CAPITULO 6: CASOS PARTICULARES

Sea (C,R) un carcaj con relaciones y sea $\Lambda = kC/R$. Dada alguna familia de álgebras definida por alguna propiedad $\mathbb{P}$, quisiéramos encontrar la "traducción" $\mathbb{P}'$ de $\mathbb{P}$ en términos de carcajes con relaciones, o sea que quisiéramos encontrar $\mathbb{P}'$ tal que Λ tiene la propiedad $\mathbb{P}$ si y sólo si (C,R) tiene la propiedad $\mathbb{P}'$. En otras palabras, nos preguntamos qué efecto tiene sobre (C,R) la imposición de condiciones adicionales sobre Λ.

Un ejemplo de esto ya lo hemos visto en 3.F: Λ tiene radical cuadrado cero si y sólo si $R = F^2$.

En este capítulo estudiaremos el problema mencionado en algunos casos particulares.

§6.1 ALGEBRAS HEREDITARIAS

Definición: Diremos que Λ es hereditaria si los submódulos de Λ-módulos proyectivos son siempre proyectivos.

Esto es equivalente a pedir que la dimensión global proyectiva de Λ sea menor o igual a uno y, por lo dicho en 5.G, podemos concluir que Λ es hereditaria si y sólo si el radical de todo proyectivo inescindible es proyectivo.

Como ya conocemos los proyectivos inescindibles y sus radicales, nos será fácil interpretar la afirmación "Λ es hereditaria" en términos de (C,R). Para esto utilizaremos la siguiente propiedad de las álgebras hereditarias: todo morfismo no nulo entre proyectivos inescindibles es monomorfismo (ver 6.D(1)).

Proposición: *Λ es hereditaria si y sólo si C no tiene ciclos dirigidos y $R = 0$.*

Demostración:

Necesidad: Supongamos que Λ es hereditaria.

Si tuviésemos un ciclo en C, digamos $\gamma = (i|\alpha_n \dots \alpha_1|i)$ con $n \geqq 1$, obtendríamos, como en 2.B(2), monomorfismos entre proyectivos inescindibles $\phi_{\alpha_n}, \phi_{\alpha_{n-1}}, \dots, \phi_{\alpha_1}$ de tal forma que la composición $\phi = \phi_{\alpha_n}\phi_{\alpha_{n-1}}\dots\phi_{\alpha_1}$ sería un automorfismo $\phi\colon P_i \longrightarrow P_i$.

Por otra parte, como $n \geqq 1$, resulta $\phi \in \mathrm{rad}(\mathrm{End}_\Lambda P_i)$: en efecto, $P_i = \Lambda\bar{\tau}_i$ y ϕ es la multiplicación por $\bar{\gamma}$; mediante el isomorfismo $\mathrm{End}P_i \cong \bar{\tau}_i\Lambda\bar{\tau}_i$ de 1.2.6(ii), ϕ se transforma en el elemento $\bar{\gamma}$ de $\bar{\tau}_i\Lambda\bar{\tau}_i$, pero $\bar{\gamma}$ está en $\mathrm{rad}(\bar{\tau}_i\Lambda\bar{\tau}_i)$ por 1.A y 2.3.4.

Entonces ϕ es al mismo tiempo nilpotente e invertible, lo cual es una contradicción. Concluímos que C no tiene ciclos dirigidos.

Si fuera $R \neq 0$, tendríamos dos vértices i,j de C y alguna relación legible ρ de i a j en R.

Como C no tiene ciclos, deberá ser $i \neq j$. También por la ausencia de ciclos dirigidos en C, podemos suponer que ρ es una relación "extrema", o sea que si tenemos algún camino dirigido desde i a algún otro vértice $s \neq i$, ya no empiezan relaciones legibles en s.

Consideremos el proyectivo P_i en mod(C,R). Por 5.E, la cubierta proyectiva de $\mathrm{rad}P_i/\mathrm{rad}^2P_i$ es

$$P = \bigoplus_{t=1}^{r} \#(i,j_t)P_{j_t},$$

donde $j_1, j_2, \ldots, j_r$ son todos los vértices a los que llega alguna flecha desde i. Por nuestra demostración de 1.7.3, P es también la cubierta proyectiva de $\mathrm{rad}P_i$.

Pero el mismo $\mathrm{rad}P_i$ es proyectivo, de modo que debe coincidir con su propia cubierta proyectiva (la identidad es ciertamente un epimorfismo superfluo, ahora use la unicidad de la cubierta proyectiva, 1.6.2), de donde

$$\text{(i)} \qquad \mathrm{rad}P_i \cong \bigoplus_{t=1}^{r} \#(i,j_t)P_{j_t} ,$$

y de aquí obtendremos nuestra contradicción.

Si suponemos $\#[x,y]$ igual al número de caminos dirigidos de x a y, obtendremos que

$$\text{(ii)} \qquad \#[i,j] = \sum_{t=1}^{r} \#(i,j_t)\#[j_t,j] \ .$$

Por 5.2.1 y la extremalidad de ρ se tiene que, para toda $t = 1,\ldots,r$,

$$\text{(iii)} \qquad \dim_k(P_{j_t})_j = \#[j_t,j].$$

Como $i \neq j$, 5.3.1 nos asegura que:

$$\text{(iv)} \qquad \dim_k(\mathrm{rad}P_i)_j = \dim_k(P_i)_j \ .$$

Como ρ es una relación legible de i a j, usando 5.2.1 obtenemos que

$$\text{(v)} \qquad \dim_k(P_i)_j < \#[i,j].$$

De (i), (iii) y (ii) se obtiene que $\dim_k(\mathrm{rad}P_i)_j$ es igual a $\#[i,j]$, pero de (iv) y (v) se obtiene que es menor.

Concluímos entonces que $R = 0$.

<u>Suficiencia</u>: Supongamos ahora que C no tiene ciclos dirigidos y que $R = 0$. Probaremos que Λ es hereditaria.

Como $R = 0$, por 2.E podemos ver a $\Lambda = kC$ como el álgebra tensorial $\Lambda = T_A(M)$.

Como $A = k^{C_0}$ es semisimple, todo A-módulo es proyectivo, pero entonces todo Λ-módulo de la forma $\Lambda \otimes_A X$, con X en ModA, es proyectivo: en efecto, el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes_A X,-) \cong \mathrm{Hom}_A(X,\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,-)) \cong \mathrm{Hom}_A(X,-)$ es exacto. (Hemos usado la adjunción entre Hom y $\otimes$, para una prueba puede verse la p. 225 de [A-F]).

En particular, para $X = M$, tenemos que $\Lambda \otimes_A M$ es un Λ-módulo proyectivo, pero como C no tiene ciclos dirigidos sabemos por (c) y (d) de 2.E que $\Lambda \otimes_A M \cong \mathrm{rad}\Lambda$, de donde $\mathrm{rad}\Lambda$ es proyectivo.

Si $P_i = \Lambda\tau_i$ es un proyectivo inescindible, $\mathrm{rad}P_i = \mathrm{rad}(\Lambda\tau_i) = (\mathrm{rad}\Lambda)\tau_i$ es proyectivo por ser sumando directo de $\mathrm{rad}\Lambda$, de donde Λ es hereditaria. //

<u>§6.2 ALGEBRAS COCIENTES DE HEREDITARIAS</u>

Veremos ahora que si se omite la condición "$R = 0$" para las álgebras hereditarias, se obtiene una familia importante de álgebras: las álgebras cocientes de hereditarias (ver [Hr], [J-N]).

<u>Definición</u>: Λ es <u>cociente de hereditaria</u> si existe una k-ál-

gebra Γ de dimensión finita y hereditaria y un morfismo supra yectivo $\phi: \Gamma \longrightarrow \Lambda$ de k-álgebras tal que $\mathrm{Ker}\phi \subseteq \mathrm{rad}^2\Gamma$.

Observaciones: En la situación de la definición anterior, se tiene lo siguiente:

(1). La condición $\mathrm{Ker}\phi \subseteq \mathrm{rad}^2\Gamma$ equivale a pedir que $\phi^{-1}\mathrm{rad}^2\Lambda = \mathrm{rad}^2\Gamma$, ó a pedir que ϕ induzca un isomorfismo de k-álgebras $\bar{\phi}: \Gamma/\mathrm{rad}^2\Gamma \longrightarrow \Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda$ (ver 1.C).

(2) Como Λ es básica e indescomponible, por ser $\mathrm{Ker}\phi \subseteq \mathrm{rad}^2\Gamma$, Γ también es básica e indescomponible. (ver 6.A).

Proposición: Λ *es cociente de hereditaria si y sólo si* C *no tiene ciclos dirigidos.*

Demostración: Si C no tiene ciclos dirigidos, kC es hereditaria por la proposición anterior, y si $\phi: kC \longrightarrow \Lambda = kC/R$ es la proyección natural, $\mathrm{Ker}\phi = R \subseteq F^2$ por ser R admisible y $F^2 = \mathrm{rad}^2 kC$ por 2.2.4, de modo que Λ es cociente de hereditaria.

Supongamos ahora que Λ es cociente de hereditaria. Entonces existe un morfismo sobre $\phi: \Gamma \longrightarrow \Lambda$ de k-álgebras con Γ hereditaria y $\mathrm{Ker}\phi \subseteq \mathrm{rad}^2\Gamma$.

Por la observación (2), podemos considerar al carcaj de Γ, C_Γ. Por la proposición anterior obtendremos entonces que C_Γ no tiene ciclos dirigidos.

Sabemos que $C = C_\Lambda$ (3.1.3), pero $C_\Lambda = C_\Gamma$ por 3.F, de donde C no tiene ciclos dirigidos. //

§6.3 ALGEBRAS SERIALES IZQUIERDAS

Definición: Λ es serial izquierda si todo proyectivo inescindible en modΛ tiene una única serie de composición.

Recordemos que una serie de composición para un Λ-módulo M es una cadena de submódulos $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_\ell = 0$ con la propiedad de que M_i/M_{i+1} es simple para $i = 0,1,\dots,\ell-1$. Como Λ es un anillo artiniano, todo Λ-módulo izquierdo finitamente generado tiene alguna serie de composición, lo que se exige es que los proyectivos inescindibles la tengan única (o sea, que los proyectivos inescindibles sean uniseriales).

Observemos que un Λ-módulo M tiene una única serie de composición si y sólo si $M \supset \mathrm{rad}M \supset \mathrm{rad}^2M \supset \dots \supset 0$ es una serie de composición.

6.3.1 Lema: *Supongamos que* $\mathrm{rad}P/\mathrm{rad}^2P$ *es simple o cero para cada* Λ*-módulo proyectivo inescindible* P. *Entonces* Λ *es serial izquierda.*

Demostración: Sea P un proyectivo inescindible en modΛ. Por hipótesis sabemos que $\mathrm{rad}P/\mathrm{rad}^2P$ es simple o cero. Suponiendo que $\mathrm{rad}P/\mathrm{rad}^2P$ es simple, probaremos que $\mathrm{rad}^2P/\mathrm{rad}^3P$ es también simple o cero.

Sea $f\colon Q \longrightarrow \mathrm{rad}P$ la cubierta proyectiva de radP. Como $\mathrm{rad}P/\mathrm{rad}^2P$ es simple y Q es también la cubierta proyectiva de $\mathrm{rad}P/\mathrm{rad}^2P$, entonces Q es un proyectivo inescindible.

Usando 1.5.5, vemos que f puede restringirse a epimor fismos $f': \mathrm{rad}Q \longrightarrow \mathrm{rad}^2P$ y $f'': \mathrm{rad}^2Q \longrightarrow \mathrm{rad}^3P$, de modo que f induce un epimorfismo $\bar{f}: \mathrm{rad}Q/\mathrm{rad}^2Q \longrightarrow \mathrm{rad}^2P/\mathrm{rad}^3P$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{rad}^2Q \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & \mathrm{rad}Q \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & \mathrm{rad}Q/\mathrm{rad}^2Q \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{rad}^3P \arrow[r] & \mathrm{rad}^2P \arrow[r] & \mathrm{rad}^2P/\mathrm{rad}^3P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pero por hipótesis, ya que Q es proyectivo inescindible, $\mathrm{rad}Q/\mathrm{rad}^2Q$ es simple o cero, de modo que $\mathrm{rad}^2P/\mathrm{rad}^3P$ es también simple o cero.

Nuevamente, si $\mathrm{rad}^2P/\mathrm{rad}^3P$ es simple, podemos emplear la misma técnica ("Sea $T \longrightarrow \mathrm{rad}^2P$ la cubierta proyectiva de rad^2P, etc.") para probar que $\mathrm{rad}^3P/\mathrm{rad}^4P$ es simple o cero y así continuamos durante un número finito de pasos (igual a la longitud de P) hasta encontrar un cociente nulo.

Con esto se habrá probado que $P \supset \mathrm{rad}P \supset \mathrm{rad}^2P \supset \dots \supset 0$ es una serie de composición, de modo que P es uniserial.//

<u>6.3.2</u> <u>Proposición</u>: *Λ es serial izquierda si y sólo si para cada vértice* i *de* C *hay a lo más una flecha que empieza en* i.

<u>Demostración</u>: Supongamos primero que Λ es serial izquierda. Sea i un vértice de C y consideremos el proyectivo P_i. Como P_i es uniserial, $P_i \supset \mathrm{rad}P_i \supset \mathrm{rad}^2P_i \supset \dots \supset 0$ es serie de composición, y entonces $\mathrm{rad}P_i/\mathrm{rad}^2P_i$ es simple o cero. Por 5.E se tiene entonces que $\bigoplus_{j \in C_0} \#(i,j)S_i$ es simple o cero. Por lo tanto, hay a lo más una flecha en C que empieza en i.

Ahora supongamos, recíprocamente, la condición del enunciado. Sea i un vértice cualquiera de C. Por hipótesis y 5.E se tiene que $radP_i/rad^2P_i$ es simple o cero. En consecuencia, aplicando 6.3.1, Λ es serial izquierda. //

§6.4 ALGEBRAS DE NAKAYAMA

Definición: Λ es serial derecha si todo Λ-módulo derecho proyectivo e inescindible es uniserial.

Observemos que, como $\mathrm{mod}\Lambda^{op}$ es equivalente a la categoría de los Λ-módulos derechos, Λ es serial derecha si y sólo si Λ^{op} es serial izquierda. Como el carcaj de Λ^{op} es C_Λ*, el opuesto al de Λ (ver 3.G), se obtiene la siguiente versión de 6.3.2:

6.4.1 Proposición: *Λ es serial derecha si y sólo si para cada vértice* i *de* C *hay a lo más una flecha de* C *que termina en* i.//

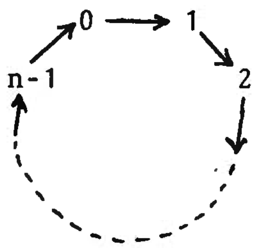
Definición: Λ es un álgebra de Nakayama si es serial izquierda y serial derecha.

De la definición y nuestras dos últimas proposiciones obtenemos:

6.4.2 Proposición: *Λ es de Nakayama si y sólo si en cada vértice de* C *empieza a lo más una flecha y termina a lo más una* *flecha. En concecuencia* Λ *es de Nakayama si y sólo si* C *es uno de los siguientes carcajes:*

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow n \quad (n \geq 1)$$

ó



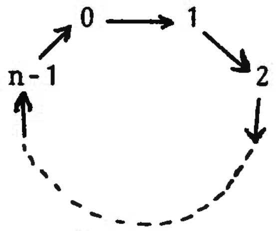
$(n \geq 1)$.

Nótese que cuando $n = 1$, *el primer carcaj es solo un punto* (Λ = k) *y el segundo es un vértice con un lazo.* //

Definición: Λ es autoinyectiva si considerada como Λ-módulo izquierdo es inyectiva. (Equivalentemente, si cada proyectivo inescindible es inyectivo).

No conocemos una condición para (C,R) que sea equivalente a la autoinyectividad de Λ, pero para álgebras de Nakayama autoinyectivas esta descripción es fácil. Vimos ya que pedir que Λ sea de Nakayama restringe fuertemente la forma de C, aunque no impone condiciones al ideal admisible R. Veremos ahora que pedir que Λ sea Nakayama-autoinyectiva resringe aún más la forma de C e impone una fuerte condición a R.

6.4.3 Proposición: *Si* $\Lambda \neq$ k *(éste es el caso en que* C *es sólo un punto y, forzosamente,* R = 0*), entonces* Λ *es Nakayama-autoinyectiva si y sólo si* C *es de la forma*



$(n \geq 1)$

y $R = F^h$ *con alguna* $h \geq 2$.

Demostración: Supongamos que Λ es Nakayama-autoinyectiva. C no puede ser de la forma $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow n$ con $n > 1$, pues $\Lambda\bar{\tau}_n$ sería un proyectivo simple no inyectivo (ver 5.C), y por lo tanto C es la forma requerida por 6.4.2. Veremos ahora que $R = F^h$ para alguna $h \geq 2$. Recordemos que, para $n = 1$, ya vimos esto en 2.D; en lo que sigue, usaremos la notación de 2.D.

Sea $h := \max\{\ell(i) \mid i = 0,1,\ldots,n-1\}$. Ciertamente, $h \geq 2$ (R es admisible) y, como $\{\gamma_i^{\ell(i)} \mid i = 0,\ldots,n-1\}$ es un sistema de generadores para R, nos bastará con probar que $\ell(0) = \ell(1) = \ldots = \ell(n-1) = h$ para tener que $R = F^h$.

Razonaremos por contradicción, suponiendo que hay un vértice i de C tal que $\ell(i) < h$. Sea $i' \in C_0$ tal que $i' + 1 \equiv i$ mod n (o sea que i' es donde empieza la única flecha que llega a i). Es fácil convencerse de que podemos suponer que $\ell(i') = h$, y de aquí obtendremos nuestra contradicción.

Sea $j \in C_0$ tal que $j + 1 \equiv i + \ell(i)$ mod n. Como P_i es inyectivo, sabemos por 5.F que $\gamma_i^{\ell(i)-1}$ es el más largo camino que llega a j y no está en R. Entonces $\gamma_{i'}^{\ell(i)} \in R$, pues también llega a j y es más largo que $\gamma_i^{\ell(i)-1}$. Por la definición de $\ell(i')$, concluímos que $h = \ell(i') \leq \ell(i) < h$.

Recíprocamente, supongamos que (C,R) es como en el enunciado. Por 6.4.2, Λ es de Nakayama. Por 5.F, P_i es inyectivo para todo vértice i de C, de modo que Λ es autoinyectiva. //

EJERCICIOS DEL CAPITULO 6

6.A Pruebe la observación (2) de 6.2. Sugerencia:

Use 1.C para $t = 1$. Para la primera parte, pruebe el converso del lema 1 de 3.2.2, y para la segunda use 1.3.3.

6.B Algebras locales. Λ es local si tiene un único ideal izquierdo maximal. Pruebe que Λ es local si y sólo si C tiene un solo vértice (cualquier número de lazos, R arbitrario).

6.C Algebras conmutativas. Pruebe que Λ es conmutativa si y sólo si C tiene un sólo vértice y, si $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ son las flechas de C, $\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i \in R$ para todo par de índices $i,j \in \{1,\ldots,n\}$.

6.D Algebras ℓ-hereditarias.

(1) Pruebe que si Λ es hereditaria, todo morfismo no nulo entre proyectivos inescindibles es monomorfismo. Esto se usó en la prueba de la proposición de 6.1.

(2) Λ es ℓ-hereditaria (localmente hereditaria) si cumple la condición del inciso anterior. Pruebe que Λ es ℓ-hereditaria si y sólo si todo submódulo local (i.e. con un único submódulo máximo) de un proyectivo inescindible es proyectivo.

(3) Considere la relación transitiva $<$ generada por "$P_i \otimes P_j$ si y sólo si hay un morfismo no nulo de P_i a P_j que

no es isomorfismo". Pruebe que $P_i < P_j$ si y sólo si hay un camino dirigido de j en i, no trivial. Entonces Λ es cociente de hereditaria si y sólo si < es un orden parcial. Concluya que las álgebras ℓ-hereditarias son cocientes de hereditarias.

(4) Si Λ es ℓ-hereditaria, R no puede contener relaciones cero.

(5) Una <u>expresión legible</u> de x a y en C es un elemento no nulo de $\tau_y kC\tau_x$. Nótese que el producto uv de dos expresiones legibles es el cero de kC si y sólo si v termina en un punto distinto del punto inicial de u. Pruebe que $\Lambda = kC/R$ es ℓ-hereditaria si y sólo si:

(i) C no tiene ciclos dirigidos, y

(ii) Si u,v son expresiones legibles con $0 \neq uv \in R$, entonces $u \in R$ ó $v \in R$.

<u>6.E</u> Pruebe que si Λ es serial izquierda, C tiene a lo más un ciclo dirigido. Describa la "forma general" de C cuando no tiene y cuando tiene un ciclo dirigido.

<u>6.F</u> Supongamos que Λ es Nakayama-autoinyectiva. Llamaremos <u>Nakayama-simétrica</u> a Λ si además se satisface que, para cada proyectivo inescindible P, P/radP es el único submódulo simple de P. Pruebe que esto ocurre si y sólo si $h \equiv 1 \bmod n$, donde h es la de 6.4.3.

<u>6.G</u> Pruebe que si Λ es autoinyectiva, cada flecha de C está contenida en algún ciclo dirigido de C. Muestre que el converso no es válido.