APENDICE: ALGEBRAS DE TIPO DE REPRESENTACION FINITO

Si Λ es un anillo artiniano decimos que Λ es de tipo (de representación) finito si sólo hay un número finito de clases de isomorfía de inescindibles en modΛ.

El Teorema de Krull y Schmidt (1.2.1, que vale en general para anillos artinianos) nos garantiza que si Λ es de tipo finito nos bastará con conocer un número finito de módulos para describir explícitamente todos los objetos de modΛ. Pero aún se sabe más: M. Auslander ha probado que *si Λ es de tipo finito, entonces todo Λ-módulo (finitamente generado o no) es suma directa de Λ-módulos inescindibles finitamente generados* (ver [A]). Entonces, conociendo un número finito de Λ-módulos, podríamos describir todos los Λ-módulos.

Uno de los problemas centrales de la Teoría de Representaciones es determinar cuáles son los anillos artinianos de tipo finito. Este problema no ha sido aún resuelto, pero sí se han resuelto casos particulares importantes: para ciertas familias F de anillos artinianos, se han podido clasificar los anillos de tipo finito de F. Algunos de estos resultados se consideran ya como teoremas clásicos del Algebra y otros, más recientes, sólo se encuentran en artículos de investigación destinados al especialista. En este apéndice trataremos de enunciar algunos de estos resultados.

A.1 LOS PRIMEROS EJEMPLOS

El resultado más elemental que afirma que algún anillo es de tipo finito es el conocido teorema: *si* k *es un campo, todo* k-*espacio vectorial tiene una base,* debido esencialmente a G. Hamel (1905).

Ciertamente, Hamel no trataba de atacar la clasificación de los anillos de tipo finito en [Hm]: su interés era clasificar las soluciones de la ecuación funcional $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sobre los números reales, y lo que probó es que $\mathbb{R}$ tiene una $\mathbb{Q}$-base. Algo análogo sucede con los resultados que mencionaremos en esta sección y con varios de los que después enunciaremos: no deben verse como intentos de solución parcial al problema que nos ocupa sino como resultados, originalmente inconexos, que posteriormente dieron origen a que se planteara el problema y que han aportado motivación y técnicas para intentar resolverlo.

Los primeros ejemplos relevantes para nosotros son anteriores al trabajo de Hamel, y fueron obtenidos durante la búsqueda de formas canónicas para las matrices. Mencionaremos aquí los dos más sencillos.

Consideremos primero el anillo $\Lambda = k[x]$, donde k es un campo algebraicamente cerrado. Λ no es artiniano, pero sabemos que $\Lambda \cong kC$, donde C es el carcaj

$$C = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd} .$$

Sabemos también que $\mathrm{Mod}\Lambda \cong \mathrm{Mod}kC \cong \mathrm{Mod}C$ (ver 4.D), de modo que podemos "ver" los Λ-módulos como parejas (V,f) formadas por un espacio vectorial V y una aplicación lineal $f: V \longrightarrow V$. Si V es de dimensión finita, claramente (V,f) "es" un Λ-módulo finitamente generado; consideremos ahora la subcategoría plena $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Mod}(C)$ definida por todos los (V,f) con V de dimensión finita: $\mathcal{C}$ es equivalente a una subcategoría plena de $\mathrm{mod}\Lambda$ que es cerrada bajo la obtención, en $\mathrm{mod}\Lambda$, de sumas finitas y sumandos directos.

A su vez, $\mathcal{C}$ es equivalente a la categoría $\mathcal{C}'$ que a continuación se define: los objetos de $\mathcal{C}'$ son todas las matrices cuadradas M (de cualquier orden) con entradas en k, y los morfismos de M a M' en $\mathcal{C}'$ son todas las matrices A (de $n\times m$ si M es de $m\times m$ y N es de $n\times n$) tales que $AM = M'A$.

Es fácil convencerse de que sucede lo siguiente: Una representación $(V,f) \in \mathcal{C}$ es escindible si y sólo si la correspondiente matriz en $\mathcal{C}'$ es conjugada de alguna matriz M con descomposición diagonal (no trivial) en bloques:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}.$$

Se sabe (Jordan, 1870) que *toda matriz cuadrada* M *es conjugada de una matriz* M' *que tiene descomposición diagonal en bloques*

$$M' = \begin{bmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_r \end{bmatrix},$$

donde los bloques M_i *son células de Jordan, i.e. matrices cua-*

dradas de la forma

$$M_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \\ & 0 & \lambda & & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix},$$

con $\lambda \in k$. *Más aún: la matriz* M' *es única salvo por la colocación de los bloques* M_i *a lo largo de la diagonal.* Además, *toda célula de Jordan es inescindible:* no es conjungada de ninguna matriz que tenga descomposición diagonal en bloques. (Véase [M]).

De lo anterior concluímos que, para nuestra Λ:

(1) Λ es de tipo de representación infinito

(2) Hay una infinidad de números naturales n tales que Λ tiene representaciones inescindibles de longitud n

(3) Hay una infinidad de números naturales n tales que Λ tiene una infinidad de clases de isomorfía de representaciones inescindibles de dimensión n sobre k.

Nótese que cada una de estas condiciones implica la anterior. Diremos que un anillo artiniano que satisface (2) es de <u>tipo</u> (<u>de representación</u>) <u>no acotado</u>, y diremos que una k-álgebra que satisface (3) es de <u>tipo fuertemente no acotado</u>.

Consideremos ahora al carcaj

$$C = \cdot \rightrightarrows \cdot \ ,$$

y sea $\Lambda = kC$. Entonces $\mathrm{mod}\Lambda \cong \mathrm{mod}kC$ y los Λ-módulos finitamente generados "son" pares de matrices (M,N) de las mismas dimensiones. Tendremos que $(M,N) \cong (M',N')$ si y sólo si existen matrices no singulares P y Q tales que PM = M'Q y PN = N'Q. Se plantearía entonces el problema de encontrar una forma canónica para parejas de matrices (M,N) bajo esta relación de equivalencia: una forma tal que todo par (M,N) fuera equivalente a uno (M',N') de la forma mencionada (único). También pediríamos a esta forma canónica que se puediese "ver" fácilmente si (M',N') es inescindible o no (como en nuestro ejemplo anterior, en el que basta ver si hay o no una única célula de Jordan).

Este problema fue resuelto en 1896 por Kronecker (ver [Gn]) y la forma canónica por él descubierta nos permite ver que, *para nuestra* Λ, Λ *es de tipo fuertemente no acotado.*

También a fines del siglo pasado fué demostrado el teorema de Wedderburn para anillos artinianos (ver [A-F]). Con la ayuda de trabajos posteriores (Artin, Hopkins, Krull, etc.), el teorema mencionado puede interpretarse, desde el punto de vista que nos ocupa, como sigue: *si el radical del anillo artiniano* Λ *es cero (ó sea, si* Λ *es semisimple), todo* Λ*-módulo es suma directa de* Λ*-módulos simples; en particular* Λ *es de tipo finito.* Como para anillos artinianos la semisimplicidad equivale a que la dimensión homológica sea cero, tenemos otra interpretación del mismo teorema: *si la dimensión homológica del anillo artiniano* Λ *es cero, entonces* Λ *es de tipo finito.*

A.2 LA TEORIA DE GRUPOS

En 1898, H. Maschke publicó el primer resultado sobre álgebras de grupo de tipo finito: *si* k *es un campo y la característica de* k *no divide al orden del grupo finito* G, *entonces* kG *es semisimple* (y, por tanto, de tipo finito). En realidad, esta es una versión posterior del Teorema de Maschke, pues él no utilizaba el álgebra de grupo ni veía a las k-representaciones de G como módulos sobre kG.

Quedaba entonces el problema de clasificar los grupos finitos G tales que kG es de tipo finito con k un campo de característica p tal que p|o(G).

En 1939, H. Brummund probó que *si* G *es un* p-*grupo finito y* car(k) = p, *entonces* kG *es de tipo finito si y sólo si* G *es cíclico*. Observó también que *si* kG *es de tipo infinito* (G un p-grupo), *entonces* kG *es de tipo fuertemente no acotado siempre que* k *sea infinito*.

En 1954, D.G. Higman resolvió el caso general: *si la carcaterística de* k *es un divisor* p *del orden de* G, *entonces* kG *es de tipo finito si y sólo si los* p-*subgrupos de Sylow de* G *son cíclicos. Además, si* k *es infinito y* kG *es de tipo infinito,* kG *será de hecho de tipo fuertemente no acotado* (véase [C-R]).

Ha de observarse que para la demostración de los resultados aquí mencionados los métodos diagramáticos no jugaron ningún papel. Es sólo muy recientemente que (aunados a otros métodos que aquí no hemos mencionado) los métodos diagramáticos han resultado útiles para la comprensión de la estructura de las categorías de módulos sobre bloques de álgebras de grupo; sin embargo, no entraremos aquí en detalles sobre esto.

A.3 LAS CONJETURAS DE BRAUER Y THRALL

Como ya dijimos, el caso semisimple fué estudiado a fines del siglo pasado y a principios de este con bastante detenimiento y éxito. A mediados de la década de los 30's., y principalmente gracias a la influencia de los trabajos de R. Brauer sobre representaciones modulares de grupos, se empezó a estudiar a fondo el caso no semisimple. En aquella época ya se estudiaban los anillos y las k-álgebras y se empezaba a hacer énfasis (E. Noether) en el estudio de los módulos.

En 1934, G. Köthe publicó su trabajo [K], que fué de gran influencia en el desarrollo posterior de la Teoría de Representaciones. Se sabe que los anillos artinianos semisimples coinciden con aquéllos sobre los cuales todo módulo es suma de simples; también era ya conocido el Teorema Fundamental de los Grupos Abelianos Finitamente Generados: si G es un grupo abeliano finitamente generado, entonces G es suma directa de grupos cíclicos; incluso ya H. Ulm había estudiado las descomposiciones de grupos abelianos numerablemente generados y de torsión. Köthe se planteó el siguiente problema: ¿cuáles son los anillos artinianos sobre los cuales todo módulo es suma de cíclicos? Al tratar de resolverlo, definió los anillos uniseriales, y probó que *si* Λ *es uniserial, entonces* *todo Λ-módulo es suma directa de cíclicos, y los cíclicos inescindibles son cocientes de proyectivos inescindibles por potencias de su radical. En particular, los anillos uniseriales son de tipo finito.* También logró demostrar que, para anillos conmutativos, los anillos uniseriales son los únicos con esta propiedad; el problema general quedó abierto.

En 1939, T. Nakayama [N] se planteó y resolvió una versión más restringida del problema de Köthe: ¿cuáles son los anillos artinianos sobre los cuales todo módulo es suma directa de cíclicos que sean, a su vez, cocientes de proyectivos inescindibles por potencias de su radical? La solución dada por Nakayama (primero para k-álgebras, después para anillos artinianos) es: tales anillos son precisamente los anillos uniseriales generalizados (ahora llamados anillos de Nakayama, ver 6.4). En particular, se tiene: *todo anillo de Nakayama es de tipo finito.* En la misma serie de trabajos, Nakayama observó que los argumentos de Brummund (ver A.2) valían en un contexto más general y planteó explícitamente el problema de encontrar los anillos artinianos de tipo no acotado.

Después de estos trabajos es que R. Brauer y R.M. Thrall conjeturaron los siguientes resultados:

BT I: *Todo anillo artiniano de tipo acotado es de tipo finito.*

BT II: *Si* k *es un campo infinito y* Λ *es una* k-*álgebra* *de dimensión finita y de tipo no acotado, entonces Λ es de tipo fuertemente no acotado.*

Estas conjeturas no fueron enunciadas explícitamente sino hasta 1957 (ver [J2]) y, aunque Brauer y Thrall trabajaron sobre ellas mucho tiempo, no lograron demostrarlas. Mucho de lo que se ha hecho después (resultados, técnicas) en Teoría de Representaciones se ha hecho al intentar resolver estas conjeturas (ver [Rn]), y la segunda de ellas es hasta el momento uno de los principales problemas que ocupan a los especialistas.

Los métodos diagramáticos, aunque no como los hemos presentado en esta monografía, hicieron su aparición en los primeros intentos que hubo de resolver las conjeturas (el uso que se hacía de ellos era más bien implícito).

Parece ser que R.M. Thrall ya asociaba cierta gráfica a algunos tipos particulares de álgebras (sin publicarse, pero ver [J2]) y, en 1956, T. Yoshii hacía ya uso (más o menos implícito) del carcaj C_Λ para una k-álgebra Λ de dimensión finita con k algebraicamente cerrado. Yoshii pretendía haber probado BT I para el caso en que el radical cuadrado de Λ fuese cero, y haber dado la lista de las k-álgebras con radical cuadrado cero y de tipo finito. Por desgracia, había errores en su trabajo y sus resultados no son concluyentes.

A.4 DESARROLLOS RECIENTES

En 1968, A.V. Roiter [Rt] probó BT I para álgebras sobre un campo perfecto (en 1974, M. Auslander la probaría para anillos artinianos en [A]). Este resultado, sorprendente por la sencillez de los argumentos, hizo que renaciera el interés por las conjeturas y la clasificación de las álgebras de tipo finito. Varios de los trabajos hechos anteriormente se veían como consecuencias de la validez de BT I; otra consecuencia es que, cualesquiera que sean las álgebras que resuelven el problema de Köthe, son todas de tipo finito (si los inescindibles son todos cíclicos, ciertamente el álgebra es de tipo acotado).

Revisando el trabajo de Yoshii, que había sido citado por Roiter, S.A. Kruglyak y P. Gabriel (trabajando independientemente) descubrieron los errores que antes mencionamos y se replantearon (puesto que BT I estaba ya probada) el problema de clasificar las álgebras de radical cuadrado cero que fueran de tipo finito.

En 1972 S.A. Kruglyak resolvió este problema con técnicas de representaciones de conjuntos parcialmente ordenados, que habían venido siendo estudiadas por Roiter, Nazarova y Kleiner, de la escuela de Kiev.

También en 1972 publicó P. Gabriel su solución al pro blema [Gb]. Es en este trabajo donde se encuentran explícitas por primera vez las "ideas diagramáticas" que han sido objeto de esta monografía, tal y como hoy se conocen. Al rehacer el trabajo de Yoshii en términos diagramáticos, P. Gabriel observó que no sólo se obtenía la lista de las k-álgebras con radical cuadrado cero de tipo finito, sino también la de las k-álgebras hereditarias de tipo finito. Enunciaremos primero este último resultado:

<u>Teorema</u>: *Sea* k *un campo algebraicamente cerrado y sea* Λ *una* k-*álgebra (indescomponible y básica) de dimensión finita. Sea* $C = C_\Lambda$ *el carcaj ordinario de* Λ *y supongamos que* Λ *es hereditaria* (i.e., $\Lambda \cong kC$). *Entonces* Λ *es de tipo finito si y sólo si la gráfica subyacente a* C *(obtenida "olvidando" la orientación de las flechas) es uno de los siguientes diagramas:*

A_n: $1 - 2 - \cdots - n \quad (n \geq 1)$

$$D_n:\quad 1 - 2 - \cdots - n\text{-}2 \begin{matrix} \nearrow n\text{-}1 \\ \searrow n \end{matrix} \qquad (n \geq 4)$$

$$E_6:\quad \begin{matrix} & & 6 & & \\ & & | & & \\ 1 - & 2 - & 3 - & 4 - & 5 \end{matrix}$$

$$E_7:\quad \begin{matrix} & & 7 & & & \\ & & | & & & \\ 1 - & 2 - & 3 - & 4 - & 5 - & 6 \end{matrix}$$

$$E_8:\quad \begin{matrix} & & 8 & & & & \\ & & | & & & & \\ 1 - & 2 - & 3 - & 4 - & 5 - & 6 - & 7 \end{matrix} \qquad //$$

Para enunciar el otro resultado de Gabriel necesitamos una construcción que se aplica a álgebras de radical cuadrado cero. Si Λ es una k-álgebra de dimensión finita (básica, indescomponible, k algebraicamente cerrado) con radical cuadrado cero, el <u>carcaj separado</u> de Λ, denotado por C'_Λ, se define como sigue:

Si C_Λ es el carcaj ordinario de Λ y $\{1,..,n\}$ son sus vértices, los vértices de C'_Λ son $(C'_\Lambda)_0 := \{1,2,\ldots,n,1',2',\ldots ..,n'\}$ y, por cada flecha $\alpha: i \longrightarrow j$ en C_Λ, se pone una flecha $\alpha': i \longrightarrow j'$ en C'_Λ. (Este carcaj C'_Λ no es, en general, conexo).

<u>Teorema</u>: *Sea* k *un campo algebraicamente cerrado y sea* Λ *una* k-*álgebra (indescomponible y básica) de dimensión finita. Supongamos que* $\mathrm{rad}^2\Lambda = 0$ (i.e. $R = F^2$). *Entonces* Λ *es de tipo finito si y sólo si la gráfica subyacente al carcaj separado* C'_Λ *de* Λ *es unión ajena de gráficas como en el teorema precedente.* //

El problema general, para k-álgebras de dimensión finita con k algebraicamente cerrado se reduce, como vimos, a encontrar la lista de los carcajes con relaciones (C,R) tales que hay sólo un número finito de clases de isomorfía de representaciones inescindibles en $\mathrm{mod}(C,R)$. Este problema sigue abierto hasta la fecha; para terminar nuestro apéndice, mencionaremos algunos de los avances que se han logrado en esta dirección.

Recientemente, Ch. Riedtmann anunció que ha obtenido ya la lista de todos los (C,R) autoinyectivos de tipo finito.

También J. Waschbüsch, con técnicas diferentes, ha obtenido resultados similares. Ambos trabajos permanecen aún sin publicarse.

Teniendo en cuenta nuestro ejercicio 6.G, el "caso opuesto" al autoinyectivo es aquel en que $\Lambda = kC/R$ es cociente de hereditaria (i.e. cuando C_Λ no tiene ciclos dirigidos); también es el "caso opuesto" desde el punto de vista de la dimensión homológica: las álgebras autoinyectivas tienen dimensión homológica infinita (a menos que sean semisimples) y las cocientes de hereditarias tienen siempre dimensión homológica finita (ver el ejercicio 5.H.2). Este caso incluye al hereditario que resolvió P. Gabriel, pero no ha sido resuelto mas que en algunos otros casos particulares.

K. Bongartz ha probado recientemente que si (C,R) es de tipo finito y C no tiene ciclos dirigidos entonces, si R no contiene relaciones cero, R debe contener todas las posibles relaciones de conmutatividad. La lista de todos los (C,R) de tipo finito sin ciclos dirigidos y "completamente conmutativos" había sido ya encontrada por M. Loupias en [L]. Esta lista coincide (sobre campos algebraicamente cerrados) con la de las álgebras ℓ-hereditarias de tipo finito que fueron clasificadas, en el contexto más general de las álgebras de Artin, por R. Bautista en 1978.

Si, por el contrario, R tiene un sistema generador de relaciones cero (aunque C tenga ciclos dirigidos), el problema ha sido resuelto aunque de manera menos concluyente: Si C es un árbol, K. Bongartz y C.M. Ringel han encontrado condiciones necesarias y suficientes para que (C,R) sea de tipo finito y, en el caso general (C arbitrario, R generado por relaciones cero) E. Green y P. Gabriel, trabajando independientemente, han reducido el problema (mediente técnicas topológicas) al caso en que C es un árbol. Si hemos dicho "de manera menos concluyente" es porque las condiciones de Bongartz y Ringel (en términos de conjuntos parcialmente ordenados) son, en general, difíciles de verificar y la lista de los árboles de tipo finito, desconocida aún, es mucho muy grande. Esto es, en parte, la razón de que actualmente no se busca ya tanto obtener listas de álgebras de tipo finito, sino obtener algoritmos que decidan, en los casos concretos, si un álgebra es de tipo finito o no.