CAPITULO 5: DESCRIPCION DE ALGUNOS MODULOS

Anteriormente hemos dicho que las representaciones de carcajes son más manejables que los módulos pues se pueden "visualizar". Como ilustración de esto, pasaremos a dar descripciones diagramáticas de algunos módulos interesantes. Estudiaremos los módulos simples, los proyectivos inescindibles, sus radicales, y los módulos inyectivos inescindibles.

A lo largo de todo el capítulo (C,R) será un carcaj con relaciones y $\Lambda = kC/R$. Pondremos también $C_0 = \{1,\dots,n\}$.

§5.1 DESCRIPCION DE LOS MODULOS SIMPLES

Definición: Si j es uno de los vértices de C, denotaremos por S_j a la representación $S_j = ((S_j)_i,(f_\alpha))$ dada como sigue:

$$(S_j)_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ k & \text{si } i = j \end{cases}, \text{ y}$$

$$f_\alpha = 0, \text{ para toda } \alpha \in C_1.$$

Claramente, S_j es una representación de C sujeta a las relaciones de R (cualesquiera que estas sean) y, al no poseer ninguna sub-representación propia no trivial, es una representación simple de (C,R). A S_j suele llamársele el simple asociado al vértice j.

Notemos que $S_1,S_2,\dots,S_n$ son simples no isomorfos dos a dos (ver el ejercicio 4.A)

Por otro lado, puesto que Λ es una k-álgebra de dimensión finita, sabemos que existe una biyección entre cualquier sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos (en particular $\{\bar{\tau}_1,\ldots,\bar{\tau}_n\}$) y las clases de isomorfía de los Λ-módulos simples (ver 1.7.2). Se deduce entonces que Λ tiene exactamente n clases de isomorfía de simples.

Entonces $S_1,S_2,\ldots,S_n$ es una lista completa y sin repeticiones de todos los Λ-módulos simples.

5.1.1 Como consecuencia inmediata de lo anterior tenemos que Λ es básica. En efecto, tenemos la correspondencia uno a uno ya invocada entre las clases de isomorfía de los Λ-módulos simples y las clases de isomorfía de los Λ-módulos proyectivos inescindibles. Como vimos en la sección 1.2, éstas últimas son las clases de isomorfía de los módulos que aparecen en la descomposición de Λ en inescindibles: $\Lambda = \Lambda\bar{\tau}_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda\bar{\tau}_n$, de donde se sigue que Λ es básica. //

5.1.2 También se sigue de la descripción de los simples que una representación de (C,R), $M = ((M_i),(f_\alpha))$ es semisimple si y sólo si cada f_α es cero.

De hecho, M es semisimple si y sólo si
$M \cong \bigoplus_{i=1}^{n} (\dim_k M_i) S_i$. //

§5.2 DESCRIPCION DE LOS MODULOS PROYECTIVOS INESCINDIBLES

Bastará traducir cada $\Lambda\bar{\tau}_i$ a una representación

$$P_i = ((P_i)_j, (f_\alpha))$$

de $(C,\mathcal{R})$ mediante la equivalencia F descrita en (A) de la sección 4.3.

Se obtiene enseguida que:

$$(P_i)_j = \bar{\tau}_j \Lambda \bar{\tau}_i = (\tau_j kC\tau_i)/(\tau_j \mathcal{R}\tau_i).$$

5.2.1 En caso de que $\mathcal{R} = 0$, ó, más generalmente si no hay relaciones legibles de i a j, $(P_i)_j$ resulta ser el k-espacio vectorial con base todos los caminos dirigidos de i a j en C.

Si $\mathcal{R} \neq 0$ y si existe una relación legible que va del vértice i al vértice j, $(P_i)_j$ es un espacio vectorial de dimensión estrictamente menor al número de caminos de i a j.

Para cada flecha $\alpha\colon j \longrightarrow s$ de C, la aplicación lineal

$$f_\alpha\colon \tau_j kC\tau_i/\tau_j \mathcal{R}\tau_i \longrightarrow \tau_s kC\tau_i/\tau_s \mathcal{R}\tau_i$$

es tal que $f_\alpha(\bar{\gamma}) = \overline{\alpha\gamma}$ para todos los caminos γ de i a j.

Si $\mathcal{R} = 0$, f_α es siempre inyectiva, pero si $\mathcal{R} \neq 0$ f_α puede ser o no ser inyectiva.

Veamos un ejemplo. Consideremos el carcaj con relaciones $(C,\mathcal{R})$ de 2.3 (c).

Los $kC/\mathcal{R}$-módulos simples corresponden a $S_1, \ldots, S_6$ donde S_i es la representación con el campo k en el vértice i y 0 en los demás vértices. Por ejemplo:

$$S_4 = \begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&] \& 0 \arrow[dr] \& \& 0 \arrow[dl] \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] \& \& k \arrow[dr] \& \\ \& 0 \arrow[ur] \& \& 0 \arrow[u] \end{tikzcd} .$$

Daremos ahora la lista de los proyectivos inescindibles.

$$P_1 = \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & k \arrow[dr, "1"] & & 0 \arrow[dl] \\ k \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "1"'] & & k \arrow[dr] & \\ & k \arrow[ur, "1"'] & & 0 \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

$$P_2 = \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & k \arrow[dr, "1"] & & 0 \arrow[dl] \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr] & \\ & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

$$P_3 = \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & 0 \arrow[dr] & & k \arrow[dl, "0"'] \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "1"'] & \\ & k \arrow[ur, "1"'] & & k \arrow[uu, "1"'] \end{tikzcd}$$

$$P_4 = \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & 0 \arrow[dr] & & k \arrow[dl, "0"'] \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "1"'] & \\ & 0 \arrow[ur] & & k \arrow[uu, "1"'] \end{tikzcd}$$

$$P_5 = \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & 0 \arrow[dr] & & k\oplus k \arrow[dl, "{(1,0)}"'] \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "1"'] & \\ & 0 \arrow[ur] & & k \arrow[uu, "\binom{0}{1}"'] \end{tikzcd}$$

$$P_6 = \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & 0 \arrow[dr] & & k\oplus k \arrow[dl, "{(1,0)}"'] \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "\binom{0}{1}"'] & \\ & 0 \arrow[ur] & & k\oplus k \arrow[uu] \end{tikzcd} \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

§5.3 DESCRIPCION DE $\mathrm{rad}^m P_i$

Nos ocuparemos primero de describir $\mathrm{rad}P_i$.

Como en 5.2, bastará traducir $\mathrm{rad}(\Lambda\bar{\tau}_i)$ a una representación, que llamaremos

$$\mathrm{rad}P_i = ((\mathrm{rad}P_i)_j, (g_\alpha)) ,$$

mediante la equivalencia F.

Recordemos que, por un lado, $\mathrm{rad}(\Lambda\bar{\tau}_i) = (\mathrm{rad}\Lambda)\bar{\tau}_i$. Por otro lado $\mathrm{rad}\Lambda = \bar{\mathcal{F}}$, ya que $\mathcal{R}$ es admisible (ver 2.3.4).

Obtenemos entonces que

$$(\mathrm{rad}P_i)_j = \bar{\tau}_j\bar{\mathcal{F}}\bar{\tau}_i = \tau_j\mathcal{F}\tau_i/\tau_j\mathcal{R}\tau_i .$$

5.3.1 Es inmediato que, en caso de que $i \neq j$, $\tau_j\mathcal{F}\tau_i = \tau_j kC\tau_i$, de donde

$$(\mathrm{rad}P_i)_j = (P_i)_j \quad \text{si } i \neq j.$$

Notemos también que, para $i = j$, $(P_i)_i = \tau_i kC\tau_i/\tau_i R\tau_i =$ $= k\bar{\tau}_i \oplus \tau_i F\tau_i/\tau_i R\tau_i$; esto se debe a que $R \subseteq F^2 \subseteq F$ y muestra que

$$\dim_k(\mathrm{rad}P_i)_i = \dim_k(P_i)_i - 1,$$

lo que corresponde a haber eliminado el camino trivial τ_i.

Nótese que si C no tiene ciclos dirigidos que pasen por el vértice i, $(\mathrm{rad}P_i)_i = 0$.

Para cada flecha $\alpha\colon j \longrightarrow s$ en C, tenemos claramente que g_α es la restricción de f_α (ver ejercicio 4.A (b)).

Como ilustración de esto daremos la lista de los radicales de los proyectivos calculados en la sección anterior:

$$\mathrm{rad}P_1 = \begin{tikzcd} & k \arrow[dr, "1"] & & 0 \arrow[dl] \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr] & \\ & k \arrow[ur, "1"'] & & 0 \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{rad}P_2 = \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dl] \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr] & \\ & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[uu] \end{tikzcd} \qquad (= S_4)$$

$$\mathrm{rad}P_3 = \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr] & & k \arrow[dl, "0"'] \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "1"'] & \\ & 0 \arrow[ur] & & k \arrow[uu, "1"'] \end{tikzcd} \qquad (= P_4)$$

$$\mathrm{rad}P_4 = \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr] & & k \arrow[dl] \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & \\ & 0 \arrow[ur] & & k \arrow[uu, "1"'] \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{rad}P_5 = \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr] & & k \arrow[dl, "0"'] \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "1"'] & \\ & 0 \arrow[ur] & & k \arrow[uu, "1"'] \end{tikzcd} \qquad (= P_4)$$

$$\mathrm{rad}P_6 = \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr] & & k \oplus k \arrow[dl, "{(1,0)}"'] \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "1"'] & \\ & 0 \arrow[ur] & & k \arrow[uu, "\binom{0}{1}"'] \end{tikzcd} \qquad (= P_5)$$

Veamos ahora el caso en que $m \geqq 2$. Igual que antes, se obtiene que:

$$(\mathrm{rad}^m P_i)_j = \bar{\tau}_j \bar{F}^m \bar{\tau}_i = \tau_j (F^m + R)\tau_i / \tau_j R \tau_i.$$

Tenemos entonces que $(\mathrm{rad}^m P_i)_j$ es el subespacio vectorial de $(P_i)_j$ generado por las clases de los caminos de i a j con longitud mayor o igual a m.

En cuanto a la evaluación de $\mathrm{rad}^m P_i$ en cada flecha α, se trata claramente de la restricción de f_α a los subespacios correspondientes.

5.3.2 En caso de que $m = 2$, podemos ser más precisos: Si $j \neq i$, $(P_i)_j = \tau_j kC\tau_i / \tau_j R \tau_i = (\tau_j F^2 \tau_i / \tau_j R \tau_i) \oplus (\underset{\gamma}{\oplus} k\bar{\gamma})$, donde γ recorre las flechas de i a j; esto se debe a que $R \subseteq F^2$. Se deduce que, si $\#(i,j)$ es el número de flechas de i a j,

$$\dim_k (\mathrm{rad}^2 P_i)_j = \dim_k (P_i)_j - \#(i,j) \quad \text{si } i \neq j.$$

Para $j = i$, tenemos que $(P_i)_i = \tau_i kC\tau_i / \tau_i R \tau_i =$
$= \tau_i F^2 \tau_i / \tau_i R \tau_i \oplus k\bar{\tau}_i \oplus (\underset{\gamma}{\oplus} k\bar{\gamma})$, donde γ recorre los lazos en i; en consecuencia:

$$\dim_k (\mathrm{rad}^2 P_i)_i = \dim_k (P_i)_i - [\,\#(i,i) + 1\,].$$

§5.4 DESCRIPCION DE LOS MODULOS INYECTIVOS INESCINDIBLES

Por 1.E sabemos que si $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_n^*$ son los proyectivos inescindibles de $\mathrm{mod}\Lambda^{op}$, entonces $D(P_1^*), \ldots, D(P_n^*)$ son los inyectivos inescindibles de $\mathrm{mod}\Lambda$, donde $D: \mathrm{mod}\Lambda^{op} \longrightarrow \mathrm{mod}\Lambda$ es la dualidad de 1.E. (Intercambiando Λ por Λ^{op} en 1.E).

Por 5.2 sabemos cuáles representaciones de (C^*, R^*) co rresponden a $P_1^*,\ldots,P_n^*$, de modo que bastará aplicarles la dualidad D: $\mathrm{mod}(C^*,R^*) \longrightarrow \mathrm{mod}(C,R)$ descrita en 4.E.(Ahora hay que intercambiar (C,R) y (C^*,R^*) en 4.E).

Pongamos entonces

$$I_j := D(P_j^*) =: ((I_j)_i,(f_\alpha)).$$

Se obtiene, haciendo lo anteriormente dicho, que:

$$(I_j)_i = (P_j^*)_i^* = (\tau_i kC^*\tau_j/\tau_i R^*\tau_j)^* = (\tau_j kC\tau_i/\tau_j R\tau_i)^* \cong \tau_j kC\tau_i/\tau_j R\tau_i .$$

En caso de que $R = 0$, $(I_j)_i$ es el k-espacio vectorial con base todos los caminos de i a j.

Si $R \neq 0$ y existe una relación legible de R que vá del vértice i al j, la k-dimensión de $(I_j)_i$ es estrictamente menor que el número de caminos dirigidos de i a j.

Para cada flecha $\alpha: i \longrightarrow s$ en C, la aplicación lineal

$$f_\alpha: \tau_j kC\tau_i/\tau_j R\tau_i \longrightarrow \tau_j kC\tau_s/\tau_j R\tau_s$$

queda descrita por su acción en los generadores de $(I_j)_i$ como sigue:

Si γ es un camino de i a j, entonces:

$$f_\alpha(\bar{\gamma}) = \begin{cases} \bar{\gamma}' & \text{si existe un camino } \gamma' \text{ de } s \text{ a } j \\ & \text{tal que } \gamma = \gamma'\alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como ilustración, consideremos nuevamente el ejemplo de 5.2. Daremos la lista de los inyectivos inescindibles.

$$I_1 = \begin{tikzcd}[row sep=small] & 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dl] \\ k \arrow[ur] \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & \\ & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[uu] \end{tikzcd} \quad (= S_1)$$

$$I_2 = \begin{tikzcd}[row sep=small] & k \arrow[dr] & & 0 \arrow[dl] \\ k \arrow[ur, "1"] \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & \\ & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

$$I_3 = \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dl] \\ k \arrow[ur] \arrow[dr, "1"'] & & 0 \arrow[dr] & \\ & k \arrow[ur] & & 0 \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

$$I_4 = \begin{tikzcd} & k \arrow[dr, "1"] & & k \arrow[dl, "1"'] \\ k \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "1"'] & & k \arrow[dr, "0"'] & \\ & k \arrow[ur, "1"'] & & k \arrow[uu, "1"'] \end{tikzcd}$$

$$I_5 = \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr] & & k\oplus k \arrow[dl, "{(1,0)}"'] \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "\binom{0}{1}"'] & \\ & k \arrow[ur] & & k\oplus k \arrow[uu, "1"'] \end{tikzcd}$$

$$I_6 = \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr] & & k \arrow[dl, "1"'] \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "\binom{1}{0}"'] & \\ & k \arrow[ur, "1"'] & & k\oplus k \arrow[uu, "{(0,1)}"'] \end{tikzcd}$$

EJERCICIOS DEL CAPITULO 5

5.A (1) Calcule los radicales cuadrados de los proyectivos encontrados en el ejemplo 5.2.

(2) Sea C el siguiente carcaj

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 4 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \delta \\ 2 & \xrightarrow{\gamma} & 5 \\ \downarrow \beta & & \downarrow \varepsilon \\ 3 & & 6 \end{array}$$

y consideremos las relaciones $\varepsilon\gamma = 0$, $\varepsilon\delta = 0$. Describa los simples, los proyectivos inescindibles, sus radicales cuadrados y los inyectivos inescindibles.

5.B Sea (C,R) el carcaj con relaciones de 2.D. Pruebe que:

(1) $\{\bar{\gamma}$ / γ es camino de i a j de longitud menor que $\ell(i)\}$ es base de $(P_i)_j$ y de $(I_j)_i$.

(2) El único submódulo simple de P_i es S_j, donde $j + 1 \equiv i + \ell(i) \bmod n$.

5.C Un vértice i de C es un pozo de C si ninguna flecha de C se inicia en i. Dualmente, diremos que i es una fuente de C si ninguna flecha de C finaliza en i. Para un carcaj con relaciones (C,R) arbitrario,

(1) Demuestre que el proyectivo P_i es simple si y sólo si i es un pozo de C.

(2) Demuestre que el inyectivo I_j es simple si y sólo si j es una fuente de C.

(3) Caracterice los vértices i tales que P_i tiene radical simple.

5.D (1) La cubierta proyectiva del simple S_i es P_i.

(2) Dualice el concepto de cubierta proyectiva para obtener el de "cápsula inyectiva" (el dual de un epimorfismo superfluo se llama "monomorfismo esencial"). Pruebe que la cápsula inyectiva del simple S_j es I_j.

5.E Usando 5.1.2 y las fórmulas de 5.3 pruebe que

$$\mathrm{rad}P_i/\mathrm{rad}^2P_i = \bigoplus_{j \in C_0} \#(i,j)S_j,$$

donde por mS debe entenderse la suma directa de m copias de S (si m = 0, mS := 0). Concluya que la cubierta proyectiva de $\mathrm{rad}P_i/\mathrm{rad}^2P_i$ es $\bigoplus_{j \in C_0} \#(i,j)P_j$.

5.F En la situación de 5.B pruebe que P_i es inyectivo si y sólo si $\gamma_i^{\ell(i)-1}$ es el más largo camino que llega a j y que no está en R. (Esta j es la de 5.B(2)). Sugerencia:

P_i es inyectivo si y sólo si $P_i \cong I_j$, pero en todo caso se tiene un monomorfismo ϕ: $P_i \hookrightarrow I_j$. Si se cumple la condición, pruebe que $\gamma_i^{\ell} \longmapsto \gamma_x^{\ell'}$ define, para todo $x \in C_0$, una biyección de la base de $(P_i)_x$ a la de $(I_j)_x$, donde $\ell' = \ell(i) - (\ell + 1)$. Recíprocamente, si ϕ es isomorfismo se tendrá, en particular, que $(P_i)_{i'} \cong (I_j)_{i'}$, donde i' es el origen de la única flecha que llega a i.

5.G Un conocido resultado de M. Auslander nos asegura que si

Λ es un anillo artiniano podemos calcular su dimensión global proyectiva como el supremo de las dimensiones proyectivas de los Λ-módulos simples (ver [J1], p. 56). Calcule la dimensión global proyectiva de $\Lambda = kC/R$ para (C,R) igual a:

(1) el carcaj con relaciones de 5.A(2).

(2) el carcaj $C = 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow n$ sin relaciones (i.e. $R = 0$).

(3) el carcaj

$$C = \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl] \\ & 4 & \end{tikzcd}$$, con la relación de conmutatividad.

(4) el carcaj de 2.D con $R = F^m$, $m \geq 2$. En este caso, pruebe que la dimensión global proyectiva es infinita .

<u>5.H</u> (1) Supongamos que Λ es de radical cuadrado cero (ver 3.F). Pruebe que la dimensión global proyectiva de Λ es el supremo de las longitudes de los caminos dirigidos en C. En particular un álgebra Λ con radical cuadrado cero tiene dimensión global proyectiva finita si y sólo si es cociente de hereditaria (ver 6.2).

(2) Pruebe que si C no tiene ciclos dirigidos, la dimensión global proyectiva de Λ está acotada por la longitud del más largo camino dirigido en C.

<u>5.I</u> Sea C un carcaj arbitrario con n vértices.

(1) Usando 4.D(1), pruebe que si C tiene algún ciclo dirigido, entonces hay más de n simples en Mod(kC).

(2) Usando el concepto de anillo semiperfecto ([A-F'], p. 303) y el Teorema 27.10 de [A-F] (p. 306), deduzca de (1) que si radkC = F, entonces C no tiene ciclos dirigidos. (Comparar con 2.2.4).