CAPITULO 2: EL ALGEBRA DE CARCAJ

En este capítulo definiremos lo que es un carcaj y su álgebra asociada. Ellos constituyen una buena herramienta para el estudio de las álgebras en general, como se podrá apreciar en los siguientes capítulos.

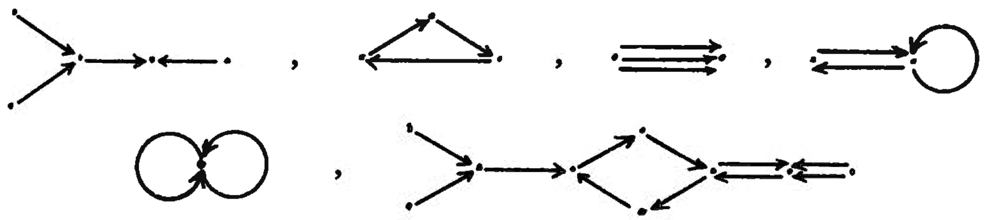
Daremos luego una reseña de propiedades con el propósito de familiarizarnos con el álgebra de carcaj y su aritmética.

Para terminar, haremos algo similar para los cocientes de las álgebras de carcaj que se obtienen al dividir por ciertos ideales que hemos llamado admisibles.

§2.1 CARCAJES Y ALGEBRAS DE CARCAJ

Definición: Un carcaj C es una gráfica orientada, conexa y finita. Más precisamente, un carcaj consiste de un conjunto C_0 de "vértices" y otro C_1 de "flechas", junto con una asignación que a cada flecha de C_1 le asocia su vértice inicial y su vértice final. Pedimos que C_0 y C_1 sean finitos, y que C sea conexo. Nótese que no se excluyen los casos en que aparecen lazos o aristas múltiples.

Son ejemplos de carcajes:



Notación: α: $i \longrightarrow j$ en C significará "la flecha α se inicia en el vértice i y termina en el vértice j".

Definición: Un camino dirigido (de longitud n) de i a j en un carcaj C es una sucesión de vértices y flechas $(j/\alpha_n, \ldots$ $\ldots, \alpha_1/i)$ con $n \geq 0$, verificando que

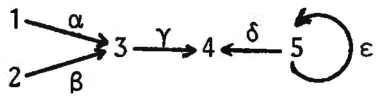
$$\begin{aligned} \text{inicio de } \alpha_1 &= i \\ \text{final de } \alpha_1 &= \text{inicio de } \alpha_2 \\ \text{final de } \alpha_2 &= \text{inicio de } \alpha_3 \\ &\vdots \\ \text{final de } \alpha_n &= j. \end{aligned}$$

En caso de que n = 0 pedimos además que i=j. De esta forma, asociamos a cada vértice i su camino trivial $\tau_i := (i//i)$, que se puede interpretar intuitivamente como "permanecer en i". Si n es positivo, a menudo escribiremos simplemente $\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1$ en lugar de $(j/\alpha_n,\ldots,\alpha_1/i)$.

Nota: A lo largo de todo este trabajo, k denotará un campo que tomaremos algebraicamente cerrado. Tal suposición sobre k no es necesaria en este capítulo, pero es sólo con ella que se obtienen resultados interesantes en los capítulos posteriores.

Definición: Denotaremos por kC el k-espacio vectorial con base el conjunto de todos los caminos dirigidos del carcaj C (incluso los triviales). Daremos a kC estructura de k-álgebra definiendo primero la multiplicación de los básicos de la siguiente forma: $(m/\beta_p, \beta_{p-1}, \ldots, \beta_1/h) \cdot (j/\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1/i)$ vale cero si $h \neq j$, y vale $(m/\beta_p, \ldots, \beta_1, \alpha_n, \ldots, \alpha_1/i)$ en caso de que $h = j$. Este producto se extiende de manera única a todo kC de tal forma que se obtiene una k-álgebra cuyo uno es $\sum_{i \in C_0} \tau_i$. Seguiremos denotando por kC a esta álgebra y la llamaremos el <u>álgebra de carcaj</u> asociada a C.

Veamos un ejemplo:



$$\alpha \cdot \delta = \delta \cdot \alpha = 0$$

$$\gamma \cdot \beta = \gamma\beta$$

$$\beta \cdot \gamma = 0$$

$$\delta \cdot \gamma = \gamma \cdot \delta = 0$$

$$\gamma \cdot \tau_3 = \gamma$$

$$\tau_3 \cdot \gamma = 0$$

$$\tau_4 \cdot \tau_4 = \tau_4 .$$

<u>§2.2 PROPIEDADES DE kC</u>

<u>2.2.1 Proposición</u>: $\{\tau_i \ / \ i \in C_0\}$, *todos los caminos triviales, es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de* kC.

<u>Demostración</u>: El hecho de que los τ_i son idempotentes ortogo

gonales se debe a la definición misma de la multiplicación en kC.

Sabemos ya que $\Sigma\,\tau_i = 1$, así que nuestro sistema es completo.

La verificación de que cada τ_i es primitivo exige un poco más de cuidado: pedir que τ_i sea primitivo es equivalente a pedir que el anillo $\tau_i(kC)\tau_i$ tenga como único idempotente no nulo a τ_i (ver 1.2.7).

Sean $x_1, x_2, \dots, x_r$ los ciclos dirigidos en i (i.e. caminos dirigidos de i en i) que pasan por i en exactamente dos ocasiones (si x es un tal ciclo, x^2 ya no lo es). Es fácil ver que $\tau_i(kC)\tau_i$ es isomorfo a $k\langle x_1, \dots, x_r\rangle$ (ver 1.1.2). Pero es claro, por cuestiones de grado, que esta álgebra no posee otros idempotentes aparte de 0 y 1. //

Observación: Desde luego el de 2.2.1 no es, en general, el único sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de kC. Por ejemplo, si C es el carcaj $1 \xrightarrow{\alpha} 2$, otro sistema de estos es el siguiente: $\{\tau_1+\alpha, \tau_2-\alpha\}$.

2.2.2 Proposición: kC *es un álgebra indescomponible.*

Demostración: Por 1.3.3 bastará que probemos que los únicos idempotentes centrales de kC son 0 y 1.

Sea $d \neq 0$ un idempotente central. Veremos que $d = 1$.

Escribamos primero $d = \sum_{\gamma} \lambda_\gamma \gamma$, donde γ corre sobre los caminos dirigidos de C. Sea ahora i un vértice de C. Tenemos que $d\tau_i = \tau_i d$ por ser d central. Además:

$d\tau_i = \sum_\gamma \lambda_\gamma \gamma \tau_i = \sum_\gamma \lambda_\gamma \gamma$, donde γ corre sobre los caminos que se inician en i, y similarmente: $\tau_i d = \sum_\gamma \lambda_\gamma \tau_i \gamma = \sum_\gamma \lambda_\gamma \gamma$, donde γ corre sobre los caminos que finalizan en i.

Entonces cada γ (con $\lambda_\gamma \neq 0$) que se inicia en i también finaliza en i, o sea que los caminos γ que constituyen d (i.e. aquellos tales que $\lambda_\gamma \neq 0$) son todos ciclos. Más precisamente,

$$d \in \bigoplus_{i \in C_0} \tau_i (kC) \tau_i .$$

Escribamos $d = \Sigma\, d_i$, con cada d_i en $\tau_i(kC)\tau_i$. Usando que d es idempotente, tenemos

$$\Sigma\, d_i = d = d^2 = (\Sigma\, d_i)^2 = \Sigma\, d_i{}^2 \in \oplus\, \tau_i (kC) \tau_i ,$$

y entonces cada d_i es idempotente de $\tau_i(kC)\tau_i$. Hemos visto ya que entonces d_i es cero ó τ_i.

Afirmamos que ningún d_i es cero. Para empezar, algún d_i no es cero, ya que $d \neq 0$. Sea $X := \{i \in C_0 \ / \ d_i \neq 0\} \neq \emptyset$. Supongamos que, contrario a lo que se afirma, $X \neq C_0$. Entonces, siendo C conexo, existe un vértice $i_0 \in X$ y otro $j_0 \in C_0 \backslash X$ con una flecha α que los une. Sin pérdida de generalidad (el otro caso es análogo), α se inicia en i_0 y finaliza en j_0.

Pero entonces $d\alpha = \sum_{i \in X} \tau_i \alpha = 0 \neq \alpha = \sum_{i \in X} \alpha \tau_i = \alpha d$, y d no sería central. Concluímos entonces que $d_i = \tau_i$ para todo $i \in C_0$ y, por ende, que $d = \Sigma\, \tau_i = 1$. //

2.2.3: kC *es k-álgebra de dimensión finita si y sólo si* C *no tiene ciclos dirigidos.*

Es decir, si C no tiene caminos dirigidos no triviales que se inician y finalizan en el mismo vértice. La prueba de 2.2.3 es fácil y se basa en que nuestros carcajes son gráficas finitas.

<u>Definición</u>: Denotaremos por F el ideal izquierdo de kC generado por todas las flechas (i.e. caminos de longitud 1) de C. Es inmediato ver que de hecho F resulta ideal bilateral.

<u>Observación</u>: F coincide con el k-subespacio vectorial de kC que tiene por base los caminos dirigidos no triviales (i.e. de longitud mayor o igual a 1).

<u>2.2.4</u>: *El radical de* kC *coincide con* F *cuando* C *no tiene ciclos dirigidos.*

Para mostrar esto, recordemos (capítulo 1) que si Λ es una k-álgebra de dimensión finita, radΛ puede verse como:

- el máximo ideal nilpotente, o bien
- el mínimo ideal tal que el cociente es semisimple, o bien
- la intersección de todos los ideales izquierdos máximos.

Podemos utilizar aquí estas caracterizaciones puesto que 2.2.3 nos asegura que $\dim_k kC$ es finito.

Veamos primero que F es nilpotente. Como C no tiene ciclos dirigidos, hay una longitud máxima para sus caminos dirigidos, digamos m. Entonces cualquier producto de m+1 generadores de $\mathcal{F}$ (las flechas) deberá ser cero, y por ende $\mathcal{F}^{m+1} = 0$.

Tenemos entonces que $\mathcal{F} \subseteq$ radkC.

Veamos ahora que kC/$\mathcal{F}$ es un álgebra semisimple. Es fácil ver que $\{\bar{\tau}_i \ / \ i \in C_0\}$ constituye una k-base de kC/$\mathcal{F}$, de donde $kC/\mathcal{F} \cong k\bar{\tau}_1 \oplus \dots \oplus k\bar{\tau}_n$ como k-espacio vectorial. Esta es también una descomposición en suma directa de álgebras, y cada una de ellas es simple. Entonces también radkC $\subseteq \mathcal{F}$. //

Consideremos un ejemplo para ver que, en caso de que C tenga algún ciclo dirigido, lo anterior puede no ser válido.

Sea C el carcaj siguiente: $1 \circlearrowleft \alpha$. Es inmediato que $kC \cong k[x]$, y por tanto radkC = 0 (k es infinito).

Sin embargo, $\mathcal{F} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} k\alpha^n$. (Ver también el ejercicio 5.I).

§2.3 IDEALES ADMISIBLES Y COCIENTES DE ALGEBRAS DE CARCAJ

Como veremos en el siguiente capítulo, es totalmente equivalente el estudio de las álgebras de dimensión finita sobre nuestro campo k algebraicamente cerrado, al estudio de los cocientes de k-álgebras de carcaj sobre ciertos ideales que llamaremos admisibles.

Definición: Un ideal bilateral $\mathcal{R}$ del álgebra de carcaj kC es *admisible* si cumple:

(1) $\mathcal{R}$ está contenido en $\mathcal{F}^2$

(2) $\mathcal{R}$ contiene a alguna potencia de $\mathcal{F}$.

Consideremos algunos ejemplos de ideales admisibles:

(a) Para C un carcaj arbitrario, $\mathcal{F}^n$, con $n \geqq 2$, es admisible.

(b) 0 es un ideal admisible de kC si y sólo si C no tiene ciclos dirigidos.

(c) Sea C el siguiente carcaj:

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr, "\beta"] & & 5 \arrow[dl, "\gamma"'] \\
1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & 4 \arrow[dr, "\eta"'] & \\
 & 3 \arrow[ur, "\zeta"'] & & 6 \arrow[uu, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

Sea $\mathcal{R}$ el ideal bilateral de kC generado por los elementos $\beta\alpha - \zeta\varepsilon$, $\eta\beta$ y $\gamma\delta\eta$.

Claramente $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}^2$, y también $\mathcal{F}^5 \subseteq \mathcal{R}$ (¡Verifique!), de donde $\mathcal{R}$ es admisible.

En general, dado un carcaj C y un ideal bilateral $\mathcal{R}$ de kC con $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}^2$, $\mathcal{R}$ es admisible si y sólo si para cada ciclo dirigido γ de C existe $n \geqq 1$ tal que $\gamma^n \in \mathcal{R}$.

•

Procederemos ahora a analizar algunas propiedades de la k-álgebra $\Lambda = kC/\mathcal{R}$, donde C es un carcaj y $\mathcal{R}$ es un ideal *admisible de kC.*

<u>2.3.1</u> <u>Proposición</u>: $\{\bar{\tau}_i \; / \; i \in C_0\}$ *es un sistema completo de idempotentes primitivos y ortogonales de* $kC/\mathcal{R}$.

<u>Demostración</u>: Considerando la proyección natural $kC \longrightarrow kC/\mathcal{R}$, vemos que el nuestro es un sistema completo de idempotentes

ortogonales, falta ver ahora que cada $\bar{\tau}_i$ es primitivo. En virtud de 1.2.7, nos basta con verificar que los únicos idempotentes de $\bar{\tau}_i(kC/R)\bar{\tau}_i$ son 0 y τ_i. Vimos ya en 2.2.1 que $\tau_i(kC)\tau_i = k\langle x_1,\ldots,x_r\rangle$, para alguna r, de donde $\bar{\tau}_i(kC/R)\bar{\tau}_i = \tau_i(kC/R)\tau_i = \tau_i(kC)\tau_i/\tau_i R\tau_i = k\langle x_1,\ldots,x_r\rangle/A$, donde A es un ideal de $k\langle x_1,\ldots,x_r\rangle$ con las siguientes propiedades:

(a) Los polinomios de A no tienen término constante.

(b) Existe un natural n tal que el ideal generado por los monomios de grado n está enteramente contenido en A.

Sea entonces $f \in k\langle x_1,\ldots,x_r\rangle$ un idempotente módulo A, o sea que $f^2 - f \in A$. Es fácil probar que el término independiente de f es cero o uno. Si es cero, f es nilpotente módulo A, y como también es idempotente módulo A, está en A. Si el término independiente de f es uno, por lo anterior $1 - f$ es cero módulo A, o sea que f es el 1 módulo A. //

<u>2.3.2</u> <u>Proposición</u>: *Gracias a que* C *es conexo, los únicos idempotentes centrales de* kC/R *son* 0 *y* 1. *En consecuencia* kC/R *es una* k-*álgebra indescomponible.*

<u>Demostración</u>: La prueba de 2.2.2 puede adaptarse al presente caso sin dificultad, pero aquella demostración escondía un argumento de carácter más general, que hemos indicado en el ejercicio 2.B. //

<u>2.3.3</u> <u>Proposición</u>: kC/R *es de* k-*dimensión finita.*

<u>Demostración</u>: En efecto, como $F^n \subseteq R$, tenemos un epimorfismo

de k-espacios vectoriales

$$kC/F^n \twoheadrightarrow kC/R.$$

Pero las clases de los caminos de longitud menor que n forman una k-base de kC/F^n, de donde se sigue el resultado.//

2.3.4 Proposición: *Denotemos por* $\bar{F}$ *a la imagen de* F *en* kC/R. *Tenemos que* $\mathrm{rad}(kC/R) = \bar{F}$ *y, entonces,* $\mathrm{rad}^m(kC/R) = \bar{F}^m$.

Demostración: Como R es admisible, existe un natural n tal que $F^n \subseteq R$. Entonces $\bar{F}^n = 0$ y $\bar{F}$ es nilpotente.

Sabemos que $(kC/R)/\bar{F} \cong kC/F$ que, como vimos en 2.2.4, es isomorfa como k-álgebra a $k\bar{\tau}_1 \dotplus k\bar{\tau}_2 \dotplus \dots \dotplus k\bar{\tau}_n$, que es semisimple. De 2.3.3 y los resultados de la sección 1.4 se sigue ahora nuestra proposición. //

2.3.5: De lo anterior es inmediato que $\mathrm{rad}(kC/R)/\mathrm{rad}^2(kC/R)$ es un kC/R-bimódulo que admite por k-base al conjunto $\{\bar{\bar{\alpha}}\}$, donde α recorre todas las flechas de C, $\bar{\alpha}$ es la clase de α módulo R, y $\bar{\bar{\alpha}}$ denota la clase de $\bar{\alpha}$ módulo $\mathrm{rad}^2(kC/R)$. //

2.3.6: Finalmente nos limitaremos a señalar que kC/R es básica. (Ver definición en la sección 1.2). Daremos en 5.1.1 una prueba de esto.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 2

2.A Sea C el siguiente carcaj:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, shift left, "\delta"] & \bullet \arrow[l, shift left, "\sigma"] \arrow[loop right, "\rho"] \end{tikzcd},$$

y sea R el ideal de kC generado por $\{\rho^4, \delta\sigma - \rho^2, \sigma(\rho-1)\delta\}$.

¿Es R admisible?

2.B (1) Sea $\Lambda = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$ una descomposición en inescindibles de la k-álgebra Λ. Pruebe que Λ es descomponible si y sólo si existe un partición (I,J) no trivial de $\{1,\ldots,n\}$ tal que, siempre que $i \in I$ y $j \in J$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_i,P_j) = \mathrm{Hom}_\Lambda(P_j,P_i) = 0$.

(2) Si R es un ideal admisible de kC, tomemos la descomposición $\Lambda = kC/R = \bigoplus_{i=1}^{n} (kC/R)\bar{\tau}_i$ de 2.3.1 (ver 1.2.4). Pruebe que si α es un flecha que va de i a j en C, la multiplicación por α define un Λ-morfismo no nulo de P_j $(= (kC/R)\bar{\tau}_j)$ en P_i.

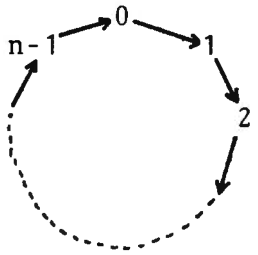
(3) Use (1) y (2) para demostrar 2.3.2.

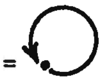
2.C Podría omitirse "conexo" en la definición de carcaj. Pruebe que entonces se tendría:

(1) kC es indescomponible si y sólo si C es conexo.

(2) Para R admisible, kC/R es indescomponible si y sólo si C es conexo.

2.D Sea C el siguiente carcaj:



(si n = 1, C = ).

Sea $\mathcal{R}$ un ideal admisible de kC. Para este carcaj especial denotaremos por γ_i^{ℓ} al (único) camino de longitud ℓ que empieza en el vértice i. Para cada vértice i, sea $\ell(i) := \min\{\ell \in \mathbb{N} / \gamma_i^{\ell} \in \mathcal{R}\}$ (recuérdese que $\mathcal{R}$ es admisible). Demuestre que $\{\gamma_0^{\ell(0)}, \gamma_1^{\ell(1)}, \ldots, \gamma_{n-1}^{\ell(n-1)}\}$ es un sistema de generadores para $\mathcal{R}$. En particular, si n = 1, los únicos ideales admisibles de kC son los de la forma $\mathcal{F}^n$ con $n \geq 2$. (Como veremos mas adelante -en el capítulo 4- este ejercicio es, en parte, expresión de un hecho más general: todo ideal admisible de kC es finitamente generado para C carcaj arbitrario).

2.E Algebras Tensoriales:

Sea K un anillo y A una K-álgebra. Sea M un A-A-bimódulo con acción central de K ($\lambda m = m\lambda$ para cualesquiera $\lambda \in K$ y $m \in M$). Definimos:

$$T^0(M) := {}_A A_A$$

$$T^1(M) := {}_A M_A \text{ y, para } n \geq 2,$$

$$T^n(M) := T^1(M) \underset{A}{\otimes} T^{n-1}(M).$$

Consideremos el A-módulo $T_A(M) := \overset{\infty}{\underset{i=0}{\oplus}} T^i(M)$. Pruebe que $T_A(M)$ es una K-álgebra con la multiplicación inducida por las aplicaciones $T^i(M) \times T^j(M) \longrightarrow T^{i+j}(M)$ tales que $(a,b) \longmapsto a \otimes b$.

(a) Sea C un carcaj, y sea A la k-álgebra $A := k^{C_0}$. Consideremos también el grupo abeliano $M := k^{C_1}$. Si $\lambda \in A$, $f \in M$ y $\alpha \in C_1$ (digamos $\alpha: i \longrightarrow j$), definamos $(\lambda f)(\alpha) := \lambda(j)f(\alpha)$, $(f\lambda)(\alpha) := \lambda(i)f(\alpha)$. Pruebe que con esta estructura M es un A-A-bimódulo con acción central de K.

(b) Pruebe que $kC \cong T_A(M)$ como k-álgebras.

(c) Pruebe que si C no tiene ciclos, $\mathrm{rad}T_A(M) = \bigoplus_{i>0} T^i(M)$.

(d) Pruebe que, en general, $T_A(M) \otimes_A M = \bigoplus_{i>0} T^i(M)$.

<u>2.F</u> Sea D un <u>subcarcaj</u> de C (i.e. D es carcaj, $D_0 \subseteq C_0$, $D_1 \subseteq C_1$ y si $\alpha: i \longrightarrow j$ en D, entonces también $\alpha: i \longrightarrow j$ en C).

Supongamos que D tiene la siguiente propiedad: siempre que se tenga una flecha $\alpha: i \longrightarrow j$ en C con $i \in D_0$, será $j \in D_0$ y $\alpha \in D_1$ (decimos que D es un <u>subcarcaj final</u> de C).

Definamos $e := \sum_{j \in D_0} \tau_j$, y pongamos $\mathcal{S} := e\mathcal{R}e$ donde $\mathcal{R}$ es un ideal admisible de kC.

(1) Pruebe que $kD = ekCe$ y que $\mathcal{S}$ es un ideal admisible de kD.

(2) Si $\Lambda' := kD/\mathcal{S}$, pruebe que Λ' es isomorfa al cociente de $\Lambda = kC/\mathcal{R}$ que se obtiene al dividir por el ideal de Λ generado por $\{\bar{\tau}_i \ / \ i \notin D_0\}$.

<u>2.G</u> Si C es un carcaj, C* denotará el <u>carcaj opuesto</u> de C, que se define a continuación:

Los vértices de C* son los mismos que los de C.

Las flechas de C* son $C_1^* := \{\alpha^* \ / \ \alpha \in C_1\}$.

Las asignaciones de inicio y final de C^* son las inversas de las de C ($\alpha: i \longrightarrow j$ en C si y sólo si $\alpha^*: j \longrightarrow i$ en C^*).

(1) Pruebe que $kC^* \cong (kC)^{op}$ (ver ejercicio 1.E).

(2) Si R es un ideal admisible de kC, obtenga un ideal admisible R^* de kC^* y demuestre que kC^*/R^* es isomorfo a $(kC/R)^{op}$.