Phi\ (a,x).\ a$ con $o(a) = A$. Veamos en primer lugar que $\sigma \in Aut_A(V)$.

En efecto: Si $\lambda = 0$ es trivial. Supongamos entonces que $\lambda \neq 0$. Trivialmente σ es un automorfismo de A-módulos. Sea $B = \{v_1\ v_2,..,v_n\}$ una base de V. Si identificamos x con sus coordenados respecto de la base B se tiene que

$$(x).\ M_\sigma = (x) - \lambda(x).\ M_\Phi.\ (a^t).\ (a)$$

luego si llamamos N a la matriz $M_\Phi.(a)^t.\ (a)$. e I a la matriz identidad, se verifica que $\forall x \in V$ $(x).\ M_\sigma = (x)\ (I - \lambda N)$. Por tanto $M_\sigma = I - \lambda N$ y si denotamos por

$$N.\begin{bmatrix} i_1 \dots i_r \\ j_1 \dots j_r \end{bmatrix}$$

al menor de N obtenido con las filas $i_1,..i_r$ y las columnas $j_1 \dots j_r$ de la matriz N se tiene que.

$$\det(M_\sigma) = 1 - \left[\lambda\ \Sigma\, n_{ii} - \lambda^2 \sum_{i>j} N \begin{bmatrix} i & j \\ i & j \end{bmatrix} + \dots + \det(N).\lambda^n\right]$$

siendo $N = (n_{ij})$.

Pero, si denotamos por $J_i(M)$ al ideal engendrado por los menores de orden i de la matriz M, para todo i se verifica que

$J_i(N) \subset J_i(M_\Phi) \cdot J_i[(a^t).(a)]$ [10] y $J_r[(a^t).(a)] = 0$

$\forall r > 1 \Longrightarrow J_r(N) = 0 \quad \forall r > 1 \Longrightarrow N \begin{bmatrix} i_1 \ldots i_r \\ i_1 \ldots i_r \end{bmatrix} = 0, \ \forall\, i_1 > i_2 > \ldots > i_r \ \forall\, r > 1.$

Además si $M_\Phi = (m_{ij})$ se tiene que:

$$n_{ii} = \sum_j m_{ij}\, a_j\, a_i \Longrightarrow \sum n_{ii} = \sum_i \sum_j m_{ij}\, a_j \cdot a_i =$$

$$= \sum_{i<j} a_i \cdot a_j (m_{ij} + m_{ji}) = 0$$

ya que M_Φ es una matriz hemisimétrica.

Por tanto $\det.(M_\sigma) = 1$ y σ es un automorfismo de V.

Trivialmente se comprueba que σ es compatible con la forma bilineal Φ

c.q.d.

Proposición 1.8. Sea $\sigma \in I(V,\Phi)$ una transvección $\sigma(x) = x + \lambda\, \Phi(a,x)\, a$ con $o(a) = A$. Entonces existe un hiperplano H de V tal que:

(a) Los únicos vectores invariantes por σ son los de H.

(b) $\forall\, x \in V$, $\sigma(x) - x \in H$.

(c) $o(\sigma) \subset o(\lambda)$.

Demostración

(a) Por definición de hiperplano, $H = \{x \in V$ tales que $d_\Phi(\lambda\, a)(x) = o\}$ es un hiperplano, luego

$$\forall h \in H,\ \sigma(h) = h + \lambda\,\Phi(a,h)\,a = h + \Phi(\lambda a,\ h)\ a = h$$

Por otra parte, sea $x \in V$ tal que $\sigma(x) = x$. Entonces $\lambda\ \Phi\ (a,x)\ a = o$ y como por hipótesis $o(a) = A$, identificando a con sus coordenadas respecto de la base $B = \{v_1 \ldots v_n\}$ de V, $(a_1, \ldots, a_n)$ engendran A y por tanto existen $\lambda_i \in A$ tales que $\lambda_1\ a_1 + - + \lambda_n\ a_n = 1$. Luego si denotamos por $b = \lambda\,\Phi\,(a,\ x)$ se tiene

$$ba_1 = ba_2 = \ldots = ba_n = 0$$

con lo que

$$b = b.1 = b(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n\ a_n) = \lambda_1(ba_1) + \ldots + \lambda_n\,(ba_n) = 0 \Longrightarrow b = 0$$

Por tanto $d_\Phi(\lambda\ a)\ (x) = o$ y $x \in H$.

(b) Veamos que $d_\Phi(\lambda\ a)\ [\sigma(x) - x] = o$. En efecto:

$$d_\Phi(\lambda\ a)[\sigma(x) - x] = d_\Phi(\lambda\ a)\ [\lambda\ \Phi\ (a,x)\ a] = \lambda\,\Phi\,(a\ x)\ d_\Phi(\lambda\ a)\ (a) =$$

$$= \lambda^2\,\Phi\,(a\ x).\ \Phi(a,\ a) = 0 \Longrightarrow \sigma(x) - x \in H$$

(c) Veamos que $h_{o(\lambda)}(\sigma) \in$ centro $SP_n(A/_{o(\lambda)})$. En efecto: Respecto de la base $B = \{v_1 \ldots v_n\}$ de V, $M_{h_{o(\lambda)}} = M_\sigma(\mathrm{mod.}\ o(\lambda))$. Como por otra parte $M_\sigma = I - \lambda N$, $M_{h_{o(\lambda)}} = I\ (\mathrm{mod.}\ o(\lambda))$. Por tanto $h_{o(\lambda)} = 1_{SP_n(A/_{o(\lambda)})}$ y por definición de $o(\sigma)$ es $o(\sigma) \subset o(\lambda)$

§ - 2. SUBGRUPOS DE CONGRUENCIAS EN $SP_n(A)$.

Definiciones 2.1.

2.1.1. Llamaremos SUBGRUPO GENERAL DE CONGRUENCIAS módulo J de $SP_n(A)$ -y lo denotaremos por $G\ SP_n(A, J)$- al subgrupo h_J^{-1} (centro $SP_n(A/_J)$).

2.1.2. Llamaremos SUBGRUPO ESPECIAL DE CONGRUENCIAS módulo J de $SP_n(A)$ -y lo denotaremos por $ESP_n(A)$- al subgrupo $\mathrm{Ker}\ h_J$.

Notas 2.2. Trivialmente se verifica que:

(a) $G\ SP_n(A, A) = ESP_n(A, A) = SP_n(A)$

(b) $GSP_n(A, o)$ = centro $SP_n(A)$

(c) $E.SP_n(A, o) = 1_{SP_n(A)}$

Proposición 2.3. Se verifica que:

centro $SP_n(A) = \{\varepsilon.1_{SP_n(A)} \mid \varepsilon^2 = 1,\ \varepsilon \in A\}$.

Demostración. Evidentemente si $\sigma \in SP_n(A)$ es un elemento cuya matriz respecto de una base $B = \{v_1\ v_2 \ldots v_n\}$ de V es de la forma

$$M_\sigma = \begin{bmatrix} \varepsilon & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon \end{bmatrix}$$

con $\varepsilon^2 = 1$, $\forall \gamma \in SP_n(A)$, $\gamma . \sigma = \sigma . \gamma$ y $\sigma \in$ centro $SP_n(A)$. Veamos pues que todo elemento de centro $SP_n(A)$ es de esta forma.

Sea $\gamma \in$ centro $SP_n(A)$. y sea τ una transvección de V definida por $\tau(x) = x + \Phi(a\ x)a$ con $o(a) = A$. En particular:

$$\gamma . \tau = \tau . \gamma \iff \gamma \tau \gamma^{-1} = \tau \iff \forall x \in V, \quad \tau(x) = \gamma \tau \gamma^{-1}(x) =$$

$$= \gamma[\gamma^{-1}(x) + \Phi(a, \gamma^{-1}(x))\ a] = x + \Phi(a, \gamma^{-1}(x)) . \gamma(a) \iff$$

$$\iff \forall x \in V \text{ es } \Phi(a, x)\ a = \Phi(\gamma(a), x). \gamma(a). \quad (1)$$

Analicemos la igualdad (1). Identificando cada elemento de V con sus coordenadas respecto de la base B, $o(a) = A$ implica que existen $\lambda_i \in A$ tales que $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 1$ y podemos considerar el sistema:

$$M_\gamma . M_\Phi . (x)^t = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^t$$

que posee solución ya que $\det(M_\gamma)$ y $\det(M_\Phi)$ son unidades. Por tanto podemos encontrar un vector $\overline{x}$ tal que

$$1 = (a). M_\gamma . M_\Phi . (\overline{x})^t = \Phi(\gamma(a), \overline{x})$$

Entonces $\Phi(a, \overline{x}) . a = \gamma(a)$ y si llamamos $\varepsilon_0 = \Phi(a, \overline{x})$ se tiene que

$$\gamma(a) = \varepsilon_0\ a$$

Sustituyendo este resultado en (1) resulta que

$$\forall x \in V, \ \Phi(a,x). a = \Phi(\gamma(a), x). \varepsilon_0 a$$

luego

$$[\Phi(a, x) - \varepsilon_0\, \Phi(\gamma(a), x)]\, a = o$$

pero al ser $o(a) = A$ razonando igual que en la demostración de II.1.8. se tiene que

$$\forall x \in V, \quad \Phi(a, x) - \varepsilon_0\, \Phi(\gamma(a), x) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (a).\, M_\Phi.(x)^T - (a).\, M_\gamma \,.\, M_\Phi \,.\, \varepsilon_0.(x)^T = o, \quad \forall x \in V \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (a)(M_\Phi - \varepsilon_0.M_\gamma \,.\, M_\Phi) = (o)$$

como $o(a) = A$, $a \neq o$ y por tanto

$$\det(M_\Phi - \varepsilon_0 .\, M_\gamma \,.\, M_\Phi) = o \Longrightarrow \det(M_\Phi).\ \det(I - \varepsilon_0\, M_\gamma) = o$$ y al ser

$\det(M_\Phi)$ una unidad se tiene que

$$\det(I - \varepsilon_0\, M_\gamma) = o \Longrightarrow 1 - [\varepsilon_0\, \Sigma M_\gamma[{}^{i}_{i}] - \varepsilon_0^2 \sum_{i<j} M_\gamma\, [{}^{ij}_{ij}] + \ldots + \varepsilon_0^n \det(M_\gamma)] = o$$

luego si llamamos

$$\mu = [\Sigma M_\gamma[{}^{i}_{i}] + \ldots + \varepsilon_0^{n-1} \det(M_\gamma)] .$$

se verifica que

$$1 - \varepsilon_0\, \mu = o$$

luego ε_0 es una unidad de A que en principio depende de a.

Sea $B = \{v_1, v_2 \ldots v_n\}$ una base de V. Entonces $o(v_i) = A$ $\forall i = 1,2\ldots n$. Consideremos las transvecciones:

$$\tau_i(x) = x + \Phi\,(v_i,\, x)\, v_i \quad \forall i$$

Por un razonamiento análogo al anterior, existen unas unidades $\{\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq n}$ tales que

$$\gamma(v_i) = \varepsilon_i .\, v_i \quad \forall i \quad 1 \leq i \leq n.$$

Además $\forall\, i, j,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n,\ i \neq j$, se verifica que $o(v_i + v_j) = A$

Luego, considerando los transvecciones

$$\tau_{ij}(x) = x + \Phi(v_i + v_j, x).(v_i + v_j)$$

por el mismo razonamiento, existen unidades $\{\varepsilon_{ij}\}_{i \neq j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ siendo

$$\gamma(v_i + v_j) = \varepsilon_{ij}(v_i + v_j)$$

Pero como γ es homomorfismo

$$\gamma(v_i + v_j) = \gamma(v_i) + \gamma(v_j) = \varepsilon_i .\, v_i + \varepsilon_j .\, v_j = \varepsilon_{ij}\,(v_i + v_j) = \varepsilon_{ij}\, v_i + \varepsilon_{ij}\, v_j$$

luego

$$(\varepsilon_i - \varepsilon_{ij})v_i + (\varepsilon_j - \varepsilon_{ij})\, v_j = o \Longrightarrow \varepsilon_i = \varepsilon_j = \varepsilon_{ij}$$

Por tanto

$$\forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ \varepsilon_i = \varepsilon \Longrightarrow \gamma(v_j) = \varepsilon v_j$$

y al ser γ homomorfismo

$$\forall x \in V, \quad \gamma(x) = \varepsilon x$$

con el mismo ε.

Además, por ser γ automorfismo, se tiene

$$\Phi(x,y) = \Phi(\gamma(x),\ \gamma(y)) = \Phi(\varepsilon\ x,\ \varepsilon\ y) = \varepsilon^2\ \Phi\ (x,\ y).$$

y como existen $x,\ y \in V$ con $\Phi(x,\ y) = 1$, se deduce que $\varepsilon^2 = 1$. Luego la matriz de γ respecto de la base B es de la forma

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon \end{bmatrix}$$

con ε unidad de A y $\varepsilon^2 = 1$. (c.q.d.)

<u>Corolario 2.4.</u> Las condiciones siguientes son equivalentes:

i) Centro $SP_n(A) = \{1, -1\}$

ii) Spec A es conexo.

<u>Demostración.</u> Como Spec A es conexo si y sólo si los únicos idempotentes de A son 1 y -1, de la proposición anterior se sigue trivialmente el corolario.

<u>Corolario 2.5.</u> Si llamamos Id.(A) al grupo multiplicativo de los elementos

idempotentes de A, se verifica que:

$$GSP_n(A, J)/_{ESP_n(A, J)} \simeq Id.(A/_J).$$

<u>Demostración.</u> Resuelta de aplicar el primer teorema de isomorfía al homorfismo de grupos:

$$h_J : h^{-1}[\,\text{Centro}\ SP_n(A/_J)\,] \longrightarrow \text{centro}\ SP_n(A/_J).$$

<u>Corolario 2.6.</u> Para toda transvección τ, $\tau(x) = x + \lambda\ \Phi(a,x).\ a$ con $o(a) = A$, se verifica que $o(\tau) = o(\lambda)$.

<u>Demostración.</u> Como consecuencia de II,2.3. se verifica

$$(1) \equiv h_J(\tau) \in \text{centro}\ SP_n(A/_J) \Longrightarrow \exists\, \varepsilon \in A,\ \varepsilon^2 = 1\ M_\tau \equiv \varepsilon.I(\text{mod } J)$$

Por otra parte, usando las notaciones de, II.1.7, podemos escribir que

$$M_\tau = I - \lambda N \quad \text{con} \quad N = M_\Phi.(a)^t.\ (a)$$

luego

$$(1) \Longrightarrow I - \lambda N \equiv \varepsilon.I(\text{mod } J) \Longrightarrow (1-\varepsilon).I \equiv \lambda.N\ (\text{mod } J)$$

Ahora bien, como $o(a) = A$, el razonamiento de la proposición II,1.7 garantiza la existencia de $x \in V$ tal que $\Phi(a,x) = 1$. Entonces

$$(x).N = (x).M_\Phi(a)^t.\ (a) = a$$

luego

$$(1) \Longrightarrow (1-\varepsilon).(x).I \equiv \lambda.\ (x).N = \lambda\ .\ a (\text{mod. } J) \quad (2)$$

pero

$$(x).M_\Phi(a)^t = 1 \Longrightarrow (a).M_\Phi^t\ (x)^t = 1 \Longrightarrow (a).M_\Phi\ (x)^t = -1.$$

ya que M_Φ es hemisimétrica. Por tanto, multiplicando los dos miembros de (2) por $M_\Phi.\ (x)^t$ resulta:

$$(1-\varepsilon).\ (x).\ M_\Phi(x)^t \equiv \lambda.(a).M_\Phi.(x)^t (\text{mod. } J).$$

Como $(x).M_\Phi.(x)^t = \Phi(x, x) = o$ y $(a).M_\Phi(x)^t = -1$ se tiene que:

$$-\lambda \equiv o(\text{mod. } J) \Longrightarrow \lambda \in J \Longrightarrow o(\lambda) \subset J$$

Por tanto hemos probado que para todo J ideal de A, $h_J(\tau) \subset \text{centro } SP_n(A/_J) \Longrightarrow o(\lambda) \subset J$ y en particular tomando $J = o(\tau)$. se tiene que

$$o(\lambda) \subset o(\tau).\ (\text{c.q.d})$$

Nota 2.7. Obsérvese que para una transvección simpléctica

$$\tau(x) = x + \lambda.\ \Phi(a,x).\ a \quad \text{con } o(a) = A$$

aunque λ y a no están univocamente determinados si lo está $o(\lambda)$.

Si λ es un no divisor de cero de A, (μ, b) define la misma transvección que (λ, a) si y solo si $a = \varepsilon.\ b$ siendo ε unidad de A tal que $\mu = \lambda.\varepsilon^2$.

En efecto: Si (λ,a), (μ,b) definen la misma transvección τ, $o(\lambda) = o(\mu) = o(\tau)$ y además

$$(1) \qquad \lambda\, \Phi(a,x)\cdot a = \mu\cdot\Phi\,(b,x)\, b$$

Como $o(\lambda) = o(\mu) \Longrightarrow \begin{cases} \mu = \lambda t \\ \lambda = \mu h \end{cases}$ y al ser λ no divisor de cero $\Longrightarrow \lambda = \lambda\cdot t \cdot h \Longrightarrow \lambda\cdot(1-th) = o \Longrightarrow t\cdot h = 1 \Longrightarrow t$ y h son unidades en A. Entonces

$$(1) \Longleftrightarrow \Phi(a,x)a = \Phi(b,x)\cdot b$$

Por otra parte como existe $\overline{x} \in V$ tal que $\Phi(a,\overline{x}) = 1$ se tiene que $a = t\cdot\Phi(b,x)\cdot b$ Luego para todo $x \in V$, $\Phi(a,x)\cdot t\cdot\Phi(b,\overline{x})\cdot b = t\cdot\Phi(b,x)\cdot b$ y al ser t unidad y $o(b) = A$.

$$\Phi(a,x)\cdot\Phi(b,\overline{x}) = \Phi(b,x) \quad \forall\, x \in V$$

Eligiendo un $y \in V$ tal que $\Phi(b,y) = 1$ se tiene

$$\Phi(a,y)\cdot\Phi\,(b,\overline{x}) = 1.$$

luego $\Phi(b,\overline{x})$ es una unidad y

$$a = \varepsilon\cdot b \quad \text{con} \quad \varepsilon = t\cdot\Phi(b,\overline{x}),\ \varepsilon \text{ unidad de } A \text{ y } \mu = \lambda\cdot\varepsilon^2$$

Recíprocamente, si $a = \varepsilon\cdot b$, $\mu = \lambda\cdot\varepsilon^2$ y ε unidad de A, trivialmente.

$$\forall\, x \in V\ \cdot\lambda\cdot\Phi\,(a,x)\ a = \mu\cdot\Phi(b,x)\cdot b$$

lo cual prueba la afirmación.

<u>Teorema 2.8</u> Para todo β-Anillo, $SP_n(A)$ está generado por las transvecciones simplécticas.

Para demostrar el teorema usaremos el siguiente lema:

<u>Lema 2.9</u> Sea G un diagrama de grupos sobre un esquema de diagrama

$$\Sigma = (I,M,\alpha).$$

Sea S_i un sistema de generadores de G_i $\forall i \in I$ de modo que $\forall m \in M$, $\alpha(m) = (i,j)$, $f_{ij}(S_i) \subset S_j$. Entonces considerando el diagrama de conjuntos $\mathcal{J}$ definido sobre el esquema Σ por $\{S_i, f_{ij}|_{S_i}\}$, se verifica que $\varprojlim \mathcal{J}$ es un sistema de generadores de $\varprojlim G$.

Demostración. Consideremos $\forall i \in I$ el grupo libre L_i generado por el conjunto S_i y $\forall m \in M$, $\alpha(m) = (i,j)$ los homomorfismos $\overline{f}_{ij} : L_i \longrightarrow L_j$ inducidos por los $f_{ij}|_{S_i}$.

Tenemos así un diagrama L de grupos libres sobre el esquema Σ y trivialmente $L = \varprojlim L$ es el grupo libre generado por $S = \varprojlim \mathcal{J}$.

Además como cada S_i es sistema de generadores de G_i, existe un epistemorfismo.

$$e_i : L_i \longrightarrow G_i$$

tal que $\forall m \in M$, $\alpha(m) = (i,j)$, todos los diagramas

$$\begin{tikzcd} L_i \arrow[r, "e_i"] \arrow[d, "\overline{f}_{ij}"'] & G_i \arrow[d, "f_{ij}"] \\ L_j \arrow[r, "e_j"] & G_j \end{tikzcd}$$

son conmutativos. Entonces los e_i definen un morfismo de diagrama sobre Σ

$$\overline{e} : L \longrightarrow G$$

cuyo límite es un homomorfismo

$$\varprojlim \bar{e} : L \longrightarrow G$$

que trivialmente es sobre y transforma $\varprojlim J$ en $\varprojlim G$. c.q.d.

Demostración del Teorema. Sabemos que $SP_n(A)$ es el límite proyectivo del diagrama de grupos $\{SP_n(A)\}_{p \in \mathrm{Spec}\, A}$ Fernández Bermejo [10]. Por otra parte, si para todo $p \in \mathrm{Spec}\, A$ designamos por T_p el conjunto de transvecciones simplécticas de $SP_n(A_p)$ se verifica que:

1) $\forall p \in \mathrm{Spec}.\, A$, T_p es un sistema de generadores de $SP_n(A_p)$ puesto que A_p es un anillo local y se puede aplicar el teorema 2 de Klingemberg [12].

2) Si $p \subset q$ consideremos el homomorfismo de grupos.

$$g_{p,q} : SP_n(A_q) \longrightarrow SP_n(A_p)$$

inducido por $i_{p,q} : A_q \longrightarrow A_p$ homomorfismo canónico. Se verifica que $g_{p,q}(T_q) \subset T_p$ ya que por la construcción de $g_{p,q}$ la transvección de $SP_n(A_q)$ definida por (λ, a) se transforma en la de $SP_n(A_p)$ definida por $(i_{p,q}(\lambda), \psi_{p,q}(a))$ siendo $\psi_{p,q} : V^q \longrightarrow V^p$ el homorfismo canónico.

Como consecuencia $SP_n(A) = \varprojlim \{SP_n(A_p)\}$ está generado por el conjunto $T = \varprojlim T_p$. Ahora bien, si T^* es el conjunto de transvecciones de $SP_n(A)$, las aplicaciones

$$\bar{T}_p : T^* \longrightarrow T_p$$

definidas asociando a la transvección de $SP_n(A)$ dada por (λ, a) la transvección de $SP_n(A_p)$ definida por $(i_p(\lambda), \psi_p(a))$, donde $i_p : A \longrightarrow A_p$, $\psi_p : V \longrightarrow V^p$ son los epimorfismos naturales, son una familia conpatible con el diagrama $\{T_p\}_{p \in \mathrm{Spec}\ A}$. Luego inducen una aplicación

$$i : T^* \longrightarrow T$$

que trivialmente es un isomorfismo. Por tanto T^* es un sistema de generadores de $SP_n(A)$ c.q.d.