CAPITULO 4: REPRESENTACIONES DE CARCAJES

Nuestro objeto de estudio es una k-álgebra Λ de dimensión finita. Hemos dicho ya que lo que nos interesa de Λ son las propiedades categóricas de modΛ, por lo que hemos podido suponer que Λ es básica e indescomponible.

Por el capítulo anterior, sabemos que $\Lambda \cong kC/R$ para algún carcaj C (que sabemos construir a partir de Λ) y algún ideal admisible R de kC. (R no es único, pero todos los posibles se obtienen haciendo, de todas las formas posibles, las elecciones previas a la definición de ϕ, ver 3.2.1).

Ahora bien, ¿de qué nos sirve esto, si lo que queremos es estudiar modΛ ? En este capítulo veremos que los Λ-módulos se pueden "visualizar" sobre el carcaj C, y en el capítulo siguiente veremos que muchos módulos importantes (proyectivos, simples, etc.) son susceptibles de "visualizaciones" particularmente sencillas.

Durante todo este capítulo, C es un carcaj arbitrariamente dado, R es un ideal admisible de kC y $\Lambda = kC/R$.

§4.1 ALGO SOBRE IDEALES ADMISIBLES

Habiendo mostrado ya la razón de nuestro interés en los ideales admisibles, pasaremos a describirlos un poco mejor. Veremos en esta sección que es posible elegir un "buen" sistema de generadores para R.

<u>Observación</u>: En general, kC no es un anillo noetheriano, como se vé en el caso particular en que C es el carcaj siguiente:

En efecto, $\langle\alpha\rangle \subsetneq \langle\alpha,\alpha\beta\rangle \subsetneq \langle\alpha,\alpha\beta,\alpha\beta^2\rangle \subsetneq \ldots$ es un cadena ascendente no estacionaria de ideales izquierdos.

No hay entonces, a priori, ninguna razón para esperar que los ideales de kC sean finitamente generados. Sin embargo, veremos que los ideales admisibles sí lo son:

<u>4.1.1</u> *R es un ideal finitamente generado de* kC.

En efecto, sabemos que para alguna n se tiene una sucesión exacta $0 \longrightarrow F^n \hookrightarrow R \longrightarrow R/F^n \longrightarrow 0$. F^n es kC-módulo finitamente generado (por los caminos de longitud n), de modo que para ver que R es finitamente generado basta ver que R/F^n lo es. Pero esto sucede efectivamente, ya que $R/F^n \subseteq kC/F^n$ y este último es de k-dimensión finita (una base está formada por los caminos de longitud menor que n), de donde R/F^n es de dimensión finita y, por tanto, finitamente generado. //

Persiguiendo la idea de poder "leer" a R sobre el carcaj mismo, vamos a someter a los generadores a algunas manipulaciones. Primero veamos la siguiente

<u>Definición</u>: Una <u>relación</u> ρ es un elemento no nulo $\rho \in R$. Entonces ρ es una combinación k-lineal de caminos de longitud

mayor o igual a dos. En caso de que los caminos que constituyen a ρ (i.e., aquellos con coeficiente distinto de cero) tengan todos el mismo punto de partida y el mismo punto final (digamos i y j), diremos que la relación ρ es <u>legible</u> o, más explícitamente, que es una relación <u>legible de i a j</u>.

Ahora, por 4.1.1, podemos tomar un conjunto finito de kC-generadores de R, $\{\rho_1,\ldots,\rho_m\}$. En principio, estas relaciones no tienen por que ser legibles, pero cada $\tau_j \rho_t \tau_i$ es legible si no es el cero de kC. Como $\rho_t = \sum_{i,j} \tau_j \rho_t \tau_i$ para toda t, es muy fácil comprobar que $\{\tau_j \rho_t \tau_i \neq 0 \,/\, t=1,\ldots,m;\ i,j=1,\ldots,n\}$ es también un conjunto de generadores de R. Tenemos entonces el siguiente resultado:

<u>4.1.2</u> R *posee un* <u>sistema legible de generadores</u>, *es decir, un conjunto finito de* kC-*generadores que son relaciones legibles.* //

<u>4.1.3</u> Al par (C,R), donde C es cualquier carcaj y R es un ideal admisible de kC, se le suele llamar un <u>carcaj con relaciones</u>. Si $\{\rho_1,\ldots,\rho_m\}$ es un sistema legible de generadores de R, también se le llama carcaj con relaciones a $(C;\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)$, ó, más expresivamente, $(C;\rho_1=\rho_2=\ldots=\rho_m=0)$. Es más bien de esta segunda manera como suelen presentarse, en la práctica, los carcajes con relaciones.

§4.2 REPRESENTACIONES DE CARCAJES CON RELACIONES

En esta sección daremos sólo una lista de definiciones y un ejemplo. En la sección siguiente veremos que lo hecho en ésta es "visualizar" los Λ-módulos.

4.2.1 Una k-representación (o, sencillamente, une representación) del carcaj C es una pareja $V = ((V_i),(f_\alpha))$ que consta de una familia de k-espacios vectoriales V_i, uno por cada vértice i de C, y una familia de transformaciones f_α, una por cada flecha α de C. Desde luego, se exige que si α es una flecha de i a j (abreviadamente, "si $\alpha: i \longrightarrow j$ "), entonces $f_\alpha: V_i \longrightarrow V_j$.

4.2.2 Un morfismo de representaciones $\phi: V \longrightarrow V'$ es una familia $\phi = (\phi_i) = (\phi_i: V_i \longrightarrow V'_i)$ de transformaciones lineales, una por cada vértice i de C, tales que para cada flecha $\alpha: i \longrightarrow j$ en C, conmuta el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{f_\alpha} & V_j \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_i} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_j} \\ V'_i & \xrightarrow{f'_\alpha} & V'_j \end{array},$$

o sea que $\phi_j f_\alpha = f'_\alpha \phi_i$ para toda $\alpha: i \longrightarrow j$ en C.

4.2.3 Si V es una representación de C y $\gamma = (j|\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1|i)$ es un camino dirigido no trivial de C, podemos evaluar V en γ como sigue:

$$V(\gamma) := f_{\alpha_n} \circ f_{\alpha_{n-1}} \circ \ldots \circ f_{\alpha_1} ,$$

siendo entonces $V(\gamma): V_i \longrightarrow V_j$ una transformación lineal.

Si $\rho = \Sigma\, \lambda_\gamma \gamma$ es una relación legible, digamos de i a j, aún tiene sentido <u>evaluar V en ρ</u> poniendo:

$$V(\rho) = \Sigma\, \lambda_\gamma V(\gamma) \ ,$$

y, nuevamente, $V(\rho): V_i \longrightarrow V_j$ es lineal.

<u>4.2.4</u> Sea V una representación de C y ρ una relación legible de R. Diremos que V <u>satisface</u> ρ si la anula, es decir, si $V(\rho) = 0$. Diremos que V <u>satisface</u> R si V satisface cada relación legible de R.

La importancia de 4.1.2 radica en lo siguiente:

<u>Lema</u>: *Sea* $\{\rho_1,\ldots,\rho_m\}$ *cualquier sistema legible de generadores para* R. *Entonces la representación* V *satisface* R *si y sólo si* V *satisface* ρ_i *para* $i = 1,\ldots,m$. //

Entonces, para ver si V satisface R, hay que hacer solo un número finito de cálculos, y el resultado no dependerá del sistema legible de generadores de R que tengamos.

Si V satisface R suele decirse que V es una representación de C <u>sujeta</u> a las relaciones de R, o que es una representación del carcaj con relaciones (C,R); si $\{\rho_1,\ldots,\rho_m\}$ es un sistema legible de generadores de R, también suele decirse, en virtud de lo anterior, que V es una representación de C sujeta a las relaciones $\rho_1 = 0, \rho_2 = 0, \ldots, \rho_m = 0$, o que es una representación de $(C;\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)$.

4.2.5 Denotaremos por $\mathrm{Mod}(C,R)$ a la categoría cuyos objetos son las representaciones de (C,R) y cuyos morfismos son los morfismos de representaciones, con la composición evidente ("por coordenadas").

Denotaremos por $\mathrm{mod}(C,R)$ a la subcategoría plena de $\mathrm{Mod}(C,R)$ cuyos objetos son los objetos V de $\mathrm{Mod}(C,R)$ tales que V_i es de k-dimensión finita para todo vértice i de C.

Para finalizar la sección, veamos un ejemplo.

Sea C el carcaj siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr, "\beta"] & & 5 \arrow[dl, "\gamma"'] \\
1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & 4 \arrow[dr, "\eta"'] & \\
 & 3 \arrow[ur, "\zeta"'] & & 6 \arrow[uu, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

Vimos en 2.3(c) que $R = \langle \beta\alpha - \zeta\varepsilon, \eta\beta, \gamma\delta\eta \rangle$ es un ideal admisible de kC.

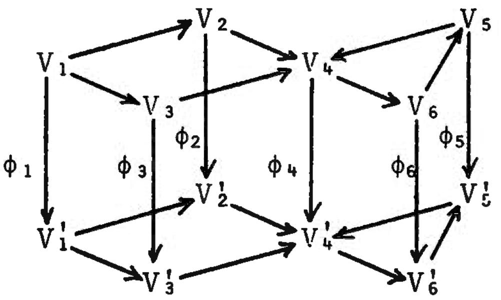
Ciertamente, $\{\beta\alpha - \zeta\varepsilon, \eta\beta, \gamma\delta\eta\}$ es un sistema legible de generadores para R. $\beta\alpha - \zeta\varepsilon$ es una <u>relación de conmutatividad</u> (una relación legible que es diferencia de dos caminos), $\eta\beta$ y $\gamma\delta\eta$ son <u>relaciones cero</u> (constan de un solo camino).

Un objeto de $\mathrm{Mod}(C,R)$ es una pareja $V = ((V_1,\ldots,V_6),(f_\alpha,\ldots,f_\eta))$, donde $V_1,\ldots,V_6$ son k-espacios vectoriales, $f_\alpha\colon V_1 \longrightarrow V_2$, $f_\beta\colon V_2 \longrightarrow V_4$, $f_\gamma\colon V_5 \longrightarrow V_4$, $f_\delta\colon V_6 \longrightarrow V_5$, $f_\varepsilon\colon V_1 \longrightarrow V_3$, $f_\zeta\colon V_3 \longrightarrow V_4$ y $f_\eta\colon V_4 \longrightarrow V_6$ son transformaciones lineales y $f_\beta f_\alpha - f_\zeta f_\varepsilon = 0$, $f_\eta f_\beta = 0$ y $f_\gamma f_\delta f_\eta = 0$. Dicho de manera más cómoda, V es un diagrama de espacios vectoriales y transformaciones lineales

$$\begin{tikzcd}
 & V_2 \arrow[dr, "f_\beta"] & & V_5 \arrow[dl, "f_\gamma"'] \\
V = V_1 \arrow[ur, "f_\alpha"] \arrow[dr, "f_\varepsilon"'] & & V_4 \arrow[dr, "f_\eta"'] & \\
 & V_3 \arrow[ur, "f_\zeta"'] & & V_6 \arrow[uu, "f_\delta"']
\end{tikzcd}$$

tal que el cuadro izquierdo conmuta y $f_\eta f_\beta, f_\gamma f_\delta f_\eta$ son cero.

Si V' es otra representación, un morfismo ϕ: $V \longrightarrow V'$ es un familia $(\phi_i: V_i \longrightarrow V'_i)_{i=1}^{6}$ de aplicaciones lineales tales que $\phi_2 f_\alpha = f'_\alpha \phi_1, \phi_1 f_\beta = f'_\beta \phi_3$, $\phi_4 f_\gamma = f'_\gamma \phi_5$, $\phi_5 f_\delta = f'_\delta \phi_6$, $\phi_3 f_\varepsilon = f'_\varepsilon \phi_1$, $\phi_4 f_\zeta = f'_\zeta \phi_3$ y $\phi_6 f_\eta = f'_\eta \phi_4$, o, dicho de manera más cómoda, tales que conmutan los "cuadrados verticales" del siguiente diagrama:



§4.3 CORRESPONDENCIA ENTRE MODULOS Y REPRESENTACIONES

Recordemos que $\Lambda = kC/R$. Por una parte Λ es una k-álgebra y tenemos sus categorías de módulos ModΛ y modΛ (ver notación en la sección 1.1). Por otra parte (C,R) es un carcaj con relaciones y tenemos sus categorías de representaciones Mod(C,R) y mod(C,R) (ver 4.2.5). Estas cuatro son ejemplos de <u>k-categorías</u>: categorías en las que cada Hom(X,Y) posee estructura de k-espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal.

Sabemos que dos categorías A y B pueden considerarse como "la misma" cuando son <u>equivalentes</u>: hay funtores

F: $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y G: $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ tales que FG $\cong 1_{\mathcal{B}}$ y GF $\cong 1_{\mathcal{A}}$; si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ fueran k-categorías, esto nos diría que son "la misma" como categorías, pero aún podrían tener muy diferentes k-estructuras. Diremos entonces que las k-categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son <u>equivalentes</u> si las equivalencias F y G de arriba son <u>k-funtores</u>: restringidos al k-espacio vectorial de morfismos entre dos objetos cualesquiera son aplicaciones k-lineales.

En esta sección justificaremos nuestras anteriores afirmaciones en el sentido de que las representaciones de $(C,\mathcal{R})$ son "visualizaciones" de los Λ-módulos, pues bocetaremos una prueba del siguiente resultado:

<u>4.3.1</u> <u>Teorema</u>: *Las* k-*categorías* ModΛ *y* Mod$(C,\mathcal{R})$ *son equivalentes.*

Como ya hemos dicho, es realmente modΛ (y no ModΛ) la categoría en que estamos interesados, de forma que el siguiente teorema tiene aún más relevancia para nosotros:

<u>4.3.2</u> <u>Teorema</u>: *Las* k-*categorías* modΛ *y* mod$(C,\mathcal{R})$ *son equivalentes.*

Nos proponemos dar a grandes rasgos una demostración de estos teoremas, los detalles son argumentos sencillos que dejaremos al lector. La prueba es tan importante como los dos teoremas, ya que ella nos da la manera de "traducir" módulos a representaciones y viceversa.

(A) <u>De módulos a representaciones</u>

Definiremos un k-funtor F: $\mathrm{Mod}\Lambda \longrightarrow \mathrm{Mod}(C,R)$.

Sea M un Λ-módulo.

Si i es un vértice de C, V_i será el k-espacio vectorial $V_i := \bar{\tau}_i M$, donde $\bar{\tau}_i$ es la clase de τ_i en $\Lambda = kC/R$.

Si $\alpha: i \longrightarrow j$ es una flecha en C, definimos $f_\alpha: V_i \longrightarrow V_j$ como la "multiplicación por $\bar{\alpha}$ ", o sea que $f_\alpha(x) := \bar{\alpha}x$ $(= \bar{\tau}_j\bar{\alpha}x \in V_j)$. Como M era un Λ-módulo, f_α es k-lineal.

Tenemos ya una representación $V = ((V_i),(f_\alpha))$ de C. Queremos definir $F(M) := V$, pero para esto hay que ver que $V \in \mathrm{Mod}(C,R)$. Sea $\rho = \Sigma\, \lambda_\gamma \gamma$ una relación legible de R, digamos que ρ "va de i a j ". Para ver que V satisface ρ, supongamos que cada γ es de la forma $\gamma = \alpha_n \ldots \alpha_1$ (esta expresión varía dependiendo de γ). Si $x \in V_i$, tenemos que $V(\rho)(x) =$ $= \Sigma\, \lambda_\gamma V(\gamma)(x) = \Sigma\, \lambda_\gamma f_{\alpha_n} \ldots f_{\alpha_1}(x) = \Sigma\, \lambda_\gamma \bar{\alpha}_n \ldots \bar{\alpha}_1 \cdot x = (\Sigma\, \lambda_\gamma \bar{\gamma}) \cdot x =$ $= \bar{\rho} \cdot x = 0 \cdot x = 0$. Con esto tenemos ya definido nuestro funtor F en los objetos.

Sea ϕ: $M \longrightarrow M'$ un morfismo en $\mathrm{Mod}\Lambda$. Tenemos ya $F(M) = V$ y $F(M') = V'$, queremos un morfismo de representaciones $F(\phi) = (\phi_i): V \longrightarrow V'$.

Si $i \in C_0$, a cada elemento $\bar{\tau}_i x$ de $V_i = \bar{\tau}_i M$ le podemos aplicar ϕ y obtener $\phi(\bar{\tau}_i x) = \bar{\tau}_i \phi(x)$, o sea que puede restringirse ϕ a una aplicación lineal $\phi_i: V_i \longrightarrow V'_i$. La familia $F(\phi) := (\phi_i)$, ¿será un morfismo de $\mathrm{Mod}(C,R)$?. Necesitaríamos que $\phi_j f_\alpha = f'_\alpha \phi_i$ para toda flecha $\alpha: i \longrightarrow j$ en C, pero esto se sigue de las definiciones anteriores y del hecho de que

ϕ era un morfismo de Λ-módulos.

Es fácil verificar ahora que F: Mod$\Lambda \longrightarrow$ Mod(C,R) es un k-funtor.

(B) De Representaciones a Módulos

Daremos ahora un k-funtor G: Mod$(C,R) \longrightarrow$ ModΛ.

Sea $V = ((V_i),(f_\alpha))$ un objeto de Mod(C,R).

Consideremos al k-espacio vectorial $M := V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots$ $\ldots \oplus V_n$. Quisiéramos una estructura de Λ-módulo en M para poder definir $G(V) := M$.

Para esto veremos primero que M tiene una muy natural estructura de kC-módulo. Definiremos quien es $\gamma m \in M$ para cualquier $m \in M$ y cualquier camino dirigido γ de C, y entonces λm (con $\lambda \in kC$ arbitrario) se podrá definir de una sola manera para obtener una estructura de kC-módulo en M.

Si nuestro camino γ es el camino trivial τ_i, pondremos $\gamma m = \tau_i m := m_i$ (recordar que $m \in M = \oplus V_i$).

Si γ no es trivial, consideremos la transformación lineal $V(\gamma)$: $V_i \longrightarrow V_j$ (si γ va de i a j). Como $m_i \in V_i$, $V(\gamma)(m_i) \in V_j$, y ésta será la única coordenada no nula de γm, o sea que $(\gamma m)_\ell = \delta_{j\ell} V(\gamma)(m_i)$, donde $\delta_{j\ell}$ es la delta de Kronecker.

Con esto M es ya un kC-módulo, pero de una clase muy especial: si tomamos $\lambda \in R$, será $\lambda m = 0$ para toda $m \in M$ (esto se debe a que V satisface R). Esta es precisamente la propiedad que nos permite "ver" a M como kC/R-módulo (i.e., como

Λ-módulo). En efecto, puede definirse $\bar{\lambda}m := \lambda m$ para todo $\lambda \in kC$, donde $\bar{\lambda}$ denota la clase de λ en Λ, y se verifica que, con esta acción, $G(V) := M \in \mathrm{Mod}\Lambda$.

Sea $\phi = (\phi_i)$: $V \longrightarrow V'$ un morfismo en $\mathrm{Mod}(C,R)$. Necesitamos definir un Λ-morfismo $G(\phi)$: $G(V) \longrightarrow G(V')$, pero esto es fácil: como $G(V) = \oplus V_i$ y $G(V') = \oplus V'_i$, tenemos una transformación k-lineal $G(\phi) = \oplus \phi_i$: $G(V) \longrightarrow G(V')$. Se prueba sin dificultad que, dado que ϕ era morfismo de representaciones, $G(\phi)$ es un kC-morfismo y, por lo tanto, un Λ-morfismo de $G(V)$ a $G(V')$. (Desde luego, con las Λ-estructuras definidas anteriormente para $G(V)$ y $G(V')$).

Ahora puede verificarse fácilmente que ya tenemos un k-funtor G: $\mathrm{Mod}(C,R) \longrightarrow \mathrm{Mod}\Lambda$.

(C) La equivalencia

La prueba de 4.3.1 es ahora muy fácil: basta probar que tenemos isomorfismos naturales η: $FG \longrightarrow 1_{\mathrm{Mod}(C,R)}$ y ρ: $GF \longrightarrow 1_{\mathrm{Mod}\Lambda}$, pero de hecho η y ρ son "casi la identidad". Para ilustrar esto, tomemos $V = ((V_i),(f_\alpha))$ en $\mathrm{Mod}(C,R)$; entonces $FG(V) = ((V'_i),(f'_\alpha))$, donde $V'_i = \bar{\tau}_i(GV) =$
$= V_i \oplus (\bigoplus_{j\neq i} 0)$. //

(D) Restricción de la equivalencia

Para probar 4.3.2 bastará probar que todo objeto de $\mathrm{mod}\Lambda$ se aplica bajo F en uno de $\mathrm{mod}(C,R)$ y que, recíprocamente, todo objeto de mod(C,$\mathcal{R}$) se aplica bajo G en uno de modΛ. Esto se sigue, sin embargo, de la observación (hecha en la sección 1.1) de que, como Λ es de k-dimensión finita, modΛ coincide con la subcategoría plena de ModΛ constituída por los Λ-módulos de k-dimensión finita. //

EJERCICIOS DEL CAPITULO 4

4.A Sea (C,R) un carcaj con relaciones

(1) Describa el objeto cero de $\mathrm{Mod}(C,R)$

(2) Si $\phi\colon V \longrightarrow V'$ es un morfismo en $\mathrm{Mod}(C,R)$, describa $\mathrm{Ker}\phi$, $\mathrm{Im}\phi$ y $\mathrm{Coker}\phi$.

(3) Describa los isomorfismos, monomorfismos, epimorfismos y morfismos cero de $\mathrm{Mod}(C,R)$.

(4) Describa las sucesiones exactas de $\mathrm{Mod}(C,R)$.

(5) Si V y V' son dos objetos de $\mathrm{Mod}(C,R)$, describa su suma directa $V \oplus V'$.

(6) Si V es un objeto de $\mathrm{Mod}(C,R)$, describa todos los objetos V' de $\mathrm{Mod}(C,R)$ tales que:

(a): $V \cong V'$.

(b): V' es subobjeto de V.

(c): V' es cociente de V.

4.B Sea (C,R) un carcaj con relaciones y sea $V = ((V_i),(f_\alpha))$ un objeto de $\mathrm{Mod}(C,R)$. Definamos el soporte de V como el conjunto $\mathrm{Supp}V := \{i \in C_0 \,/\, V_i \neq 0\}$. Demuestre que si V es inescindible, entonces $\mathrm{Supp}V$ es conexo como subgráfica (plena) de C.

4.C En la situación del ejercicio 2.F tenemos que, como Λ' es un cociente de Λ, existe una inmersión plena y exacta de $\mathrm{Mod}\Lambda'$ en $\mathrm{Mod}\Lambda$ que consiste en "ver" los Λ'-módulos como Λ-módulos por restricción de escalares. Por 4.3.1, tendremos también una inmersión plena y exacta $E: \mathrm{Mod}(D,S) \longrightarrow \mathrm{Mod}(C,R)$. Describa explícitamente E y su imagen.

4.D Sea C un carcaj arbitrario. Denotemos por Mod(C) a la categoría de todas las k-representaciones de C y por mod(C) a la subcategoría plena de Mod(C) definida por las representaciones V tales que V_i es de k-dimensión finita para todo $i \in C_0$. Nótese que si C tiene ciclos dirigidos kC no es de dimensión finita, pero en todo caso es una k-álgebra y tenemos sus categorías de módulos ModkC y modkC. Pruebe lo siguiente:

(1) Las k-categorías ModkC y Mod(C) son equivalentes.

(2) modkC y mod(C) son equivalentes si y sólo si C no tiene ciclos dirigidos.

4.E Consideremos un carcaj con relaciones (C,R) y sea (C^*,R^*) el carcaj con relaciones opuesto que se obtuvo en 2.G. Sabemos que si $\Lambda = kC/R$, entonces $\Lambda^{op} \simeq kC^*/R^*$ y por 1.E tenemos una dualidad $D: \mathrm{mod}\Lambda \longrightarrow \mathrm{mod}\Lambda^{op}$. Queremos "visualizar" esta dualidad. Tenemos las equivalencias $G: \mathrm{mod}(C,R) \longrightarrow \mathrm{mod}\Lambda$ y $F: \mathrm{mod}\Lambda \longrightarrow \mathrm{mod}(C^*,R^*)$, de donde la composición FDG es una dualidad que también denotaremos por $D: \mathrm{mod}(C,R) \longrightarrow \mathrm{mod}(C^*,R^*)$.

(1) Sea $V = ((V_i),(f_\alpha))$ un objeto de mod(C,R). Para cada $i \in C_0$, pongamos $V_i{}^* = \mathrm{Hom}\,(V_i,k)$ y para cada $\alpha \in C_1$ sea $g_{\alpha *} := f_\alpha^t$ la transpuesta de f_α. Pruebe que $D(V) = ((V_i{}^*),(g_{\alpha *}))$.

(2) Si $\phi: V \longrightarrow V'$ es un morfismo en mod(C,R), describa su imagen $D(\phi): D(V') \longrightarrow D(V)$ en $\mathrm{mod}(C^*,R^*)$.