CAPITULO 3: ALGEBRAS Y ALGEBRAS DE CARCAJ

En este capítulo mostraremos que toda k-álgebra de dimensión finita, básica e idescomponible, es isomorfa al cociente de un álgebra de carcaj por algún ideal admisible (Recuérdese que estamos suponiendo siempre que k es algebraicamente cerrado).

Recordemos que, para nuestros propósitos, pedir que un álgebra se básica e indescomponible no es una restricción (ver secciones 1.2 y 1.3).

El resultado mencionado es muy importante: Por un lado es un teorema de estructura, estamos describiendo todas las álgebras, y por otro lado nos permite "visualizar" los módulos del álgebra dada a través de representaciones del carcaj, como se verá en el capítulo 4.

El camino que se seguirá es el siguiente:

3.1: Para cada álgebra Λ construiremos su carcaj asociado C_Λ.

3.2: Construiremos un morfismo ϕ: $kC_\Lambda \longrightarrow \Lambda$ y verificaremos que es suprayectivo.

3.3: Examinaremos el núcleo de ϕ y veremos que se trata de un ideal admisible, de modo que $\Lambda \cong kC_\Lambda/\mathrm{Ker}\phi$ como se anunció al principio.

§3.1 EL CARCAJ ORDINARIO DE UN ALGEBRA

Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita, indescomponible y básica.

Elijamos un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ (Desde luego, con $e_i \neq 0$ para toda i).

Definición: El carcaj ordinario de Λ, que se denota por C_Λ, se define como sigue:

C_Λ tiene n vértices (tantos como idempotentes en el sistema), numerados de 1 a n en correspondencia uno a uno con $e_1, \ldots, e_n$.

En lo que concierne a las flechas de C_Λ, el número de ellas que principian en el vértice i y terminan en el vértice j es

$$\dim_k[e_j(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)e_i].$$

Nótese que el cociente $\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda$ es un Λ-Λ-bimódulo, así es que $e_j(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)e_i$ tiene sentido. Además su dimensión es finita, ya que la de Λ lo es.

Hay otros carcajes asociados a Λ que también son herramientas útiles para su estudio (el carcaj de Auslander-Reiten, el carcaj estable, el carcaj de órbitas, el carcaj separado) y el nombre de "ordinario" se le da a C_Λ para distinguirlo de los otros. Como nosotros utilizaremos aquí solamente el carcaj ordinario, lo llamaremos simplemente "el carcaj de Λ".

Para ver que C_Λ es realmente un carcaj aún debemos probar que la gráfica obtenida es conexa. Esto se debe a que Λ es indescomponible y en el ejercicio 3.A hemos indicado como probarlo.

Proposición: C_Λ *no depende (salvo en la numeración de los vértices) del sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales elegido en un principio.*

Demostración: El número de vértices de C_Λ esta determinado por Λ, puesto que es igual al número de inescindibles que aparecen en la descomposición de Λ como Λ-módulo (ver 1.2.1 y 1.2.4).

En cuanto a las flechas, debemos probar que si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ es otro sistema de idempotentes numerado de tal forma que $\Lambda e_i \cong \Lambda f_i$ para todo i, entonces

$$\dim_k e_i(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)e_j = \dim_k f_i(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)f_j.$$

Esto se debe a que $e_i(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)e_j \cong e_i(\mathrm{rad}\Lambda e_j/\mathrm{rad}^2\Lambda e_j) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e_i, \mathrm{rad}\Lambda e_j/\mathrm{rad}^2\Lambda e_j) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda f_i, \mathrm{rad}\Lambda f_j/\mathrm{rad}^2\Lambda f_j)$ (ver 1.2.6). //

Ejemplos de construcción de C_Λ:

3.1.1 Si $\Lambda = k[x]/(x^n)$, con $n \geq 1$. ($k[x]$ no es de dimensión finita). C_Λ tendrá un único vértice puesto que el único idempotente no nulo de Λ es 1.

$\mathrm{rad}\Lambda = (\bar{x})$ -el ideal generado por $\bar{x}$ en $k[x]/(x^n)$- .

En efecto, $(\bar{x})^n = 0$, o sea que $(\bar{x}) \subseteq \mathrm{rad}\Lambda$ y también es claro que $\Lambda/(\bar{x})$ es isomorfo a k, de donde $\mathrm{rad}\Lambda \subseteq (\bar{x})$.

En cuanto a $\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda$, su k-dimensión es 1: una base esta dada por la clase de $\bar{x}$ en este cociente.

Concluímos entonces que $C_\Lambda = 1 \circlearrowleft \alpha$.

<u>3.1.2</u> Si

$$\Lambda = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ k & k & 0 \\ k & 0 & k \end{bmatrix},$$

el anillo de matrices de la forma $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \\ \delta & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$, con $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ en k y con la suma y multiplicación matriciales.

Un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales esta dado por $\{E_{11},E_{22},E_{33}\}$, adoptando la notación en la cual E_{ij} es la matriz cuyas entradas son todas cero salvo la entrada (i,j) que vale uno.

Por consideraciones similares a las del ejemplo anterior se tiene que

$$\mathrm{rad}\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de aquí que $\mathrm{rad}^2\Lambda = 0$.

$E_{22}\mathrm{rad}\Lambda E_{11}$ y $E_{33}\mathrm{rad}\Lambda E_{11}$ tienen dimensión 1, y las demás combinaciones deberán ser cero ya que $\mathrm{rad}\Lambda$ es de dimensión 2. Entonces:

$$C_\Lambda = \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 2 & & 3 \end{tikzcd}$$

Este ejemplo se generaliza inmediatamente a

$$\Lambda = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k & k & 0 & \dots & 0 \\ k & 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ k & 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix} ,$$

matrices nxn, siendo su carcaj:

$$C_\Lambda = \begin{tikzcd} & & 1 \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 2 & 3 & \cdots & n \end{tikzcd} .$$

3.1.3 Si $\Lambda = kC/R$ es el cociente de un álgebra de carcaj por un ideal admisible, es de esperarse que C_Λ coincida con C y éste es el caso.

Sabemos (ver 2.3.1) que $\{\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2,\dots,\bar{\tau}_n\}$ es un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales, donde τ_i designa el camino trivial de C en el vértice i. C_Λ tiene entonces tantos vértices como C.

En cuanto a $\bar{\tau}_j(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)\bar{\tau}_i$, no hay dificultad en comprobar que tiene por k-dimensión el número de flechas en C que van del vértice i al vértice j (ver 2.3.5).

Entonces $C_\Lambda = C$ en este caso.

§3.2 CONSTRUCCION DE UN MORFISMO SUPRAYECTIVO ϕ: $kC_\Lambda \longrightarrow \Lambda$.

3.2.1 Construcción de ϕ.

Asignaremos a cada elemento de la base de kC_Λ otro elemento en Λ. Esto dará lugar a un morfismo ϕ: $kC_\Lambda \longrightarrow \Lambda$ de k-espacios vectoriales. Veremos luego que el ϕ obtenido es de hecho morfismo de k-álgebras.

Para cada $e_j(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)e_i$, elijamos una k-base $\{y_\alpha/ \alpha \in A_{ij}\}$. Podemos tomar A_{ij} el conjunto de flechas de i a j en C_Λ, puesto que en ese conjunto hay tantas flechas como la k-dimensión de $e_j(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)e_i$.

Podemos ahora elegir elementos $x_\alpha \in e_j(\mathrm{rad}\Lambda)e_i$ tales que $\bar{x}_\alpha = y_\alpha$ para cada $\alpha \in A_{ij}$, para cada par de índices i,j.

Con todas estas elecciones efectuadas describiremos ahora la imagen en Λ de cada uno de los básicos de kC_Λ:

-Caminos de longitud cero (los triviales):

$$\phi(\tau_i) := e_i$$

-Caminos de longitud uno (las flechas):

$$\phi(\alpha) := x_\alpha$$

-Caminos de longitud n > 1 :

$$\phi(\alpha_n \ldots \alpha_1) := x_{\alpha_n} x_{\alpha_{n-1}} \ldots x_{\alpha_1} .$$

Para verificar que ϕ es morfismo de álgebras, es suficiente ver que $\phi(\delta\gamma) = \phi(\delta)\phi(\gamma)$ para δ y γ básicos de kC_Λ (o sea, δ y γ caminos dirigidos en C_Λ).

Caso 1: longitud de δ y longitud de γ son mayores o iguales a 1.

Pongamos $\gamma = \alpha_n \ldots \alpha_1$, $\delta = \beta_p \ldots \beta_1$. Pongamos también i := final de γ = final de α_n, y j := principio de δ = principio de β_1.

Si $i = j$, entonces $\delta\gamma = \beta_p \ldots \beta_1 \alpha_n \ldots \alpha_1$ y la igualdad que buscamos es cierta gracias a la definición de ϕ sobre los caminos de longitud mayor o igual a uno.

Si $i \neq j$, entonces $\delta\gamma = 0$. Pero también $\phi(\delta)\phi(\gamma) = 0$, ya que tenemos $\phi(\gamma) = x_{\alpha_n} \ldots x_{\alpha_1}$ con $x_{\alpha_n} \in e_i(\mathrm{rad}\Lambda)$, $\phi(\delta) = x_{\beta_p} \ldots x_{\beta_1}$ con $x_{\beta_1} \in (\mathrm{rad}\Lambda)e_j$, de donde $\phi(\delta)\phi(\gamma) = x_{\beta_p} \ldots x_{\beta_1} x_{\alpha_n} \ldots x_{\alpha_1} = 0$ ya que $x_{\beta_1} x_{\alpha_n} = 0$ por ser $e_j e_i = 0$.

<u>Caso 2</u>: $\ell(\delta) \geq 1$ y $\ell(\gamma) = 0$

<u>Caso 3</u>: $\ell(\delta) = 0$ y $\ell(\gamma) \geq 1$

<u>Caso 4</u>: $\ell(\delta) = 0$ y $\ell(\gamma) = 0$.

Cada uno de estos se trata con el mismo tipo de argumentos que el primero. Por supuesto, $\ell(\delta)$ significa "longitud de δ ".

<u>Ejemplos</u>:

(A) Sea $\Lambda = k[x]/(x^n)$ con $n \geq 1$. Sabemos por 3.1.1 que $C_\Lambda = 1 \circlearrowleft \alpha$. Teníamos que $\mathrm{rad}\Lambda = (\bar{x})$ y $\mathrm{rad}^2\Lambda = (\bar{x})^2$. Eligiendo $x_\alpha = \bar{x}$, nuestra ϕ: $kC_\Lambda \longrightarrow \Lambda$ queda definida por $\phi(\tau_1) = 1$, $\phi(\alpha) = \bar{x}$. Aquí ϕ es claramente suprayectiva, pero no inyectiva: su núcleo es (α^n) que, como es fácil ver es un ideal admisible de kC_Λ.

(B) Sea Λ el anillo de matrices 3x3 de 3.1.2. Vimos allí que:

$$C_\Lambda = \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ 2 & & 3 \end{tikzcd} ,$$

calculamos radΛ y observamos que $rad^2\Lambda = 0$. Elijamos $x_\alpha = E_{21}$ y $x_\beta = E_{31}$, usando la notación de 3.1.2. Aquí también la ϕ obtenida es suprayectiva, de hecho es un isomorfismo. De todas formas, sabemos por (b) de 2.3 que 0 es un ideal admisible de kC_Λ en este caso. En la sección 6.1 daremos una caracterización homológica de las álgebras que, como esta Λ, son isomorfas a álgebras de carcaj.

(C) Sea $\Lambda = kC/R$ el cociente de un álgebra de carcaj por un ideal admisible R. Vimos en 3.1.3 que $C_\Lambda = C$. Si hacemos las elecciones (necesarias para definir ϕ) de la manera obvia, se obtiene nuevamente que ϕ es sobre y su núcleo es precisamente el ideal R. (Sin embargo, con otras elecciones podría obtenerse, como núcleo de ϕ, algún otro ideal admisible de kC).

3.2.2 <u>ϕ es suprayectiva</u>.

<u>Teorema</u>: *El morfismo* $\phi\colon kC_\Lambda \longrightarrow \Lambda$, *definido en 3.2.1, resulta ser siempre suprayectivo.*

Demostraremos este teorema después de establecer los dos siguientes lemas, que se necesitarán en la prueba.

<u>Lema 1</u>: *Como* Λ *es básica,* $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ *lo es también.*

<u>Demostración</u>: Tenemos la descomposición en inescindibles $\Lambda = \Lambda e_1 \oplus \dots \oplus \Lambda e_n$ y como vimos ya en 1.7.2,

$\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda = \Lambda e_1/\mathrm{rad}\Lambda e_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda e_n/\mathrm{rad}\Lambda e_n$ es una descomposición de $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ en inescindibles. Pero, también por 1.7.2, $\Lambda e_i \cong \Lambda e_j$ si y sólo si $\Lambda e_i/\mathrm{rad}\Lambda e_i \cong \Lambda e_j/\mathrm{rad}\Lambda e_j$, de donde si Λ es básica $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ lo es también. //

<u>Lema 2</u>: $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ *es un álgebra isomorfa a una suma de copias del campo.*

<u>Demostración</u>: Por 1.4.2 $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ es semisimple, y el teorema de Wedderburn-Artin (1.4.6 y 1.4.7) asegura que, como k-álgebras,

$$\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda \cong M_{n_1}(D_1) \dot{+} \ldots \dot{+} M_{n_r}(D_r),$$

donde cada D_i es un anillo con división, extensión finita de k, y $M_{n_i}(D_i)$ denota el álgebra de todas las matrices $n_i x n_i$ con entradas en D_i.

Ahora bien, el hecho de que k es algebraicamente cerrado obliga a cada D_i a coincidir con k (ver 1.4.9).

Por otra parte $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ es básica por el lema 1, y entonces cada álgebra que la compone (i.e. cada $M_{n_i}(k)$) debe serlo también (esto es un hecho general muy fácil de probar).

Pero el álgebra $M_{n_i}(k)$ sólo es básica si $n_i = 1$. En efecto, $M_{n_i}(k) = L_{n_1} \oplus L_{n_2} \oplus \ldots \oplus L_{n_i}$, donde $L_j := M_{n_i}(k)E_{jj}$, y se verifica fácilmente que $L_1 \cong L_2 \cong \ldots \cong L_{n_i}$.

Hemos probado entonces que $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda \cong k \dot{+} \ldots \dot{+} k$ como k-álgebras, pero además k es claramente inescindible y se trata entonces también de una descomposición en inescindibles de $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$. Entonces, por el teorema de Krull-Schmidt, ésta descomposición es equivalente a la descomposición (*) de 1.7.2, de donde $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda = k\bar{e}_1 \oplus \ldots \oplus k\bar{e}_n$. //

Demostración del Teorema

Para mostrar que ϕ es suprayectiva consideremos los siguientes elementos de Λ:

$$\{e_1,\ldots,e_n\} \cup \{x_\alpha \ / \ \alpha \in \cup A_{ij}\}$$

Todos estos elementos se encuentran, por construcción, en la imagen de ϕ, y tal imagen es una sub-k-álgebra de Λ.

Sería pues suficiente mostrar que se trata de un sistema de generadores de Λ como k-álgebra. Es decir, que todo $\lambda \in \Lambda$ puede escribirse como un k-polinomio en esos elementos.

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{rad}\Lambda \hookrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathrm{rad}\Lambda \longrightarrow 0$$

que, como sucesión de espacios vectoriales, se escinde. Usando el lema 2 obtenemos que, como k-espacios vectoriales,

$$\Lambda = \mathrm{rad}\Lambda \oplus ke_1 \oplus \ldots \oplus ke_n.$$

Entonces, si mostramos que todo elemento de $\mathrm{rad}\Lambda$ se escribe como un k-polinomio en $\{x_\alpha \ / \ \alpha \in \cup A_{ij}\}$, ya habremos terminado.

Y eso es lo que afirma la siguiente proposición.

Notemos primero que, puesto que $\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda = \bigoplus_{i,j} e_j(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)e_i$, $\{\bar{x}_\alpha \ / \ \alpha \in \cup A_{ij}\}$ es una base de $\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda$.

Proposición: *Sea* Λ *una* k-*álgebra de dimensión finita y sea* $\{x_\alpha \ / \ \alpha \in A\}$ *un conjunto cualquiera de elementos de* $\mathrm{rad}\Lambda$ *tal que* $\{\bar{x}_\alpha \ / \ \alpha \in A\}$ *es una base de* $\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda$ *como* k-*espacio vec-*

torial.

Sea B *el conjunto de los elementos de* Λ *que pueden escribirse como* k-*polinomios sin término constante en los* x_α, $\alpha \in A$.

Entonces $\mathrm{rad}\Lambda = B$.

Lema: *Sea* $a_\ell \in \mathrm{rad}^\ell\Lambda$ *con* $\ell \geq 1$. *Entonces existen* $a_{\ell+1} \in \mathrm{rad}^{\ell+1}\Lambda$ *y* $b \in B^\ell$ $(\subseteq B)$ *tales que* $a_\ell = a_{\ell+1} + b$.

Este lema prueba la proposición: Naturalmente, $B \subseteq \mathrm{rad}\Lambda$. Se trata de ver que $\mathrm{rad}\Lambda \subseteq B$. Pero del lema se deduce que para todo $a \in \mathrm{rad}\Lambda$ y todo $m \in \mathbb{N}$, $a = a_m + b$ con $a_m \in \mathrm{rad}^m\Lambda$ y $b \in B$. Como $\mathrm{rad}\Lambda$ es nilpotente, se sigue el resultado. Sólo necesitamos entonces probar el lema.

Demostración del lema: Haremos inducción sobre ℓ. Consideremos la sucesión exacta de k-espacios vectoriales

$$0 \longrightarrow \mathrm{rad}^2\Lambda \longrightarrow \mathrm{rad}\Lambda \longrightarrow \mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda \longrightarrow 0,$$

y tomemos la sección $g: \mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda \longrightarrow \mathrm{rad}\Lambda$ dada por $g(\bar{x}_\alpha) = x_\alpha$. Entonces, como k-espacios vectoriales, $\mathrm{rad}\Lambda = \mathrm{rad}^2\Lambda \oplus \mathrm{Im}g$. Como $\mathrm{Im}g \subseteq B$, ya tenemos el pie de nuestra inducción.

Supongamos ahora que $\ell > 1$ y tomemos $a_\ell \in \mathrm{rad}^\ell\Lambda$.

Basta probar nuestro lema para el caso en que a_ℓ es de la forma $a_\ell = c_1c_2\ldots c_\ell$ con $c_i \in \mathrm{rad}\Lambda$.

Sea $a'_{\ell-1} = c_1c_2\ldots c_{\ell-1} \in \mathrm{rad}^{\ell-1}\Lambda$. Por la hipótesis de inducción, existen $a'_\ell \in \mathrm{rad}^\ell\Lambda$ y $b' \in B^{\ell-1}$ tales que $a'_{\ell-1} = a'_\ell + b'$. También existen $a''_2 \in \mathrm{rad}^2\Lambda$ y $b'' \in B$

tales que $c_\ell = a_2'' + b''$.

Entonces $a_\ell = a'_{\ell-1} c_\ell = (a'_\ell + b')(a_2'' + b'') =$
$= a'_\ell a_2'' + a'_\ell b'' + b' a_2'' + b'b''$.

Como $B \subseteq \mathrm{rad}\Lambda$, $B^{\ell-1} \subseteq \mathrm{rad}^{\ell-1}$, de donde obtenemos que, si definimos $a_{\ell+1} := a'_\ell a_2'' + a'_\ell b'' + b' a_2''$ y $b := b'b''$, $a_{\ell+1} \in \mathrm{rad}^{\ell+1}\Lambda$ y $b \in B^\ell$. //

§3.3 EL NUCLEO DE ϕ ES ADMISIBLE

Recordemos que F es el ideal de kC_Λ generado por las flechas . Recordemos también que un ideal R de kC_Λ será admisible si está contenido en F^2 y contiene a alguna potencia de F.

En esta sección nos consagraremos a probar que el núcleo de ϕ (definido en 3.2.1) es un ideal admisible de kC_Λ. Como hemos ya observado, esto nos dará el siguiente resultado:

Teorema: *Si Λ es una k-álgebra de dimensión finita, básica e indescomponible (y k es algebraicamente cerrado), entonces Λ es isomorfa al cociente de un álgebra de carcaj (el álgebra de* su *carcaj) por un ideal admisible.*

Haremos en tres partes la prueba de la admisibilidad del núcleo de ϕ.

3.3.1 $Ker\phi \subseteq F$.

En efecto, sea $a \in Ker\phi$. Como $a \in kC_\Lambda$, puede escribirse como combinación k-lineal de la base:

$$a = \Sigma \lambda_i \tau_i + x$$

donde τ_i recorre los caminos triviales y $x \in F$.

Entonces $0 = \phi(a) = \Sigma \lambda_i e_i + \phi(x)$.

Por la construcción de ϕ y por estar $x \in F$, tenemos que $\phi(x) \in rad\Lambda$, de donde $\Sigma \lambda_i e_i \in rad\Lambda$.

Siendo los e_i idempotentes ortogonales, $\Sigma \lambda_i e_i$ no es nilpotente mas que cuando todos los λ_i son cero.

Como $rad\Lambda$ es nilpotente (ya que Λ es k-álgebra de dimensión finita), cada elemento de $rad\Lambda$ debe ser nilpotente.

Se sigue que cada λ_i es cero, de donde $a = x \in F$. //

3.3.2 $Ker\phi \subseteq F^2$.

Sea $a \in Ker\phi$. Por lo anterior, sabemos que $a \in F$, o sea que

$$a = \Sigma \lambda_\alpha \alpha + y ,$$

donde $y \in F^2$ y α recorre las flechas de C.

Entonces $0 = \phi(a) = \Sigma \lambda_\alpha x_\alpha + \phi(y)$.

Puesto que $y \in F^2$, $\phi(y) \in rad^2\Lambda$. Por otro lado, $\Sigma \lambda_\alpha x_\alpha \in rad\Lambda$, puesto que cada $x_\alpha \in rad\Lambda$.

Considerando la situación módulo $rad^2\Lambda$, tenemos que

$$0 = \Sigma \lambda_\alpha \bar{x}_\alpha ,$$

pero $\{\bar{x}_\alpha \ / \ \alpha \in \cup A_{ij}\}$ es una base de $rad\Lambda/rad^2\Lambda$, de donde ca da λ_α es cero y $a = y \in F^2$. //

3.3.3 Kerϕ *contiene alguna potencia de* F.

En efecto, por un lado $F^r \subseteq \phi^{-1}(\mathrm{rad}^r\Lambda)$ para cada r, por construcción de ϕ.

Por otro lado, radΛ es nilpotente, digamos $\mathrm{rad}^m\Lambda = 0$, de donde $F^m \subseteq \phi^{-1}(0) = \mathrm{Ker}\phi$. //

Conclusión del capítulo:

Es equivalente estudiar álgebras indescomponibles básicas de k-dimensión finita con k algebraicamente cerrado, a estudiar cocientes de álgebras de carcaj por ideales admisibles.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 3

3.A Usando el ejercicio 2.C, pruebe que la gráfica C_Λ, obtenida en 3.1, es conexa.

3.B Sea Λ el álgebra de matrices triangulares superiores nxn con entradas en k. Calcule C_Λ.

3.C El campo de los números complejos, $\mathbb{C}$, es una $\mathbb{R}$-álgebra de dimensión finita, básica e indescomponible. Sin embargo, no existe ningún carcaj C tal que $\mathbb{C}$ sea cociente de $\mathbb{R}C$ por un ideal admisible. La hipótesis "k es algebraicamente cerrado" es indispensable.

3.D (1) El carcaj C_Λ es el único (desde luego salvo numeración de los vértices) carcaj C tal que Λ es cociente de kC por algún ideal admisible R de kC.

(2) No ocurre lo mismo con R. Considere el carcaj siguiente:

$$C = \begin{tikzcd}[row sep=small] & \cdot \arrow[dr, "\beta"] & \\ \cdot \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \cdot \\ & \cdot \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd} ,$$

y los ideales de kC generados por $\beta\alpha + \delta\gamma$ y $\beta\alpha - \delta\gamma$ respectivamente. Pruebe que se trata de ideales admisibles, diferentes si la característica del campo es distinta de 2, y que los cocientes de kC por estos ideales son isomorfos.

(3) Otro ejemplo: Si (C,R) es el carcaj con relaciones de 2.A, y R' es el ideal de kC generado por $\sigma\delta$ y $\delta\sigma - \rho^2$, entonces kC/R y kC/R' son isomorfas cuando la característica de k es distinta de 2.

3.E (1) $F^{\ell} \subseteq \phi^{-1}\mathrm{rad}^{\ell}\Lambda$, $\ell = 1,2,3,\dots$.

(2) Para $\ell = 1$ y $\ell = 2$, se tiene la igualdad en (1).

(3) Para $\ell = 3$, no necesariamente.

3.F Supongamos que Λ' es un cociente de Λ, o sea que tenemos un morfismo suprayectivo $\phi: \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ de k álgebras. Supongamos además que $\mathrm{Ker}\phi \subseteq \mathrm{rad}^2\Lambda$.

(1) Demuestre que $C_\Lambda = C_{\Lambda'}$.

(2) Tenemos entonces un morfismo sobre de k-álgebras $\psi: kC_\Lambda \longrightarrow \Lambda'$ (ver la teoría de este capítulo). Pruebe que si $\mathrm{Ker}\phi = \mathrm{rad}^2\Lambda$ (i.e. si $\Lambda' = \Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda$), entonces el ideal admisible $\mathrm{Ker}\psi$ de kC_Λ es igual a F^2.

(3) Concluya que $\mathrm{rad}^2\Lambda = 0$ si y sólo si $R = F^2$, donde R es el núcleo del morfismo definido en 3.2.1.

(4) Muestre que lo análogo no vale para potencias más altas de $\mathrm{rad}\Lambda$.

3.G Utilizando la notación de 1.E y 2.G, pruebe que si Λ es una k-álgebra de dimensión finita, básica e indescomponible,

(1) $C_{\Lambda^{op}} \cong C^*_\Lambda$

(2) Hay un morfismo sobre $\psi: kC^*_\Lambda \longrightarrow \Lambda^{op}$ tal que $\mathrm{Ker}\psi = R^*$, donde R es el núcleo del morfismo definido en 3.2.1.