CAPITULO 1: PRELIMINARES

En este primer capítulo nos hemos esforzado por dar una presentación rápida y completa de resultados bien conocidos. Estos son indispensables para poder desarrollar los demás capítulos de este trabajo.

§1.1 ALGEBRAS Y MODULOS

Definición: Sea k un campo. Una k-álgebra es un anillo Λ (con uno) que posee estructura de k-espacio vectorial de tal forma que

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$$

para cualesquiera $\alpha \in k$, $a \in \Lambda$, $b \in \Lambda$.

Diremos que Λ es una k-álgebra de dimensión finita si Λ es de dimensión finita como k-espacio vectorial.

Consideraremos siempre al campo k como un subanillo de Λ, mediante el monomorfismo de anillos:

$$\begin{aligned} k &\hookrightarrow \Lambda \\ \alpha &\longmapsto \alpha 1 \end{aligned}$$

Cada elemento de k conmuta entonces con todos los elementos de Λ:

$$(\alpha 1)a = \alpha(1a) = \alpha(a1) = a(\alpha 1)$$

Decimos que k actúa centralmente en Λ.

Ejemplos:

1.1.1: Sea $k[x_1,\dots,x_r]$ el anillo de polinomios en r variables con coeficientes en k. Es también un k-espacio vectorial (de dimensión infinita) con acción central de k. Tiene por tanto estructura de k-álgebra.

1.1.2: $k\langle x_1,\dots,x_r\rangle$ denotará el anillo de polinomios en r variables no conmutativas. Se trata también de una k-álgebra de dimensión infinita, llamada la k-álgebra asociativa libre en r generadores. Notemos que $k[x_1,\dots,x_r]$ es el cociente de $k\langle x_1,\dots,x_r\rangle$ por el ideal bilateral generado por $\{x_ix_j-x_jx_i \ / \ i,j = 1,\dots,r\}$.

1.1.3: Dada una k-álgebra Λ, podemos construir su álgebra de matrices $M_n(\Lambda)$. Es el conjunto de todas las matrices nxn con entradas en Λ, que tiene estructura de k-álgebra (de dimensión finita si Λ es de dimensión finita) mediante la suma y multiplicación matriciales y la acción evidente de k. En la mayoría de los casos tomaremos $\Lambda = k$, el campo, o bien $\Lambda = D$, una k-álgebra con división (i.e. todo elemento no nulo de D es invertible).

1.1.4: Si G es un grupo finito, sea kG el k-espacio vectorial con base G. kG tiene un única estructura de k-álgebra (de dimensión finita $|G|$) tal que la multiplicación de los básicos coincide con la multiplicación en G.

Definición: Sean Λ y Λ' dos k-álgebras. Un morfismo de k-álgebras $\phi: \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ es un morfismo de k-espacios vectoriales y de anillos simultáneamente.

Notación: ModΛ denotará la categoría de todos los módulos izquierdos sobre Λ. Notemos que cada M en ModΛ es, en particular, un k-espacio vectorial.

modΛ denotará la subcategoría plena de ModΛ constituída por los módulos finitamente generados. Es importante notar que si Λ es de dimensión finita, modΛ coincide con la subcategoría plena de ModΛ constituída por los módulos de k-dimensión finita.

§1.2 DESCOMPOSICION EN INESCINDIBLES

Definición: Diremos que un Λ-módulo M no nulo es inescindible si no tiene sumandos directos no triviales. Es decir que si

$$M \cong U \oplus V,$$

entonces $U = 0$ o bien $V = 0$.

Los inescindibles juegan un papel clave en la Teoría de Representaciones de Algebras. En efecto, el objetivo principal es conocer y describir los módulos sobre un álgebra dada (antiguamente llamados representaciones). Ahora bien, el teorema siguiente nos asegura que podemos construir todos los módulos de modΛ si conocemos los inescindibles. Toda información sobre ellos resulta pues fundamental, desde saber si hay o no un número finito de tipos (i.e. clases de isomorfía) hasta dar una lista completa de ellos.

1.2.1 Teorema (Krull-Schmidt): *Sea Λ una k-álgebra de dimen-*

sión finita. Entonces todo módulo M *en* modΛ *tiene una única descomposición en suma directa de un número finito de módulos inescindibles en* modΛ.

Es decir que:

$$M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_r$$

donde los M_i*'s son inescindibles, y si tenemos otra descomposición* $M \cong N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_s$ *(*N_i *inescindibles) entonces* $r = s$ *y existe una permutación de índices* σ *tal que* $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ *para cada* i.

Una demostración del teorema anterior puede verse en (14.2) y (14.5) de [C-R], pp. 81-83.

Notemos que el álgebra Λ puede ser vista como un objeto de modΛ gracias a la multiplicación del anillo. De esta forma, Λ tiene una única descomposición en inescindibles de modΛ:

$$\Lambda \cong P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_n$$

Recordemos que un Λ-módulo P es proyectivo si y sólo si es sumando directo de algún Λ-módulo libre (es decir de un Λ-módulo isomorfo a una suma de copias del Λ-módulo Λ).

Se ve entonces que cada uno de los P_i que aparece en la descomposición de Λ es un módulo proyectivo inescindible.

El hecho es que allí se encuentran todos, en el sentido de que cualquier proyectivo inescindible P en modΛ es isomorfo a algún P_i. En efecto, tenemos que

$$P \oplus M \cong \bigoplus_1^m \Lambda,$$

y descomponiendo M obtenemos una descomposición de $\overset{m}{\underset{1}{\oplus}}\Lambda$ en inescindibles. Pero ya teníamos una descomposición:

$$\overset{m}{\underset{1}{\oplus}}\Lambda = \overset{m}{\underset{1}{\oplus}} P_1 \oplus \overset{m}{\underset{1}{\oplus}} P_2 \oplus \dots \oplus \overset{m}{\underset{1}{\oplus}} P_n.$$

Por el teorema de Krull-Schmidt, P es isomorfo, obligatoriamente, a algún P_i.

Definición: Una k-álgebra Λ de dimensión finita es básica si los proyectivos inescindibles que aparecen en su descomposición "no se repiten". Es decir que $P_i \cong P_j$ sólo si $i = j$.

1.2.2 Teorema ([A-F], (27.14), p. 309): *Para toda k-álgebra Λ de dimensión finita, existe una única (hasta isomorfía) k-álgebra Λ' de dimensión finita y básica tal que* modΛ *y* modΛ' *son categorías equivalentes.* (En este caso decimos que Λ y Λ' son Morita equivalentes).

Como ya los señalamos anteriormente, nuestros esfuerzos estan dirigidos a conocer y describir las álgebras de dimensión finita y sus categorías de módulos finitamente generados. Desde este punto de vista, y gracias al teorema anterior, no se pierde ninguna generalidad al considerar solamente k-álgebras básicas; además, dada una k-álgebra básica de dimensión finita es fácil construir todas las k-álgebras que le son Morita-equivalentes.

1.2.3 Proposición: *Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita y*

$$\Lambda = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_n$$

su descomposición en proyectivos inescindibles.

Descompongamos, en esta suma directa, el uno de Λ*:*

$$1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n.$$

Entonces $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *es un sistema*

completo ($\sum_{i=1}^{n} e_i = 1$) *de*

idempotentes ($e_i^2 = e_i$)

ortogonales ($e_i e_j = 0$ si $i \neq j$) *y*

primitivos (*si* $e_i = f+g$ *con* f *y* g *idempotentes ortogonales, entonces* $f = 0$ *o bien* $g = 0$).

Demostración: En efecto, tenemos que $e_i = e_i 1$, de donde:

$$e_i = e_i e_1 + e_i e_2 + \ldots + e_i e_n.$$

El primer miembro es un elemento de P_i, mientras que el segundo tiene su primer sumando en P_1, el segundo en P_2, etc. Entonces $e_i^2 = e_i$ y $e_i e_j = 0$ si $i \neq j$.

Mostremos ahora que $\Lambda e_i = P_i$. En efecto, ya sabemos que $\Lambda e_i \subseteq P_i$. Sea entonces $x \in P_i$. Tenemos que $x = x1 = xe_1 + \ldots + xe_n$ y esta es una descomposición de x en la suma directa. Entonces $xe_j = 0$ si $j \neq i$ y $x = xe_i \in \Lambda e_i$.

Ahora podemos mostrar que cada e_i es primitivo: si $e_i = f+g$ con f y g idempotentes ortogonales, es fácil ver que $\Lambda e_i = \Lambda f \oplus \Lambda g$, y como $\Lambda e_i = P_i$ es inescindible, obtenemos $\Lambda f = 0$ o bien $\Lambda g = 0$, es decir $f = 0$ o $g = 0$. //

1.2.4 Proposición: *Sea* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos (desde luego,* $e_i \neq 0$ *para toda* i*).*

Entonces $\Lambda = \Lambda e_1 \oplus \Lambda e_2 \oplus \ldots \oplus \Lambda e_n$ *es una descomposi-*

ción en inescindibles.

Demostración: Tenemos que $\Lambda = \Lambda e_1 + \Lambda e_2 + \ldots + \Lambda e_n$ por tratarse de un sistema completo. La suma es directa ya que los idempotentes son ortogonales. Cada sumando es inescindible puesto que cada e_i es primitivo. //

Daremos ahora una proposición que caracteriza los módulos inescindibles.

1.2.5 Proposición: *Sea Λ una k-álgebra y M un módulo en* $\mathrm{Mod}\Lambda$. *Entonces M es inescindible si y sólo si la k-álgebra* $\mathrm{End}_\Lambda M$ *tiene como únicos idempotentes a 0 y 1.*

Demostración: Si $e \in \mathrm{End}_\Lambda M$ es un idempotente, entonces

$$M = \mathrm{Im}e \oplus \mathrm{Im}(1-e),$$

de donde e es cero o uno.

Recíprocamente, si $M = U \oplus V$, $e: U \oplus V \longrightarrow M$ definido por $e(u+v) = u$ es un idempotente. Entonces $e = 0$ o bien $e = 1$ ($U = 0$ ó $V = 0$), de donde M resulta inescindible. //

1.2.6 Lema:

(i).- *Sea M un Λ-módulo y e un idempotente de Λ. Entonces* $f \longmapsto f(e)$ *define un isomorfismo* $\phi : \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e, M) \longrightarrow eM$ *de k-espacios vectoriales.*

(ii).- $\phi: \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda e) \cong e\Lambda e$, *el isomorfismo siendo aquí de k-álgebras. (Es inmediata la verificación de que* $e\Lambda e$ *tiene estructura de k-álgebra, el uno es e).* //

La demostración del lema anterior es una verificación sencilla y se deja al lector como ejercicio. Tal será el significado, de aquí en adelante, del símbolo // después de un enunciado.

1.2.7 Corolario: *Sea* e *un idempotente de* Λ. *Entonces* e *es primitivo si y sólo si* $e\Lambda e$ *tiene como únicos idempotentes a* e *y* 0. //

§1.3 ALGEBRAS INDESCOMPONIBLES

Recordemos que dadas dos k-álgebras Λ_1 y Λ_2, la suma directa $\Lambda_1 \dot{+} \Lambda_2$ es la k-álgebra obtenida mediante la suma directa de los espacios vectoriales con la multiplicación componente a componente, es decir:

$$(\lambda_1,\lambda_2)\cdot(\lambda_1',\lambda_2') = (\lambda_1\lambda_1',\lambda_2\lambda_2').$$

Definición: Una k-álgebra es indescomponible (o inescindible como k-álgebra) si no es suma directa de dos k-álgebras.

1.3.1 Proposición: *Toda* k-*álgebra de dimensión finita es isomorfa a una suma directa de un número finito de* k-*álgebras indescomponibles de dimensión finita.* //

Recordemos que nuestro interés se centra en las propiedades categóricas de modΛ. Ya hemos visto que podemos restringirnos a álgebras básicas de dimensión finita. También po dremos restringirnos a álgebras indescomponibles en virtud del siguiente resultado:

1.3.2 Proposición: *Si* $\Lambda \cong \dot{+}_{i=1}^{n} \Lambda_i$, *entonces* $\mathrm{mod}\Lambda \cong \mathop{\times}_{i=1}^{n} \mathrm{mod}\Lambda_i$ (*el producto cartesiano de las categorías* $\mathrm{mod}\Lambda_i$, $i = 1,\dots,n$). //

El siguiente resultado caracteriza las álgebras indescomponibles:

1.3.3 Proposición: *Sea* Λ *una* k-*álgebra.* Λ *es indescomponible si y sólo si los únicos idempotentes centrales son* 0 *y* 1.

Demostración: Sea e un idempotente central (i.e. $e^2 = e$ y $ex = xe$ para toda $x \in \Lambda$). Es fácil comprobar que $\Lambda = \Lambda e \dot{+} \Lambda(1-e)$. Entonces, si Λ es indescomponible, $e = 0$ o $e = 1$.

Recíprocamente, si $\Lambda = \Lambda_1 \dot{+} \Lambda_2$, decompongamos el 1 de Λ, $1 = f+g$. Es fácil verificar que f y g son idempotentes centrales (además son ortogonales) y que $\Lambda f = \Lambda_1$, $\Lambda g = \Lambda_2$. Entonces $f = 1$ o $g = 1$, de donde $\Lambda_1 = \Lambda$ o $\Lambda_2 = \Lambda$. //

§1.4 EL RADICAL DE UN ALGEBRA

Por lo que resta del capítulo, todas la k-álgebras consideradas son de dimensión finita.

Recordemos que si Λ es una k-álgebra e I,J son ideales izquierdos de Λ,

$$IJ = \{\Sigma x_i y_i \ / \ x_i \in I, y_i \in J\}, \text{ e}$$

$$I + J = \{x+y \ / \ x \in I, y \in J\}$$

son los ideales izquierdos producto y suma de I y J respectivamente.

<u>Definición</u>: Un ideal izquierdo I es <u>nilpotente</u> si $I^n = 0$ para algún número natural n.

Nótese que I es nilpotente si y sólo si cada producto de n elementos de I vale cero (para algún natural n).

<u>1.4.1</u> <u>Proposición</u>: *Toda* k-*álgebra* Λ *de dimensión finita posee un ideal izquierdo nilpotente que contiene a todos los ideales izquierdos nilpotentes. Este ideal es, por tanto, único y lo llamaremos el* <u>radical</u> *de* Λ (radΛ).

Además, radΛ *es un ideal bilateral.*

<u>Demostración</u>: Sea J un ideal izquierdo nilpotente de k-dimensión máxima.

Supongamos que existe un ideal izquierdo nilpotente I tal que $I \not\subset J$. Entonces $J \subsetneq I + J$, de donde $\dim J < \dim(I+J)$, lo que resulta ser una contradicción puesto que I+J es nilpotente, como lo afirma el siguiente lema:

<u>Lema</u>: *Si* I,J *son ideales izquierdos nilpotentes,* I+J *también lo es.*

<u>Demostración</u>: Digamos que $I^n = 0$ y $J^m = 0$. Consideremos un producto de n+m elementos de I+J:

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)\ldots(x_{n+m} + y_{n+m}).$$

Desarrollando este producto, cada sumando tendrá: o bien a lo menos n factores en I (y por lo tanto está en I^n) o bien a lo menos m factores en J (y por lo tanto está en J^m). En ambos casos el sumando es cero. //

Para finalizar la prueba de 1.4.1, veamos ahora que $J = \mathrm{rad}\Lambda$ resulta también ideal derecho. Debemos probar que $(\mathrm{rad}\Lambda)\Lambda \subseteq \mathrm{rad}\Lambda$, para lo cual basta mostrar que el ideal izquierdo $(\mathrm{rad}\Lambda)\Lambda$ es nilpotente.

$$((\mathrm{rad}\Lambda)\Lambda)^n = (\mathrm{rad}\Lambda)\Lambda(\mathrm{rad}\Lambda)\Lambda\ldots(\mathrm{rad}\Lambda)\Lambda,$$

pero $\Lambda(\mathrm{rad}\Lambda) \subseteq \mathrm{rad}\Lambda$, de donde $((\mathrm{rad}\Lambda)\Lambda)^n \subseteq (\mathrm{rad}\Lambda)^n = 0$. Esto termina la prueba de nuestra proposición. //

Pasaremos ahora a estudiar las álgebras cuyo radical es cero, que como veremos más adelante, poseen propiedades características.

<u>1.4.2</u> <u>Proposición</u>: *Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita. Entonces $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ es una k-álgebra de radical cero.*

<u>Demostración</u>: Sea $\pi: \Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ la proyección canónica. Sea I un ideal izquierdo nilpotente ($I^n = 0$) de $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$. Veremos que $I = 0$.

$\pi^{-1}(I)$ es un ideal izquierdo de Λ y, de hecho, nilpotente: en efecto, consideremos $y_1y_2\ldots y_n$ un producto de n elementos en $\pi^{-1}(I)$. Tenemos que $\pi(y_1y_2\ldots y_n) = 0$, o sea que $y_1y_2\ldots y_n \in \mathrm{rad}\Lambda$. Pero $\mathrm{rad}^m\Lambda = 0$ para alguna m, y de aquí podemos ver que todo producto de mn elementos de $\pi^{-1}(I)$ vale cero. Entonces $\pi^{-1}(I) \subseteq \mathrm{rad}\Lambda$, de donde $I = 0$. //

<u>1.4.3</u> <u>Proposición</u>: radΛ *es el mínimo ideal bilateral* I *tal que al dividir por* I *se obtiene un álgebra de radical cero. En otras palabras, si* J *es ideal bilateral y* Λ/J *es de radical cero, entonces* rad$\Lambda \subseteq$ J.

<u>Demostración</u>: Sea $\pi: \Lambda \longrightarrow \Lambda/J$ la proyección canónica. Entonces π(radΛ) es un ideal nilpotente de Λ/J y entonces π(radΛ)= = 0, de donde rad$\Lambda \subseteq$ J. //

La conversa también es cierta: si J es un ideal bilateral que contiene al radical, entonces Λ/J es de radical cero. Esto no lo utilizaremos nosotros pero una prueba fácil se sigue del Teorema de Wedderburn, que enunciaremos más adelante.

<u>1.4.4</u> <u>Proposición</u>: *Sea* Λ *una* k-*álgebra de dimensión finita. Entonces* radΛ *coincide con la intersección de todos los ideales izquierdos (o todos los derechos) máximos.*

<u>Demostración</u>: Sea M un ideal izquierdo máximo, veremos que rad$\Lambda \subseteq M$. Supongamos que rad$\Lambda \not\subseteq M$. Entonces $M \subsetneq$ radΛ + M, por lo que radΛ + M = Λ. Entonces 1 = x+a con ciertos x $\in$ radΛ y a $\in M$. Pero sabemos que x es nilpotente (digamos $x^{n+1} = 0$). Tenemos que

$$(1-x)(1+x+\ldots+x^n) = 1,$$

de donde 1-x es invertible. Pero 1-x = a $\in M$, lo cual querría decir que $M = \Lambda$, pero esto es absurdo.

Para mostrar la otra contención, es necesario introducir más herramienta que, de todas formas, será utilizada mas adelante.

1.4.5 Lema de Nakayama: *Sea J un ideal izquierdo contenido en la intersección de todos los ideales máximos. Sea N un Λ-módulo finitamente generado y supongamos que JN = N. Entonces N = 0.*

Demostración: Supongamos que $N \neq 0$. Para efectos de la prueba podemos suponer que J es bilateral. Consideremos entonces un sistema de generadores $\{w_1, \ldots, w_n\}$ del Λ-módulo N, de cardinalidad mínima.

Como JN = N, podemos escribir: $w_1 = a_1w_1 + \ldots + a_nw_n$ con $a_i \in J$, de donde $(1-a_1)w_1 = a_2w_2 + \ldots + a_nw_n$.

Si $1-a_1$ no es invertible, siempre existe un máximo M que lo contiene, pero siendo a_1 elemento de J, está en todos los máximos, en particular en M. Entonces $1 \in M$, lo cual es absurdo. Por tanto $1-a_1$ es invertible y w_1 se expresa como combinación lineal de $w_2, w_3, \ldots, w_n$ que son, entonces un sistema de generadores de N. Esto es absurdo pues n era mínimo.//

Probemos ahora la otra contención que nos faltaba para probar 1.4.4.

Llamemos E a la intersección de todos los ideales izquierdos máximos.

Consideremos la siguiente cadena de ideales izquierdos de Λ :

$$E \supseteq E^2 \supseteq E^3 \supseteq \ldots E^n \supseteq E^{n+1} \supseteq \ldots$$

Por razones de dimensión, existe un r tal que

$E^r = E^{r+1}$. Aplicando el Lema de Nakayama a E^r tenemos que $E^r = 0$, o sea que E es nilpotente y se encuentra por tanto contenido en radΛ.

Con esto queda demostrada la proposición 1.4.4, si observamos que todo lo hecho es igualmente válido para ideales derechos. //

Definición: Una k-álgebra Λ es simple si no tiene ideales bilaterales, salvo el 0 y Λ.

1.4.6 Teorema de Wedderburn-Artin, Parte I (13.6 de [A-F], p.154): *Toda* k-*álgebra de dimensión finita con radical cero es isomorfa a una suma directa de* k-*álgebras simples.* //

Notemos que la conversa (toda álgebra que es suma directa de k-álgebras simples tiene radical cero) es claramente cierta.

Tales álgebras se llamarán semisimples.

1.4.7 Teorema de Wedderburn-Artin, Parte II (13.4 de [A-F], p. 152): *Toda* k-*álgebra de dimensión finita simple es isomorfa a un álgebra de matrices con entradas en un anillo con división* D. *Además,* D *resulta contener centralmente a* k *y ser de* k-*dimensión finita. (ver ejemplo* 1.1.3). //

Los módulos sobre las álgebras semisimples tienen propiedades características bien conocidas (ver [J1],cap. 2).

Todos los módulos proyectivos inescindibles son simples (i.e. no tienen submódulos propios). De esto se deduce que todo módulo en ModΛ es una suma directa (posiblemente infinita) de simples. Además esto sucede solamente cuando el álgebra es semisimple.

Probaremos ahora un resultado que será de utilidad en el capítulo 3.

1.4.8 Proposición: *Si* k *es algebraicamente cerrado, toda* k-*álgebra con división* D *de dimensión finita coincide con* k.

Demostración: Sea $d \in D$. Digamos que $\dim_k D = n$ y consideremos los elementos $1, d, d^2, \ldots, d^n$. Deben ser linealmente dependientes:

$$a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + \ldots + a_n d^n = 0$$

donde los a_i pertenecen a k y no son todos cero.

Consideremos el polinomio $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. Como k es algebraicamente cerrado, puede factorizarse como

$$a_n (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n), \text{ con } \alpha_i \in k.$$

Pero como k es central en D:

$$a_n (d-\alpha_1)(d-\alpha_2)\ldots(d-\alpha_n) = a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + \ldots + a_n d^n = 0,$$

de donde algún $d-\alpha_i$ es cero y por tanto d está en k. //

1.4.9 Corolario: *Si* k *es algebraicamente cerrado, las* k-*álgebras de dimensión finita simples no son más que las álgebras de matrices con entradas en* k. //

§1.5 EL RADICAL DE UN MODULO

Definición: El radical de un Λ-módulo M es el submódulo radM obtenido al intersectar todos los submódulos máximos de M.

Definición: Un Λ-módulo $S \neq 0$ es simple si no tiene submódulos distintos de 0 y S (Claramente todo simple es inescindible. La conversa sólo vale si el álgebra es semisimple). Un Λ-módulo es semisimple si es isomorfo a una suma directa de módulos simples.

1.5.1 Lema:

Parte 1: *Sean* M *y* N *dos* Λ*-módulos y* $f: M \longrightarrow N$ *un morfismo. Entonces* $f(\mathrm{rad}M) \subseteq \mathrm{rad}N$.

Parte 2: *Si* f *es un epimorfismo y* $\mathrm{Ker}f \subseteq \mathrm{rad}M$, *entonces* $f(\mathrm{rad}M) = \mathrm{rad}N$.

Demostración:

Parte 1: Sea $\mathcal{M}$ un submódulo máximo de N y veamos que $f(\mathrm{rad}M) \subseteq \mathcal{M}$. Para ello consideremos $\pi: N \longrightarrow N/\mathcal{M}$ la proyección canónica y mostremos que $\pi f(\mathrm{rad}M) = 0$.

Ahora bien, es claro que $\mathcal{M}$ es submódulo máximo de N si y sólo si $N/\mathcal{M}$ es simple, y como $\mathrm{Im}(\pi f)$ es un submódulo, es cero o es todo $N/\mathcal{M}$.

En el primer caso, ya hemos terminado.

En el segundo, πf es epimorfismo, entonces $M/\mathrm{Ker}(\pi f)$ es isomorfo a $N/\mathcal{M}$ y por tanto simple, de donde $\mathrm{Ker}(\pi f)$ es máximo en M y radM está contenido en $\mathrm{Ker}(\pi f)$.

Parte 2: El resultado se sigue del hecho de que $M' \mapsto fM'$ establece una biyección que respeta las inclusiones entre los submódulos M' de M que contienen a $\mathrm{Ker}f$ y los submódulos de N (Esto ha sido usado ya en la parte 1).//

1.5.2 Proposición: $\mathrm{rad}(M/\mathrm{rad}M) = 0$.

Demostración: Se sigue de la parte 2 del lema anterior, considerando la proyección canónica $\pi: M \longrightarrow M/\mathrm{rad}M$. //

1.5.3 Proposición: $\mathrm{rad}(M_1 \oplus M_2) = \mathrm{rad}M_1 \oplus \mathrm{rad}M_2$.

Demostración: Consideremos las dos inclusiones canónicas y apliquemos la parte 1 de 1.5.1. Para la otra contención, basta hacer lo mismo con las dos proyecciones canónicas.

Lo mismo es aún válido para sumas directas infinitas.//

1.5.4 Lema: *Sea* S *un* Λ-*módulo simple. Entonces* $(\mathrm{rad}\Lambda)S = 0$.

Demostración: Aplíquese el Lema de Nakayama, 1.4.5. //

Observación: Sea I un ideal bilateral de Λ y M un Λ-módulo tal que $IM = 0$. Entonces M tiene estructura de Λ/I-módulo y todos los Λ-submódulos de M son Λ/I-submódulos. En particular, por el lema anterior, un Λ-módulo es simple si y sólo si lo es como $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$-módulo.

1.5.5 Teorema: *Si* M *es* Λ-*módulo*, $\mathrm{rad}M = (\mathrm{rad}\Lambda)M$.

Demostración: Ya sabemos que $M/\mathrm{rad}M$ tiene radical cero. Consideremos ahora el morfismo inducido por las proyecciones canónicas de M/radM al cociente de éste por cada submódulo máximo. Es decir:

$$M/\mathrm{rad}M \longrightarrow \prod_{\mathcal{M}} (M/\mathrm{rad}M)/\mathcal{M}.$$

El núcleo de este morfismo es precisamente rad(M/radM) que vale cero. M/radM se sumerge en el producto y entonces

$$(\mathrm{rad}\Lambda)(M/\mathrm{rad}M) \subseteq (\mathrm{rad}\Lambda)\prod_{\mathcal{M}} (M/\mathrm{rad}M)/\mathcal{M}.$$

Pero cada $(M/\mathrm{rad}M)/\mathcal{M}$ es simple y por lo tanto anulado por radΛ. Por tanto $(\mathrm{rad}\Lambda)(M/\mathrm{rad}M) = 0$, o sea que $(\mathrm{rad}\Lambda)M \subseteq \mathrm{rad}M$.

Para la otra contención, notemos que $M/(\mathrm{rad}\Lambda)M$ es un $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$-módulo. Pero $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ es un álgebra semisimple y por tanto todos sus módulos son semisimples, de donde $M/(\mathrm{rad}\Lambda)M$ es semisimple como Λ-módulo y su radical es cero.

Consideremos la proyección $f: M \longrightarrow M/(\mathrm{rad}\Lambda)M$ que, gracias a la contención ya mostrada, cumple con las hipótesis de la parte 2 de 1.5.1. Obtenemos:

$$f(\mathrm{rad}M) = \mathrm{rad}(M/(\mathrm{rad}\Lambda)M) = 0,$$

de donde $\mathrm{rad}M \subseteq \mathrm{Ker}f = (\mathrm{rad}\Lambda)M$. //

<u>1.5.6</u> <u>Corolario</u>: *Sea* M *un* Λ*-módulo. Si* radM = 0, *entonces* M *es semisimple. La conversa se sigue de 1.5.4 y ya fue utilizada en la prueba anterior.* //

<u>§1.6</u> <u>CUBIERTAS PROYECTIVAS</u>

<u>Definición</u>: Sean M y N en ModΛ. Un epimorfismo $f: M \longrightarrow N$ es <u>superfluo</u> si, cada vez que fg sea epimorfismo para algún

$g: X \longrightarrow M$, g es epimorfismo.

Para familiarizarse con este concepto, sugerimos al lector probar que:

(a) *Suma directa de morfismos superfluos es superflua.*

(b) *Si* $f: M \twoheadrightarrow N$ *y* $g: N \twoheadrightarrow T$ *son dos morfismos cuya composición* gf *es superflua, entonces* f *es superflua.*

La siguiente es una reformulación del Lema de Nakayama 1.4.5.

1.6.1 Lema de Nakayama: *Sea* I *un ideal izquierdo de* Λ, *con* $I \subseteq \mathrm{rad}\Lambda$. *Entonces* $f: M \twoheadrightarrow M/IM$ *es un morfismo superfluo.*

Demostración: Sea $g: X \longrightarrow M$ y supongamos que fg es epi. Para mostrar que f es superfluo, debemos mostrar que g es epi, o sea que $\mathrm{Im}g = M$.

Consideremos $M/\mathrm{Im}g$. Probaremos que $I(M/\mathrm{Im}g) = M/\mathrm{Im}g$, de donde será $M/\mathrm{Im}g = 0$ por 1.4.5.

Sabemos que $I(M/\mathrm{Im}g) = (IM + \mathrm{Im}g)/\mathrm{Im}g$. Ahora bien, la restricción de f a $\mathrm{Im}g$ es epi, de donde $\mathrm{Im}g + IM = M$ y por tanto queda probado el lema. //

Definición: Sea M en $\mathrm{mod}\Lambda$. Entonces $\phi: P \twoheadrightarrow M$ en $\mathrm{mod}\Lambda$ es una cubierta proyectiva si P es proyectivo y ϕ es superfluo.

1.6.2 La prueba de la unicidad de esta cubierta (en caso de existir) es inmediata: sea ψ: $Q \twoheadrightarrow M$ otro epi superfluo. Por ser Q proyectivo, existe α: $Q \longrightarrow P$ tal que $\phi\alpha = \psi$, por tanto α es epi. Similarmente obtenemos β: $P \longrightarrow Q$ epi, de donde α es isomorfismo.

La existencia de cubierta proyectiva para todo M en modΛ será consecuencia de los resultados de la próxima sección.

§1.7 PROYECTIVOS Y SIMPLES

1.7.1 Proposición (27.1 y 27.4 de [A-F], p. 301): *Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita. Todo idempotente* x *de* $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ *se levanta, es decir que existe un idempotente* e *de* Λ *tal que* $\bar{e} = x$.

Más aún, todo sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales de $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ *se levanta a uno con las mismas propiedades.* //

1.7.2 Proposición: *Sea* Λ *una* k-*álgebra de dimensión finita y* $\{e_1,\ldots,e_n\}$ *un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales. Sabemos ya que* $\{\Lambda e_1,\ldots,\Lambda e_n\}$ *es una lista completa de representantes de las clases de isomorfía de módulos proyectivos inescindibles (nótese que en esta lista hay repeticiones si el álgebra no es básica). Se afirma que*

$$\{\Lambda e_1/\mathrm{rad}\Lambda e_1, \Lambda e_2/\mathrm{rad}\Lambda e_2, \ldots, \Lambda e_n/\mathrm{rad}\Lambda e_n\}$$

es una lista completa de representantes de las clases de iso-

morfía de los módulos simples en modΛ.

Además $\Lambda e_i/\mathrm{rad}\Lambda e_i \cong \Lambda e_j/\mathrm{rad}\Lambda e_j$ *si y sólo si* $\Lambda e_i \cong \Lambda e_j$.

Demostración:

1) Cada $\Lambda e_i/\mathrm{rad}\Lambda e_i$ es simple.

$\Lambda e_i/\mathrm{rad}\Lambda e_i$ es un $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$-módulo y por tanto semisimple. Por otro lado es fácil verificar que teniendo $\Lambda = \Lambda e_1 \oplus \Lambda e_2 \oplus \ldots \oplus \Lambda e_n$, se obtiene:

(*): $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda = \Lambda e_1/\mathrm{rad}\Lambda e_1 \oplus \Lambda e_2/\mathrm{rad}\Lambda e_2 \oplus \ldots \oplus \Lambda e_n/\mathrm{rad}\Lambda e_n$.

Si algún sumando de $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ en la descomposición anterior no fuera simple, obtendríamos un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales con más de n elementos que podríamos levantar a Λ por 1.7.1. Esto es una contradicción.

2) Todo Λ-módulo simple es isomorfo a algún $\Lambda e_i/\mathrm{rad}\Lambda e_i$.

En efecto, tenemos la descomposición (*). Sabemos que allí aparecen todos los proyectivos inescindibles de $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$. Pero $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ es semisimple: todos sus módulos son semisimples y proyectivos, de donde se deduce que, sobre $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$, los proyectivos inescindibles coinciden con los simples. Pero estos son los Λ-módulos simples, como vimos en la sección 1.5.

3) Si $\Lambda e_i/\mathrm{rad}\Lambda e_i \cong \Lambda e_j/\mathrm{rad}\Lambda e_j$, entonces $\Lambda e_i \cong \Lambda e_j$.

En efecto, como Λe_i es proyectivo y al dividir por $\mathrm{rad}\Lambda e_i$ se obtiene un morfismo superfluo (Lema de Nakayama), la unicidad de la cubierta proyectiva nos proporciona el resultado. //

1.7.3 Corolario: *Todo módulo en* modΛ *tiene cubierta proyectiva.*

Demostración: Consideremos la proyección canónica $\pi: M \to M/\mathrm{rad}M$, que sabemos que es superflua por el Lema de Nakayama. Por otro lado, $M/\mathrm{rad}M$ es semisimple. Cada sumando simple tiene cubierta proyectiva por lo anterior, y por tanto $M/\mathrm{rad}M$ tiene cubierta proyectiva por 1.6(a). Supongamos que $f: P \twoheadrightarrow M/\mathrm{rad}M$ es la cubierta proyectiva. Como P es proyectivo, existe $\phi: P \longrightarrow M$ tal que $\pi\phi = f$. Por tanto ϕ es epi, ya que f es superfluo. Además, 1.6(b) prueba que ϕ es superfluo. //

EJERCICIOS DEL CAPITULO 1

Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita.

1.A Si $e \in \Lambda$ es idempotente, entonces $\mathrm{rad}(e\Lambda e) = e(\mathrm{rad}\Lambda)e = e\Lambda e \cap \mathrm{rad}\Lambda$.

1.B Si $\phi: \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ es un morfismo de k-álgebras, $\phi(\mathrm{rad}\Lambda) \subseteq \mathrm{rad}\Lambda'$.

1.C Si $\phi: \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ es un morfismo sobre de k-álgebras, las siguientes afirmaciones son equivalentes (donde $t \geq 1$):

(a) $\mathrm{Ker}\phi \subseteq \mathrm{rad}^t\Lambda$

(b) $\phi^{-1}(\mathrm{rad}^t\Lambda') = \mathrm{rad}^t\Lambda$ (en particular, $\phi(\mathrm{rad}^t\Lambda) = \mathrm{rad}^t\Lambda'$).

(c) ϕ induce un isomorfismo $\bar{\phi}: \Lambda/\mathrm{rad}^t\Lambda \longrightarrow \Lambda'/\mathrm{rad}^t\Lambda'$.

1.D Si $\phi: \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ es un morfismo sobre de k-álgebras con $\mathrm{Ker}\phi \subseteq \mathrm{rad}\Lambda$, y $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos (no nulos) entonces $\{\phi(e_1),\ldots,\phi(e_n)\}$ también lo es.

1.E Sea Λ^{op} el álgebra opuesta de Λ: el mismo k-espacio vectorial, pero con la nueva multiplicación $\lambda * \mu := \mu\lambda$. Entonces $(\Lambda^{op})^{op} = \Lambda$ y, claramente, Λ^{op} es también una k-álgebra de dimensión finita. Muestre que:

(1) Hay una dualidad D: $\mathrm{mod}\Lambda \longrightarrow \mathrm{mod}\Lambda^{op}$, o sea un funtor contravariante D tal que existe otro funtor contravariante E: $\mathrm{mod}\Lambda^{op} \longrightarrow \mathrm{mod}\Lambda$ tal que $DE \cong 1_{\mathrm{mod}\Lambda^{op}}$ y $ED \cong 1_{\mathrm{mod}\Lambda}$. Sugerencia: $D(X) := \mathrm{Hom}_k(X,k)$.

(2) Λ es indescomponible si y sólo si Λ^{op} lo es.

(3) Λ es básica si y sólo si Λ^{op} lo es ([A-F], p. 102, 2.3).

(4) Si Λ es básica y $\Lambda = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_n$ es descomposición en inescindibles, $D(P_1), \ldots, D(P_n)$ es una lista completa y sin repeticiones de los inyectivos inescindibles de $\mathrm{mod}\Lambda^{op}$.