

## CAPITULO 5: DESCRIPCION DE ALGUNOS MODULOS

Anteriormente hemos dicho que las representaciones de carcajes son más manejables que los módulos pues se pueden "visualizar". Como ilustración de esto, pasaremos a dar descripciones diagramáticas de algunos módulos interesantes. Estudiaremos los módulos simples, los proyectivos inescindibles, sus radicales, y los módulos inyectivos inescindibles.

A lo largo de todo el capítulo  $(C,R)$  será un carcaj con relaciones y  $\Lambda = kC/R$ . Pondremos también  $C_0 = \{1, \dots, n\}$ .

### §5.1 DESCRIPCION DE LOS MODULOS SIMPLES

Definición: Si  $j$  es uno de los vértices de  $C$ , denotaremos por  $S_j$  a la representación  $S_j = ((S_j)_i, (f_\alpha))$  dada como sigue:

$$(S_j)_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ k & \text{si } i = j \end{cases}, \text{ y}$$
$$f_\alpha = 0, \text{ para toda } \alpha \in C_1.$$

Claramente,  $S_j$  es una representación de  $C$  sujeta a las relaciones de  $R$  (cualesquiera que estas sean) y, al no poseer ninguna sub-representación propia no trivial, es una representación simple de  $(C,R)$ . A  $S_j$  suele llamársele el simple asociado al vértice  $j$ .

Notemos que  $S_1, S_2, \dots, S_n$  son simples no isomorfos dos a dos (ver el ejercicio 4.A)

Por otro lado, puesto que  $\Lambda$  es una  $k$ -álgebra de dimensión finita, sabemos que existe una biyección entre cualquier sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos (en particular  $\{\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_n\}$ ) y las clases de isomorfía de los  $\Lambda$ -módulos simples (ver 1.7.2). Se deduce entonces que  $\Lambda$  tiene exactamente  $n$  clases de isomorfía de simples.

Entonces  $S_1, S_2, \dots, S_n$  es una lista completa y sin repeticiones de todos los  $\Lambda$ -módulos simples.

5.1.1 Como consecuencia inmediata de lo anterior tenemos que  $\Lambda$  es básica. En efecto, tenemos la correspondencia uno a uno ya invocada entre las clases de isomorfía de los  $\Lambda$ -módulos simples y las clases de isomorfía de los  $\Lambda$ -módulos proyectivos inescindibles. Como vimos en la sección 1.2, éstas últimas son las clases de isomorfía de los módulos que aparecen en la descomposición de  $\Lambda$  en inescindibles:  $\Lambda = \Lambda\bar{\tau}_1 \oplus \dots \oplus \Lambda\bar{\tau}_n$ , de donde se sigue que  $\Lambda$  es básica. //

5.1.2 También se sigue de la descripción de los simples que una representación de  $(C, R)$ ,  $M = ((M_i), (f_\alpha))$  es semisimple si y sólo si cada  $f_\alpha$  es cero.

De hecho,  $M$  es semisimple si y sólo si

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^n (\dim_k M_i) S_i. \quad //$$

## § 5.2 DESCRIPCION DE LOS MODULOS PROYECTIVOS INESCINDIBLES

Bastará traducir cada  $\Lambda\bar{\tau}_i$  a una representación

$$P_i = ((P_i)_j, (f_\alpha))$$

de  $(C, R)$  mediante la equivalencia  $F$  descrita en (A) de la sección 4.3.

Se obtiene enseguida que:

$$(P_i)_j = \bar{\tau}_j \wedge \bar{\tau}_i = (\tau_j k C \tau_i) / (\tau_j R \tau_i).$$

5.2.1 En caso de que  $R = 0$ , ó, más generalmente si no hay relaciones legibles de  $i$  a  $j$ ,  $(P_i)_j$  resulta ser el  $k$ -espacio vectorial con base todos los caminos dirigidos de  $i$  a  $j$  en  $C$ .

Si  $R \neq 0$  y si existe una relación legible que va del vértice  $i$  al vértice  $j$ ,  $(P_i)_j$  es un espacio vectorial de dimensión estrictamente menor al número de caminos de  $i$  a  $j$ .

Para cada flecha  $\alpha: j \rightarrow s$  de  $C$ , la aplicación lineal

$$f_\alpha: \tau_j k C \tau_i / \tau_j R \tau_i \longrightarrow \tau_s k C \tau_i / \tau_s R \tau_i$$

es tal que  $f_\alpha(\bar{\gamma}) = \overline{\alpha\gamma}$  para todos los caminos  $\gamma$  de  $i$  a  $j$ .

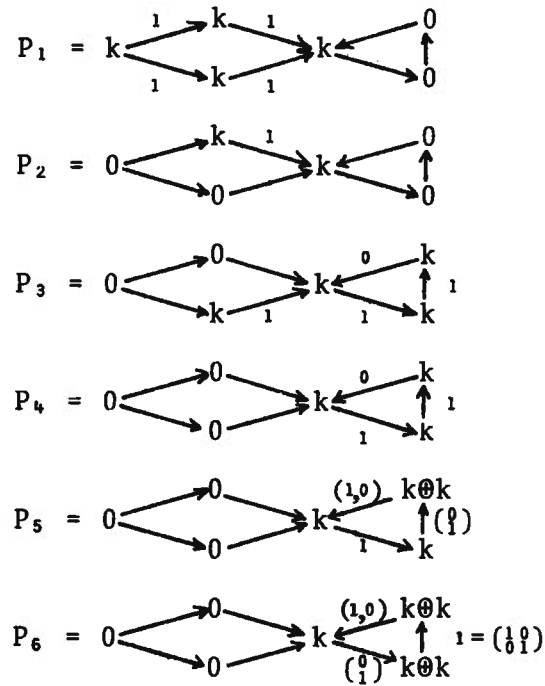
Si  $R = 0$ ,  $f_\alpha$  es siempre inyectiva, pero si  $R \neq 0$   $f_\alpha$  puede ser o no ser inyectiva.

Veamos un ejemplo. Consideremos el carcaj con relaciones  $(C, R)$  de 2.3 (c).

Los  $kC/R$ -módulos simples corresponden a  $S_1, \dots, S_6$  donde  $S_i$  es la representación con el campo  $k$  en el vértice  $i$  y 0 en los demás vértices. Por ejemplo:

$$S_4 = \begin{array}{ccccc} & & 0 & & 0 \\ & \nearrow & & \searrow & \uparrow \\ 0 & & & & k \\ & \searrow & & \nearrow & \downarrow \\ & & 0 & & 0 \end{array} .$$

Daremos ahora la lista de los proyectivos inescindibles.



§ 5.3 DESCRIPCION DE  $\text{rad}^m P_i$

Nos ocuparemos primero de describir  $\text{rad} P_i$ .

Como en 5.2, bastará traducir  $\text{rad}(\Lambda \bar{\tau}_i)$  a una representación, que llamaremos

$$\text{rad} P_i = ((\text{rad} P_i)_j, (g_\alpha)) ,$$

mediante la equivalencia F.

Recordemos que, por un lado,  $\text{rad}(\Lambda \bar{\tau}_i) = (\text{rad} \Lambda) \bar{\tau}_i$ . Por otro lado  $\text{rad} \Lambda = \bar{F}$ , ya que R es admisible (ver 2.3.4).

Obtenemos entonces que

$$(\text{rad} P_i)_j = \bar{\tau}_j \bar{F} \bar{\tau}_i = \tau_j F \tau_i / \tau_j R \tau_i .$$

5.3.1 Es inmediato que, en caso de que  $i \neq j$ ,  $\tau_j F \tau_i = \tau_j k C \tau_i$ , de donde

$$(\text{rad}P_i)_j = (P_i)_j \quad \text{si } i \neq j.$$

Notemos también que, para  $i = j$ ,  $(P_i)_i = \tau_i k C \tau_i / \tau_i R \tau_i = k \bar{\tau}_i \otimes \tau_i F \tau_i / \tau_i R \tau_i$ ; esto se debe a que  $R \subseteq F^2 \subseteq F$  y muestra que

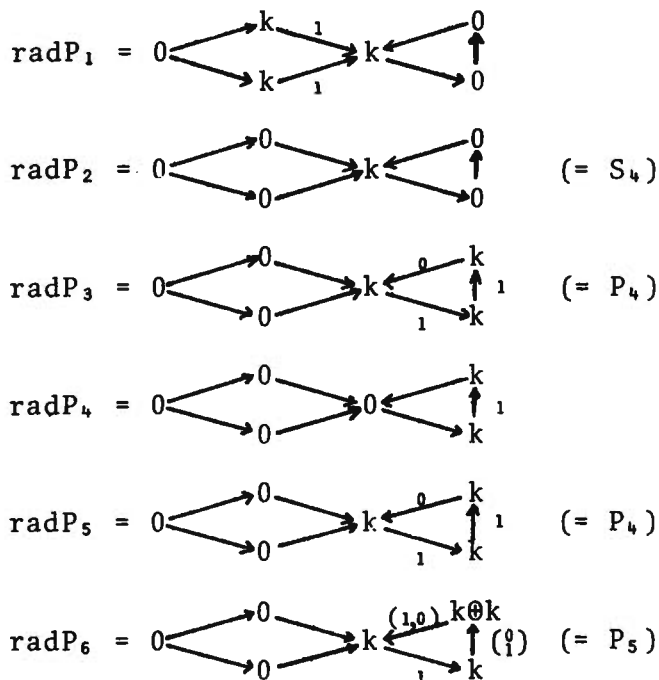
$$\dim_k (\text{rad}P_i)_i = \dim_k (P_i)_i - 1,$$

lo que corresponde a haber eliminado el camino trivial  $\tau_i$ .

Nótese que si  $C$  no tiene ciclos dirigidos que pasen por el vértice  $i$ ,  $(\text{rad}P_i)_i = 0$ .

Para cada flecha  $\alpha: j \rightarrow s$  en  $C$ , tenemos claramente que  $g_\alpha$  es la restricción de  $f_\alpha$  (ver ejercicio 4.A (b)).

Como ilustración de esto daremos la lista de los radicales de los proyectivos calculados en la sección anterior:



Veamos ahora el caso en que  $m \geq 2$ . Igual que antes, se obtiene que:

$$(\text{rad}^m P_i)_j = \bar{\tau}_j \bar{F}^m \bar{\tau}_i = \tau_j (F^m + R) \tau_i / \tau_j R \tau_i.$$

Tenemos entonces que  $(\text{rad}^m P_i)_j$  es el subespacio vectorial de  $(P_i)_j$  generado por las clases de los caminos de  $i$  a  $j$  con longitud mayor o igual a  $m$ .

En cuanto a la evaluación de  $\text{rad}^m P_i$  en cada flecha  $\alpha$ , se trata claramente de la restricción de  $f_\alpha$  a los subespacios correspondientes.

5.3.2 En caso de que  $m = 2$ , podemos ser más precisos: Si  $j \neq i$ ,  $(P_i)_j = \tau_j k C \tau_i / \tau_j R \tau_i = (\tau_j F^2 \tau_i / \tau_j R \tau_i) \oplus (\oplus_{\gamma} k \bar{\gamma})$ , donde  $\gamma$  recorre las flechas de  $i$  a  $j$ ; esto se debe a que  $R \subseteq F^2$ . Se deduce que, si  $\#(i, j)$  es el número de flechas de  $i$  a  $j$ ,

$$\dim_k (\text{rad}^2 P_i)_j = \dim_k (P_i)_j - \#(i, j) \quad \text{si } i \neq j.$$

Para  $j = i$ , tenemos que  $(P_i)_i = \tau_i k C \tau_i / \tau_i R \tau_i = \tau_i F^2 \tau_i / \tau_i R \tau_i \oplus k \bar{\tau}_i \oplus (\oplus_{\gamma} k \bar{\gamma})$ , donde  $\gamma$  recorre los lazos en  $i$ ; en consecuencia:

$$\dim_k (\text{rad}^2 P_i)_i = \dim_k (P_i)_i - [\#(i, i) + 1].$$

#### § 5.4 DESCRIPCIÓN DE LOS MÓDULOS INYECTIVOS INESCINDIBLES

Por 1.E sabemos que si  $P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*$  son los proyectivos inescindibles de  $\text{mod } \Lambda^{\text{op}}$ , entonces  $D(P_1^*), \dots, D(P_n^*)$  son los inyectivos inescindibles de  $\text{mod } \Lambda$ , donde  $D: \text{mod } \Lambda^{\text{op}} \longrightarrow \text{mod } \Lambda$  es la dualidad de 1.E. (Intercambiando  $\Lambda$  por  $\Lambda^{\text{op}}$  en 1.E).

Por 5.2 sabemos cuáles representaciones de  $(C^*, R^*)$  co

responden a  $P_1^*, \dots, P_n^*$ , de modo que bastará aplicarles la dualidad  $D: \text{mod}(C^*, R^*) \longrightarrow \text{mod}(C, R)$  descrita en 4.E. (Ahora hay que intercambiar  $(C, R)$  y  $(C^*, R^*)$  en 4.E).

Pongamos entonces

$$I_j := D(P_j^*) =: ((I_j)_i, (f_\alpha)).$$

Se obtiene, haciendo lo anteriormente dicho, que:

$$(I_j)_i = (P_j^*)_i^* = (\tau_i k C^* \tau_j / \tau_i R^* \tau_j)^* = (\tau_j k C \tau_i / \tau_j R \tau_i)^* \cong \tau_j k C \tau_i / \tau_j R \tau_i.$$

En caso de que  $R = 0$ ,  $(I_j)_i$  es el  $k$ -espacio vectorial con base todos los caminos de  $i$  a  $j$ .

Si  $R \neq 0$  y existe una relación legible de  $R$  que vá del vértice  $i$  al  $j$ , la  $k$ -dimensión de  $(I_j)_i$  es estrictamente menor que el número de caminos dirigidos de  $i$  a  $j$ .

Para cada flecha  $\alpha: i \longrightarrow s$  en  $C$ , la aplicación lineal

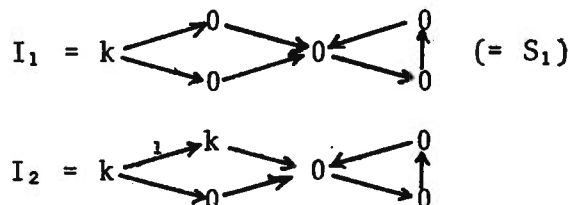
$$f_\alpha: \tau_j k C \tau_i / \tau_j R \tau_i \longrightarrow \tau_j k C \tau_s / \tau_j R \tau_s$$

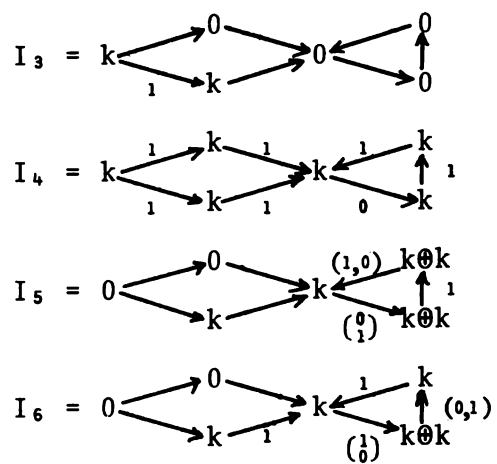
queda descrita por su acción en los generadores de  $(I_j)_i$  como sigue:

Si  $\gamma$  es un camino de  $i$  a  $j$ , entonces:

$$f_\alpha(\bar{\gamma}) = \begin{cases} \bar{\gamma}' & \text{si existe un camino } \gamma' \text{ de } s \text{ a } j \\ \text{tal que } \gamma = \gamma' \alpha & \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como ilustración, consideremos nuevamente el ejemplo de 5.2. Daremos la lista de los inyectivos inescindibles.



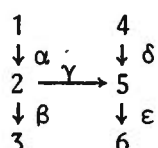




EJERCICIOS DEL CAPITULO 5

5.A (1) Calcule los radicales cuadrados de los proyectivos encontrados en el ejemplo 5.2.

(2) Sea C el siguiente carcaj



y consideremos las relaciones  $\epsilon\gamma = 0$ ,  $\epsilon\delta = 0$ . Describa los simples, los proyectivos inescindibles, sus radicales cuadrados y los inyectivos inescindibles.

5.B Sea  $(C, \mathcal{R})$  el carcaj con relaciones de 2.D. Pruebe que:

- (1)  $\{\bar{\gamma} / \gamma$  es camino de  $i$  a  $j$  de longitud menor que  $\ell(i)\}$  es base de  $(P_i)_j$  y de  $(I_j)_i$ .
- (2) El único submódulo simple de  $P_i$  es  $S_j$ , donde  $j + 1 \equiv i + \ell(i) \pmod{n}$ .

5.C Un vértice  $i$  de  $C$  es un pozo de  $C$  si ninguna flecha de  $C$  se inicia en  $i$ . Dualmente, diremos que  $i$  es una fente de  $C$  si ninguna flecha de  $C$  finaliza en  $i$ . Para un carcaj con relaciones  $(C, \mathcal{R})$  arbitrario,

- (1) Demuestre que el proyectivo  $P_i$  es simple si y sólo si  $i$  es un pozo de  $C$ .
- (2) Demuestre que el inyectivo  $I_j$  es simple si y sólo si  $j$  es una fente de  $C$ .

- (3) Caracterice los vértices  $i$  tales que  $P_i$  tiene radical simple.

5.D (1) La cubierta proyectiva del simple  $S_i$  es  $P_i$ .

(2) Dualice el concepto de cubierta proyectiva para obtener el de "cápsula inyectiva" (el dual de un epimorfismo superfluo se llama "monomorfismo esencial"). Pruebe que la cápsula inyectiva del simple  $S_j$  es  $I_j$ .

5.E Usando 5.1.2 y las fórmulas de 5.3 pruebe que

$$\text{rad}P_i / \text{rad}^2P_i = \bigoplus_{j \in C_0} \#(i,j)S_j,$$

donde por  $mS$  debe entenderse la suma directa de  $m$  copias de  $S$  (si  $m = 0$ ,  $mS := 0$ ). Concluya que la cubierta proyectiva de  $\text{rad}P_i / \text{rad}^2P_i$  es  $\bigoplus_{j \in C_0} \#(i,j)P_j$ .

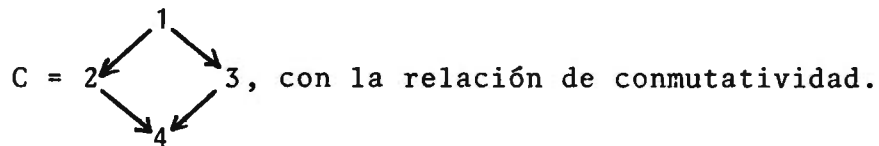
5.F En la situación de 5.B pruebe que  $P_i$  es inyectivo si y sólo si  $\gamma_i^{\ell(i)-1}$  es el más largo camino que llega a  $j$  y que no está en  $R$ . (Esta  $j$  es la de 5.B(2)). Sugerencia:

$P_i$  es inyectivo si y sólo si  $P_i \simeq I_j$ , pero en todo caso se tiene un monomorfismo  $\phi: P_i \hookrightarrow I_j$ . Si se cumple la condición, pruebe que  $\gamma_i^{\ell} \longrightarrow \gamma_x^{\ell'}$  define, para todo  $x \in C_0$ , una biyección de la base de  $(P_i)_x$  a la de  $(I_j)_x$ , donde  $\ell' = \ell(i) - (\ell + 1)$ . Recíprocamente, si  $\phi$  es isomorfismo se tendrá, en particular, que  $(P_i)_{i'} \simeq (I_j)_{i'}$ , donde  $i'$  es el origen de la única flecha que llega a  $i$ .

5.G Un conocido resultado de M. Auslander nos asegura que si

$\Lambda$  es un anillo artiniiano podemos calcular su dimensión global proyectiva como el supremo de las dimensiones proyectivas de los  $\Lambda$ -módulos simples (ver [J1], p. 56). Calcule la dimensión global proyectiva de  $\Lambda = kC/R$  para  $(C,R)$  igual a:

- (1) el carcaj con relaciones de 5.A(2).
- (2) el carcaj  $C = 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n$  sin relaciones (i.e.  $R = 0$ ).
- (3) el carcaj



- (4) el carcaj de 2.D con  $R = F^m$ ,  $m \geq 2$ . En este caso, pruebe que la dimensión global proyectiva es infinita .

5.H (1) Supongamos que  $\Lambda$  es de radical cuadrado cero (ver 3.F). Pruebe que la dimensión global proyectiva de  $\Lambda$  es el supremo de las longitudes de los caminos dirigidos en  $C$ . En particular un álgebra  $\Lambda$  con radical cuadrado cero tiene dimensión global proyectiva finita si y sólo si es cociente de hereditaria (ver 6.2).

(2) Pruebe que si  $C$  no tiene ciclos dirigidos, la dimensión global proyectiva de  $\Lambda$  está acotada por la longitud del más largo camino dirigido en  $C$ .

5.I Sea  $C$  un carcaj arbitrario con  $n$  vértices.

(1) Usando 4.D(1), pruebe que si  $C$  tiene algún ciclo dirigido, entonces hay más de  $n$  simples en  $\text{Mod}(kC)$ .

(2) Usando el concepto de anillo semiperfecto ([A-F], p. 303) y el Teorema 27.10 de [A-F] (p. 306), deduzca de (1) que si  $\text{rad}kC = F$ , entonces  $C$  no tiene ciclos dirigidos. (Comparar con 2.2.4).