CAPITULO I CATEGORIA GENERAL DE ESPACIOS SIMPLECTICOS

En todo este capítulo, y salvo mención de lo contrario, A representará un anillo conmutativo y con elemento unidad de característica distinta de 2, V un A-módulo libre de tipo finito y $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ Una base de V. Así mismo usaremos resultados de Bourbaki, [6], [7], Fernández - Bermejo [10].

§ - 1. ESPACIO SIMPLECTICO - SUBESPACIOS

Definición 1.1. Una forma bilineal Φ definida sobre V con valores en A se dice HEMISIMETRICA sí y solo sí $\forall\, x \in V,\ \Phi(x,x) = 0$

Nota 1.2. Fernández - Bermejo [10]

(i) Si V^* es el módulo dual de V,Φ subordina dos homorfismos Φ_I, Φ_D de V en V^* definidos por

$$\Phi_I(y)(x) = \Phi(y, x)$$

$$\Phi_D(y)(x) = \Phi(x, y)$$

pero como usaremos formas bilineales hemisimétricas, $\Phi_D = -\Phi_I$. Por tanto, consideraremos asociado a Φ un único homomorfismo de V en V^*, que denotaremos por d_Φ, definido por:

$$d_\Phi(y)(x) = \Phi(x, y).$$

(ii) Una forma bilineal Φ se dice NO DEGENERADA si el homomorfismo

$$d_\Phi : V \longrightarrow V^*$$

es un isomorfismo.

(iii) Si B es una base de V, Φ queda determinada conociendo los valores de $\Phi(u_i, u_j)$ $i,j = 1,2,\ldots n$.. A la matriz $M_{\Phi,B} = (\Phi(u_i, u_j))$ la llamaremos matriz de Φ respecto de la base B.

(iv) Φ hemisimétrica equivale a que la matriz de Φ respecto de una base cualquiera de V es hemisimétrica.

(v) La matriz del homomorfismo $d_\Phi : V \longrightarrow V^*$ respecto de las bases B y su dual B^* es la matriz $M_{\Phi,B}$.

Definiciones 1.3. Sea $M \in M_{mxn}$.

(i) Llamaremos RANGO de M. $(R(M))$ al máximo $i \in \mathbb{N}$ tal que el ideal engendrado por los menores de orden i de la matriz es distinto a cero.

(ii) Llamaremos RANGO REAL de M $(R^*(M))$ al máximo $i \in \mathbb{N}$ tal que el anulador del ideal engendrado por los menores de orden i de la matriz es cero.

(iii) Llamaremos RANGO UNITARIO de M $(R_u(M)$ al máximo $i \in \mathbb{N}$ tal que el ideal engendrado por los menores de orden i de la matriz es el anillo.

Definiciones 1.4. LLamaremos RANGO, RANGO REAL y RANGO UNITARIO de una forma bilineal Φ al rango, rango real y rango unitario de la matriz $M_{\Phi B}$. Estos rangos son independientes de la base elegida en V. [10].

Consecuencia 1.5. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) Φ es no degenerada

(ii) $R_u(\Phi) = n$

(iii) det. $(M_{\Phi, B}) = \varepsilon$, ε unidad de A.

Demostración

Φ no degenerada $\Longleftrightarrow$ d_Φ isomorfismo $\Longleftrightarrow$ $R_u(\Phi) = n$ $\Longleftrightarrow$ det $(M_{\Phi, B}) = \varepsilon$

Definición 1.6. Llamaremos ESPACIO SIMPLECTICO sobre A a un par (V, Φ) tal que:

(i) V es un A-módulo libre de tipo finito.

(ii) Φ es una forma bilineal hemisimétrica no degenerada sobre V con valores en A.

Proposición 1.7. Sea (V, Φ) un espacio simpléctico sobre A con $V \simeq A^n$. Sea B otro anillo conmutativo con elemento unidad de característica distinta de 2 y sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo unitario de anillos. Existe una única forma bilineal hemisimétrica Φ' sobre $V' \simeq B^n$ con valores en B tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[r, "\bar{f} \times \bar{f}"] \arrow[d, "\Phi"'] & (V \otimes_A B) \times (V \otimes_A B) = V' \times V' \arrow[dl, "\Phi'"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

es conmutativo siendo $\overline{f}$ la aplicación canónica definida por $\overline{f}(x) = x \otimes 1 = f^n(x)$.

Demostración.- $\overline{f}$ es un homomorfismo de grupos abelianos y un homomorfismo del A-módulo V en el B-módulo V' en la categoría general de módulos. No es un isomorfismo pero su imagen contiene una base de V' como B-módulo ya que si $B^* = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base de V, $B' = \{\overline{f}(e_1), \ldots, \overline{f}(e_n)\}$ es una base de V' como B-módulo pues si M es la matriz de coordenadas de los vectores de B^*, $\det.(M) = \varepsilon$ donde ε es unidad de A y la matriz $f(M)$ de coordenadas de los vectores de B' verifica que $\det.(f(M)) = f(\varepsilon)$ unidad en B'. Por tanto, Φ', si existe, está univocamente determinada por la conmutatividad del diagrama

$$\Phi'(\overline{f}(e_i), \overline{f}(e_j)) = f \cdot \Phi(e_i, e_j).$$

El proceso de unicidad da entonces la existencia sin más que construir Φ' de matriz $M_{\Phi', B'} = (a'_{ij})$ con $a'_{ij} = f(a_{ij})$ $\forall i,j$ donde (a_{ij}) es la matriz M_{Φ,B^*} de Φ respecto de la base B^*.

Notas 1.8.

1.- Si J es un ideal de A, $n_J : A \longrightarrow A/_J$ el epimorfismo natural, $V_J = (A/_J)^n = \{(x_1 + J, \ldots, x_n + J) | x_i \in A\}$ se puede dotar de manera natural de estructura de $A/_J$ -módulo. V_J es, por tanto, un $A/_J$ -módulo libre de tipo finito y la forma bilineal Φ induce una forma bilineal $\Phi_J : V_J \times V_J \longrightarrow A/_J$ definida de la manera siguiente: si denotamos por N_J al homomorfismo de $A^n \longrightarrow V_J$ inducido por n_J y si denotamos por $\overline{\underset{\sim}{x}} = N_J(x)$, $\overline{\underset{\sim}{y}} = N_J(y)$

$$\Phi_J\,(\underset{\sim}{\bar{x}},\ \underset{\sim}{\bar{y}}) = \Phi(x,\ y) + J$$

En esta situación $(V_J,\ \Phi_J)$ es un espacio simpléctico sobre $A/_J$.

2.- En particular, si m es un ideal maximal de A,$(V_m,\ \Phi_m)$ es un espacio simpléctico sobre el cuerpo $A/_m$ en el sentido clásico de Artin [2], Dieudonné [9].

3.- Si p es un ideal primo de A y $f : A \longrightarrow A_p$ (A_p anillo de cocientes de A por P) es el homomorfismo canónico definido por $f(a) = a/_1$, llamando $V^P = (A_p)^n$ y Φ^P a la forma bilineal inducida por Φ y definida por: $\Phi^P : V^P \times V^P \longrightarrow A_p$.

$$\Phi^P(x, y) = \sum_{i,j} \frac{a_{ij}}{1} . x_i . x_j = (x) . M_\Phi P . (y),\quad M_\Phi = (a_{ij}),\quad M_\Phi P = \left(\frac{a_{ij}}{1}\right)$$

el par $(V^P,\ \Phi^P)$ es un espacio simpléctico en el sentido de Klingenberg [12]

<u>Nota 1.9</u> Sea (V, Φ) un espacio simpléctico, U un submódulo de V. Φ induce una forma bilineal sobre U, $\Phi|_U : U \times U \longrightarrow A$ a la que se puede asociar un homomorfismo $d_{(\Phi|_U)} : U \longrightarrow U^*$ definido por:

$$d_{(\Phi|_U)}(u)(u') = \Phi(u',\ u)$$

Además el diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "d_{(\Phi|_U)}"] \arrow[d, "i"'] & U^* \\ V \arrow[r, "d_\Phi"] & V^* \arrow[u, "i^*"'] \end{tikzcd}$$

con i la inclusión e i^* el homomorfismo traspuesto de i, es un diagrama conmutativo.

Definición 1.10. Sea (V, Φ) un espacio simpléctico, U un submódulo de V. Diremos que U es un SUBESPACIO SIMPLECTICO de (V, Φ) sí y solo sí:

1.- U es libre

2.- U es sumando directo de V (en suma directa interna)

3.- Im. $d_{(\Phi|_U)}$ es sumando directo de U^*

Si además U verifica la condición adicional

4.- $d_{(\Phi|_U)}$ es inyectiva

entonces diremos que U es un subespacio NO ISOTROPICO de (V, Φ).

En lo sucesivo -y por abuso de lenguaje- cuando no se presente ambigüedad, al espacio simpléctico (V, Φ) lo denotaremos simplemente por V.

Proposición 1.11. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) U es subespacio no isotrópico de V.

(ii) $(U, \Phi|_U)$ es un espacio simpléctico.

Demostración

(a) $\Longrightarrow$ (b). En efecto: Por (4) $d_{(\Phi|_U)}$ es inyectiva y por (3) im $d_{\Phi|U}$ es submódulo libre sumando directo de U^* con $\dim U = \dim.$ Im. $d_{(\Phi|_U)}$. Como $\dim U = \dim U^*$ resulta que $d_{(\Phi|_U)}$ es isomorfismo y $(U, \Phi|_U)$ es un espacio simpléctico.

(b) $\Longrightarrow$ (a). En efecto: Por hipótesis U es libre y $d_{(\Phi|_U)}$ es isomorfismo; luego se verifican. (1), (3) y (4).

Por otra parte, si construimos

$$\tau_\Phi : V \longrightarrow U^*$$

Definida por:

$$\tau_\Phi(v) = d_\Phi(v)|_U \quad \forall\, v \in V$$

τ_Φ es sobre ya que $\tau_{\Phi|_U} = d_{(\Phi|_U)}$ y $U^* = \mathrm{im}\, d_{(\Phi|_U)} = \mathrm{im}\,(\tau_{\Phi|_U}) \subset \mathrm{im}\, \tau_\Phi$. Como U^* es libre es proyectivo, luego es sumando directo de U. Entonces tenemos la situación

$$V \xrightarrow{\tau_\Phi} U^* \xrightarrow[\sim]{d_{(\Phi|_U)}} U$$

para probar que U es sumando directo de V respecto de la inclusión, hemos de probar que la composición de $d_{(\Phi|_U)}$ con la retracción de τ_Φ es precisamente la inclusión, o lo que es lo mismo, que $1_U = d^{-1}_{(\Phi|_U)} \cdot \tau_{\Phi|_U}$. Pero ésto es cierto pues $\tau_{\Phi|_U} = d_{(\Phi|_U)}$

§ - 2 ORTOGONALIDAD.

Como es habitual, llamaremos ω_Φ a la relación de ortogonalidad respecto de Φ en el retículo de los submódulos de V. Las propiedades de ω_Φ en general, son sobradamente conocidas pero en nuestro caso se presentan algunas características interesantes que detallaremos a continuación.

Lema 2.1. Si M es un A-módulo proyectivo de rango constante, M^* es un A-módulo proyectivo de rango constante y de la misma dimensión que M.

Demostración. Si M es proyectivo de tipo finito es sumando directo de un módulo libre de tipo finito; luego si $\{m_1, m_2 \ldots m_r\}$ es un sistema de generadores de M y $\{e_1, e_2, \ldots e_r\}$ una base de A^r, podemos definir el homomorfismo sobre $\rho : A^r \longrightarrow M$, $\rho(e_i) = m_i$ y la sucesión:

$$0 \longrightarrow \ker \rho \longrightarrow A^r \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

es exacta y escindida. Por tanto $M \oplus Q \simeq L$ siendo L libre de tipo finito; luego $M^* \oplus Q^* \simeq L^*$ y al ser L^* libre M^* es proyectivo.

Además, como $A^r \simeq M \oplus \ker \rho$ existe $\Pi : A^r \longrightarrow \ker \rho$ sección de la inclusión. Entonces podemos considerar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A^r \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\Pi"'] & A^r \arrow[r, "\rho"] & M \arrow[r] & 0 \\
& \ker \rho \arrow[u, "i"'] & &
\end{tikzcd}$$

con lo que la sucesión

$$A^r \longrightarrow A^r \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\rho} 0$$

es exacta y, por tanto, M es un A-módulo de presentación finita; luego si S es una parte multiplicativamente cerrada de A y N es un A-módulo cualquiera:

$$\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}\ (S^{-1}M,\ S^{-1}N) \simeq S^{-1}\ \mathrm{Hom}_A\ (M,N).$$

Entonces, $\forall$ $p \in \mathrm{Spec}\ A$ $M_p^* \simeq (M^*)_p$ y como M_p es un A_p-módulo libre

$$M_p \simeq M_p^* \simeq (M^*)_p$$

Por tanto, si M es de rango constante M* es de rango constante y sus dimen siones son iguales.

Lema 2.2. Sea (V, Φ) un espacio simpléctico, U un sumando directo interno de V de rango constante. Entonces se verifica que:

(a) La correspondencia.

$$\tau_\Phi\colon V \longrightarrow U^*$$

definida por $\tau_\Phi\ (v) = d_\Phi(v)|_U$ es un homomorfismo sobre

(b) $\mathrm{Ker}\ \tau_\Phi = \omega_\Phi\ (U)$

Demostración

(a) τ_Φ es trivialmente un homomorfismo. τ_Φ es sobre pues podemos construir el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[dr, "f\pi"'] & U \arrow[l, shift left, "i"] \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

con i la inclusión y $\pi . i = 1_U$ por ser U sumando directo de V respecto de la inclusión. Entonces $f . \pi \in V^*$ y al ser d_Φ isomorfismo existe $\nu \in V$ con $d_\Phi(\nu) = f . \pi$ y $\tau_\Phi(\nu) = d_\Phi(\nu)|_U = f \circ \pi \circ i = f \circ 1_U = f$

(b) Es trivial de las definiciones de τ_Φ y ω_Φ

Proposición 2.3. Sea (V, Φ) un espacio simpléctico, U un subespacio de V. Se verifica que

(a) $\omega_\Phi(U)$ es un módulo proyectivo de rango constante sumando directo de V y tal que $\dim V = \dim U + \dim. \omega_\Phi(U)$.

(b) $\omega^2_\Phi(U) = U$

(c) $\ker d_{(\Phi|_U)} = U \cap \omega_\Phi(U)$.

Demostración.

(a) Por el lema 2.2 la sucesión

$$0 \longrightarrow \omega_\Phi(U) \longrightarrow V \longrightarrow U^* \longrightarrow 0$$

es exacta -y al ser U^* libre- es escindida, luego $\omega_\Phi(U)$ es proyectivo de rango constante y $\dim V = \dim \omega_\Phi(U) + \dim U^* = \dim \omega_\Phi(U) + \dim U$.

(b) Como $\omega_\Phi(U)$ es proyectivo de rango constante sumando directo de V, $\omega_\Phi(U)^*$ es proyectivo de rango constante y la sucesión

$$0 \longrightarrow \omega_\Phi^2(U) \longrightarrow V \xrightarrow{\tau_\Phi} \omega_\Phi(U)^* \longrightarrow 0$$

con $\tau_\Phi(v) = d_\Phi(v)|_{\omega_\Phi(U)}$ es exacta y escindida; luego $\omega_\Phi^2(U)$ es proyectivo de rango constante sumando directo de V y $\dim V = \dim.\ \omega_\Phi(U) + \dim \omega_\Phi^2(U)$. Por tanto $\dim U = \dim \omega_\Phi^2(U)$ y al ser $U \subset \omega_\Phi^2(U)$, $U = \omega_\Phi^2(U)$.

(c) Trivial aplicando las definiciones de $d_{(\Phi|U)}$ y $\omega_\Phi(U)$.

<u>Definiciones 2.4.</u>

(1) Diremos que los vectores $x, y \in V$ son ORTOGONALES. sí y solo sí $\Phi(x,y) = 0$.

(2) Si U_1, U_2 son dos partes cualesquiera de V, diremos que U_1 es ORTOGONAL a U_2 cuando todo vector de U_1 es ortogonal a los vectores de U_2.

(3) Sean U, U_1 y U_2 subespacios de V. Diremos que U es SUMA ORTOGONAL de U_1 y U_2 -y se denota por $U = U_1 \perp U_2$- sí y solo sí

(i) $U = U_1 \oplus U_2$ (Suma directa interna).

(ii) U_1 es ortogonal a U_2

<u>Proposición 2.5.</u> Si U es un submódulo libre de V las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) U es subespacio no isotrópico.

(ii) $U \oplus \omega_{\Phi}(U) = V$ ($\oplus$ interna).

(iii) $U \perp \omega_{\Phi}(U) = V$

Demostración

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii). Trivial pues U es ortogonal a $\omega_{\Phi}(U)$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). En efecto: Se verifica que $k = d^{-1}_{(\Phi|U)} . i^* . d_{\Phi}$ es una sección de la inclusión ya que al ser $d_{(\Phi|U)}$ inyectiva $d^{-1}_{(\Phi|U)} . i^* d_{\Phi} i = 1_U$. Veamos que $\mathrm{Ker}\, K = \omega_{\Phi}(U)$. Sea $t \in \omega_{\Phi}(U) \Longrightarrow d^{-1}_{(\Phi|U)} . i^* . d_{\Phi}(t) =$ $= d^{-1}_{(\Phi|U)}\, i^* \Phi(t, -) = d^{-1}_{(\Phi|U)}\, \Phi|_U(t, -) = d^{-1}_{(\Phi|U)}(0) = 0$. Por tanto $t \in \mathrm{Ker}\, K$. Recíprocamente: Sea $h \in \mathrm{Ker}\, K$. $\Longrightarrow K(h) = 0 = d^{-1}_{(\Phi|U)} \Phi|_U(h, -)$ $\Longrightarrow \Phi|_U (h,-) = 0 \Longrightarrow h \in \omega_{\Phi}(U)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). En efecto. Por hipótesis U al libre y sumando directo de V. Veamos que $d_{(\Phi|U)}$ es isomorfismo. Sea $\underline{\alpha} \in U^*$ y consideremos el homomorfismo $0 : \omega_{\Phi}(U) \longrightarrow A$. Sea $\underline{\alpha}' = \underline{\alpha} + 0 \in V^*$. Existe $v \in V$ tal que $\underline{\alpha}' = d_{\Phi}(v)$; por tanto $\forall\, t \in \omega_{\Phi}(U)$, $d_{\Phi}(v)\,(t) = 0$ y $v \in \omega^2_{\Phi}(U) = U$ luego $d_{\Phi|U}$ es sobre. Además $\mathrm{Ker}\, d_{(\Phi|U)} = U \cap \omega_{\Phi}(U) = \{0\}$ con lo que $d_{(\Phi|V)}$ es inyectiva (c.q.d.).

Nota 2.6. Obsérvese que si (V, Φ) es un espacio simpléctico dim V es siempre par pues si $\dim V = 2n + 1$ eligiendo una base cualquiera B de V se tiene que al ser la matriz de Φ hemisimétrica.

$\det (M_{\Phi,B}) = (-1)^{2n+1} \det(M_{\Phi,B}) = - \det(M_{\Phi B})$ y por tanto $\det(M_{\Phi,B}) = 0$ con lo que Φ sería una forma bilineal degenerada.

§ - 3 CATEGORIA GENERAL DE ESPACIOS SIMPLECTICOS

CATEGORIA SIMPLECTICA DE ANILLOS.

Definición 3.1. Sea A la categoría de anillos y homomorfismos unitarios, $\mathcal{B}$ una subcategoría de A. Llamaremos categoría de espacios simplécticos sobre $\mathcal{B}$, y la representaremos por $E.S_{\mathcal{B}}$, a la categoría definida de la manera siguiente:

(1) Los objetos de $E.S_{\mathcal{B}}$ son los pares (V,Φ) donde V es un A-módulo, $A \in obj(\mathcal{B})$, y Φ una forma bilineal hemisimétrica no degenerada de $V \times V \longrightarrow A$.

(2) Dados dos objetos (V, Φ), $(V', \Phi') \in obj(E.S_{\mathcal{B}})$, un morfismo de (V,Φ) en (V', Φ') es un par (ρ, ψ) tal que:

(2.1) $\rho : A \longrightarrow A'$ es un homomorfismo de anillos en $\mathcal{B}$.

(2.2) $\psi : V \longrightarrow V'$ es un homomorfismo de grupos abelianos tal que $\forall\, \lambda \in A$, $\forall\, v \in V$, $\psi(\lambda\, v) = \rho(\lambda)\, \psi(v)$.

(2.3) $\forall\, v, w \in V$. $\Phi'(\psi(v), \psi(w)) = \rho \circ \Phi\, (v,w)$.

(3) La composición de morfismo se define como es usual por $(\rho', \psi') \circ (\rho, \psi) = (\rho' \circ \rho, \psi' \circ \psi)$.

Se comprueba que $E.S_{\mathcal{B}}$ es en efecto una categoría y se observará que la categoría $E.S_{\mathcal{B}}$ es una subcategoría no completa de la categoría general de módulos.

En el caso en que $\mathcal{B} = A$ a $ES_A = E.S$ se le llama categoría GENERAL de espacios simplécticos. Asi mismo, llamaremos ES_n a la subcategoría completa de $E.S$ cuyos objetos son los pares (V, Φ) tales que $\dim(V) = 2n$,

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ y $ES_A = E.S_{\{A\}}$ donde A es un anillo fijo cualquiera.

<u>Nota 3.2.</u> Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Una subcategoria completa $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ de dice un ESQUELETO de $\mathcal{C}$ si obj $(\mathcal{C}')$ contiene un elemento y sólo uno de cada clase de objetos isomorfos de $\mathcal{C}$.

Trivialmente dos esqueletos de $\mathcal{C}$ son isomorfos y el axioma de elección asegura la existencia de un esqueleto de $\mathcal{C}$. Ahora bien, un esqueleto $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ no es en general isomorfo a $\mathcal{C}$ pues si lo fueran existiría una biyección entre ob $(\mathcal{C})$ y ob $(\mathcal{C}')$.

<u>Ejemplo</u>. Si $\mathcal{C}$ es la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo K, la subcategoría completa $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ cuyos objetos son los k-espacios vectoriales $K^n (n \in \mathbb{N})$ es un esqueleto de $\mathcal{C}$.

<u>Definición 3.3.</u> Sea $\mathcal{B}$ una subcategoría de A. Diremos que $\mathcal{B}$ es una categoría SIMPLECTICA DE ANILLOS si la subcategoría completa de $ES_{\mathcal{B}}$ cuyos objetos son los pares (A^{2n}, Φ_0), $A \in ob(\mathcal{B})$ y Φ_0 es la forma bilineal hemisimétrica de matriz.

$$\left[\begin{array}{cc|ccc}
0 & 1 & & & \\
-1 & 0 & & & \\
\hline
 & & \ddots & & \\
 & & & 0 & 1 \\
 & & & -1 & 0
\end{array}\right]$$

es un ESQUELETO de $ES_{\mathcal{B}}$.

Nota 3.4.

(1) La categoría de cuerpos es una categoría simpléctica. Artin, [2], Dieudonné [9].

(2) La categoría de anillos locales y homomorfismos locales es simplética. Klingemberg. [12].

(3) La categoría de anillos principales es simpléctica. (Chan-Nan Chang).

(4) La categoría de β-Anillos es simplectica. La demostración puede verse en Fernández - Bermejo [10]. Enunciaremos aquí algunas propiedades importantes en esta categoría.

Dado un anillo A y el diagrama $\{A_P\}$ $P \in$ Spec. A., la familia de homomorfismo naturales.

$$\{i_P : A \longrightarrow A_P\}_{P \in \text{Spec } A}.$$

induce un homomorfismo.

$$i : A \longrightarrow \varprojlim \{\Delta_P\}.$$

que es inyectivo pero en general no es suprayectivo. Si i es un isomorfismo diremos que A es un β - ANILLO.

La categoría de β-anillos es una categoría amplia como lo prueba el hecho de que A es un β-anillo si y sólo si las componentes conexas y las componentes grafo-conexas de Spec. A coninciden. Esto se verifica trivialmente en dominios de integridad ya que (0) es un ideal primo y todo par de ideales maximales de A se pueden conectar vía el 0. Así mismo todo anillo noetheniano es un β-anillo.

(5) La categoría de anillos de Hermite es una categoría simpléctica. Abia [1].

Nota 3.5.

(1) Sean (V, Φ), $(V' \Phi')$ espacios simplécticos sobre A y A' respectivamente. Sean $B = \{u_1, u_2 \ldots u_n\}$ y $B' = \{v_1, v_2 \ldots v_n\}$ bases de V, V' respectivamente y sea (ρ, ψ) un homomorfismo. Si $\psi(u_i) = \sum_1^n b'_{ij} v_j, b'_{ij} \in A'$, designando por $B_\psi = (b'_{ij})$ y por $\rho(M) = (\rho(m_{ij})$ para toda matriz $M = (m_{ij})$, por un procedimiento análogo al de espacios vectoriales de tiene que

$$(x') = (\rho(x)).\ B_\psi$$

siendo $(x') = (x'_1, x'_2 \ldots x'_n)$, $(\rho(x)) = (\rho(x_1), \ldots, \rho(x_n))$. Luego ρ y la matriz B_ψ determinan univocamente el homomorfismo (ρ, ψ).

(2) En el caso particular de que $A = A'$ y $\rho = 1_A$, (ρ, ψ) es un homomorfismo de V en V' como A-módulos conmutando con las formas bilineales definidas sobre V y V'.

(3) Trivialmente se verifica que (ρ, ψ) es isomorfismo si y sólo si ρ es isomorfismo de anillos y $\det(B_\psi)$ es una unidad.

(4) Sean M_Φ y $M_{\Phi'}$ las matrices de Φ y Φ' respecto de las bases B y B' de (1)respectivamente. Si (ρ, ψ) es el homomorfismo anterior por un cálculo inmediato se tiene que

$$\rho(M_\Phi) = B_\psi \,.\, M_{\Phi'}\, B_\psi^t$$

(5) Sean $(V\ \Phi) \xrightarrow{(f,\ \rho)} (W, \varepsilon) \xrightarrow{(g,\ \psi)} (T, \delta)$ homomorfismo de espa-

cios simplécticos. Sean M_ρ, M_ψ las matrices de ρ, ψ como homomorfismos de A y A' módulos. Si llamamos.

$$(h, \gamma) = (g, \psi) \circ (f, \rho).$$

y M_γ a la matriz del homomorfismo γ del A-módulo V en el A"-módulo. T, se verifica que

$$M_\gamma = g(M_\rho) \, . \, M_\psi \, .$$

<u>Proposición 3.6</u>. Sea (V Φ) un espacio simpléctico. Si llamamos:

$$I(V, \Phi) = \{(f, \psi) \in \mathrm{Aut}_{E.S}(V, \Phi) | f = 1_A\}$$

se verifica que

(1) $I(V, \Phi)$ es un subgrupo del grupo $\mathrm{Aut}_{E.S.}(V, \Phi)$.

(2) Si consideramos la subcategoría. $\overline{ES}_n$ de ES_n cuyos objetos son los objetos de $E.S_n$ y los morfismos los pares (f, ψ) tales que la matriz de ψ sea inverible, I induce un functor no trivial $\widetilde{I}$ de $\overline{E.S}_n$ en la categoría de grupos

(3) En una categoría simpléctica.

$$I(V, \Phi) \simeq I(A^{2n}, \Phi_\circ).$$

Demostración

(1) Trivial

(2) Sea (V, Φ) un objeto de $\overline{ES}_n$. Definimos $\tilde{I}$ de la siguiente manera.

(a) $\tilde{I}(V, \Phi) = I(V, \Phi)$

(b) Sea $(f, \psi) : (V, \Phi) \longrightarrow (V', \Phi')$ un morfismo de $\overline{ES}_n$. Sean B y B' bases de V y V' respectivamente y sea M_ψ la matriz de ψ respecto de ellas. Por hipótesis det $(M_\psi) = \varepsilon'$. ε' unidad. Sea $(1_A, \alpha) \in I(V, \Phi)$, $\alpha : V \longrightarrow V$ automorfismo de V como A-módulo. Por comodidad de notación en lo sucesivo llamaremos $\alpha = (1_A, \alpha)$. Si M_α es la matriz de α respecto de la base B, $\det(M_\alpha) = \varepsilon$, unidad en A, podemos definir $\tilde{I}(F, \psi) : I(V, \Phi) \longrightarrow I(V', \Phi')$ por.

$$\tilde{I}(f, \psi)\ (\alpha) = \beta.$$

donde la matriz de β respecto de la base B' es:

$$M_\beta = M_\psi(f(M_\alpha)).\ M_\psi^{-1}$$

Evidentemente $\beta \in I(V', \Phi')$ pues $\det(M_\beta) = \varepsilon' f(\varepsilon)\ \varepsilon'^{-1}$ y al ser f un homomorfismo unitario $f(\varepsilon)$ es una unidad en A'. $\tilde{I}(f, \psi)$ es un homomorfismo de grupos abelianos y evidentemente ρ no depende de las bases elegidos para su construcción

(3) Trivial.

En lo sucesivo, y salvo mención de lo contrario, trabajaremos siempre en una categoría simpléctica de anillos.

Definición 3.7. Llamaremos grupo simpléctico de A, de dimensión n -y lo denotaremos por $SP_n(A)$- al grupo $I(A^{2n}, \Phi_o)$.

Nota 3.8. (a) La definición tiene sentido pues en virtud de 3.5 $I(A^{2n}, \Phi_o)$ no depende del espacio elegido.

(b) Obsérvese que cada functor

$$F_n : A \longrightarrow ES_n.$$

definido por $F_n(A) = (A^{2n}, \Phi_o)$ tiene su imagen contenida en la categoría $\overline{ES}_n$. Por tanto, tiene sentido la composición $SP_n = \tilde{I} . F_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$. El functor $SP_n(-)$ verifica que $SP_n(A)$ es el grupo simpléctico de A y que $\forall f \in Hom_A(A, B)$, $F_n(f) = (f, \psi)$ definido por.

$$\forall \alpha \in SP_n(A), \quad SP_n(f) (\alpha) = \beta.$$

donde respecto de las bases canónicas de A^{2n} y B^{2n} la matriz de β es.

$$M_\beta = M_\psi(f (M_\alpha)). M_\psi^{-1}$$

y al ser $M_\psi = I$ se tiene.

$$M_\beta = (f (M_\alpha)).$$