

Un sistema no lineal con ancho de banda prohibida que no presenta supratransmisión

Dr. Jorge Eduardo Macías Díaz ¹

RESUMEN

El propósito de este trabajo es proporcionar evidencia computacional como prueba numérica de que los sistemas tridimensionales regidos por ecuaciones de seno-Gordon y de Klein-Gordon continuas con simetría esférica y perturbadas armónicamente en el origen, no presentan el proceso de supratransmisión no lineal de energía. Las conclusiones presentadas concuerdan con el hecho que es imposible producir estructuras coherentes localizadas cuando los sistemas bajo estudio son sometidos a perturbaciones en el origen.

ABSTRACT

In this work, we provide elementary numerical support in favor of the fact that the process of nonlinear supratransmission is not present in continuous, spherically symmetric, three-dimensional sine-Gordon and Klein-Gordon systems initially at rest and which are driven harmonically at the origin. The results are in agreement with the well-known fact that spherically symmetric Klein-Gordon systems are incapable of building localized coherent structures when driven at the origin.

Palabras clave: Supratransmisión no lineal, ecuación de seno-Gordon en tres dimensiones, simetría esférica.

Key words: *Nonlinear supratransmission, three-dimensional sine-Gordon equation, spherical symmetry.*

Recibido: 15 de junio de 2007, aceptado: 5 de febrero de 2008

¹ Universidad Autónoma de Aguascalientes, Centro de Ciencias Básicas, Departamento de Matemáticas y Física, correo electrónico: jemacias@correo.uaa.mx.

INTRODUCCIÓN

A casi cinco años de la publicación de aquel artículo de Geniet y Leon (2002), el fenómeno de supratransmisión no lineal de energía ha sido estudiado ampliamente en muchos sistemas físicos unidimensionales (para una introducción al concepto de supratransmisión ver Macías-Díaz, 2007). El proceso de supratransmisión no lineal consiste en el incremento repentino de la amplitud de las señales de onda transmitidas en una cadena de osciladores acoplados, debida a una perturbación armónica en uno de los extremos que irradia con una frecuencia en el ancho de banda prohibida, y la investigación más fructífera en el área se ha concentrado en medios discretos, tales como cadenas mecánicas de osciladores armónicos simples descritas por sistemas acoplados de ecuaciones de seno-Gordon o Klein-Gordon (Geniet y Leon, 2002), ecuaciones acopladas de seno-Gordon dobles (Geniet y Leon, 2003), cadenas no lineales de Fermi-Pasta-Ulam (Khomeriki *et al.*, 2004), y medios de Bragg en el régimen no lineal de Kerr (Leon y Spire, 2004). Sin embargo, es menester reconocer que también se han llevado a cabo algunas investigaciones en el caso continuo y que la ecuación de seno-Gordon ha sido un denominador común en dichas investigaciones (Khomeriki y Leon, 2005; Chevrieux *et al.*, 2006a).

La importancia del estudio del proceso de supratransmisión no lineal en sistemas de seno-Gordon ha quedado doblemente de manifiesto en el desarrollo de nuevas técnicas matemáticas para su investigación y en el estudio de aplicaciones físicas novedosas. Por ejemplo, el desarrollo de técnicas computacionales innovadoras

ha sido un camino ciertamente transitado en la investigación numérica del campo (Macías-Díaz y Puri, 2007a; Macías-Díaz, 2007a). Aún más, tras la sugerencia de que el proceso de supratransmisión no lineal de energía se encuentra presente en sistemas bidimensionales de arreglos discretos de conjunciones de Josephson (Chevrieux *et al.*, 2006a), se han propuesto recientemente generalizaciones de las técnicas computacionales mencionadas (Macías-Díaz, 2007b; Macías-Díaz, 2007c).

Desde una perspectiva más pragmática, varias aplicaciones del proceso de supratransmisión han sido realizadas o sugeridas al diseño de amplificadores digitales de señales ultra débiles (Khomeriki *et al.*, 2006), detectores de luz sensibles a excitaciones ultra débiles (Chevrieux *et al.*, 2006b), arreglos ópticos (Khomeriki, 2004) y filtros de luz (Khomeriki y Ruffo, 2005), y el análisis de la propagación de señales binarias en arreglos discretos de osciladores armónicos simples amortiguados (Macías-Díaz y Puri, 2007b) y sin amortiguamiento (Macías-Díaz y Puri, 2007c), y arreglos discretos de conjunciones de Josephson en paralelo (Macías-Díaz y Puri, 2007d). En este punto, cabe señalar que la literatura especializada en el área contará con realizaciones de aplicaciones para el caso multidimensional en un futuro no muy lejano.

En vista de la importancia que reviste el proceso de supratransmisión de energía, es importante determinar qué medios físicos son susceptibles a conllevarlo. Geniet y Leon sugirieron que cualquier sistema no lineal con un ancho de banda prohibido es capaz de sostener supratransmisión cuando se perturba armónicamente con una frecuencia dentro de dicho ancho de banda (Geniet y Leon 2002). Esta afirmación ha sido verificada en muchos sistemas físicos. Sin embargo, en este trabajo se verificará numéricamente que dicho proceso se encuentra ausente en medios continuos tridimensionales, regidos por ecuaciones de seno-Gordon o Klein-Gordon que son perturbados armónicamente en el origen.

Modelo matemático

En este artículo se considera un medio continuo en tres dimensiones espaciales, inicialmente en reposo y gobernado por la ecuación de Klein-Gordon modificada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + V'(u) = 0, \quad (1)$$

donde u es una función definida en $\mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}$, y \mathfrak{R} representa el campo de los números reales. La constante γ es el coeficiente de amortiguamiento externo, y V es, en general, una función continuamente diferenciable. Particularmente, es conveniente fijar $V(u) = 1 - \cos u$ para el caso de sistemas de seno-Gordon, y $V(u) = u^2/2! - u^4/4!$ para el caso de ecuaciones de Klein-Gordon no lineales. El medio es sometido a perturbaciones armónicas en el origen, descritas por la relación $\phi(t) = A \sin(\Omega t)$, donde Ω es una frecuencia en el ancho de banda prohibida, esto es, $\Omega < 1$. Dicho ancho de banda no es sino el conjunto de frecuencias prohibidas en la relación de dispersión lineal (Geniet *et al.* 2002).

Por ello, asume intrínsecamente que las soluciones de (1) poseen simetría esférica., es decir las soluciones pueden ser expresadas en la forma $u = u(r, t)$, donde r representa la distancia entre el origen y el punto en cuestión. Entonces, el medio es descrito en coordenadas esféricas a través de la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + V'(u) = 0. \quad (2)$$

El hamiltoniano de la porción conservativa del modelo (1) está dado por

$$H = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + |\nabla u|^2 \right\} + V(u); \quad (3)$$

la energía total $E(t)$ del sistema en cualquier instante de tiempo t se obtiene integrando el hamiltoniano sobre el espacio \mathfrak{R}^3 . Para propósitos de cómputo, $E(t)$ puede ser expresada convenientemente en coordenadas esféricas mediante el uso de la transformación $v(r, t) = ru(r, t)$, en cuyo caso:

$$E(t) = 4\pi \int_0^\infty \left\{ \frac{(v_r)^2 + (v_t)^2}{2} + r^2 V(v/r) \right\} dr. \quad (4)$$

Técnica computacional

Es menester observar que el problema de resolver la ecuación (1) con condiciones iniciales nulas conlleva a la resolución del siguiente problema de valores iniciales y en la frontera:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \gamma \frac{\partial v}{\partial t} + rV'(v/r) = 0, \quad r > 0, \quad (5)$$

s. a. $\begin{cases} v(r,0) = v_t(r,0) = 0, & r > 0, \\ v(0,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$

donde V está dado como en la sección anterior. Uno debe observar aquí que la perturbación armónica en el origen se transforma en la última condición del problema (5), lo cual conduce obviamente a la solución nula. Así pues, con el objeto de evitar trivialidades, es menester reemplazar dicha condición por la identidad $v(\varepsilon, t) = \varepsilon\phi(t)$, siendo ε un número real positivo muy cercano a cero.

Hecho esto, las soluciones de (5) pueden ser obtenidas a través de una modificación simple de un método numérico para aproximar soluciones con simetría esférica (Macías-Díaz, 2005). Las ventajas del método a emplearse con respecto a otros esquemas existentes son sus propiedades numéricas de consistencia y estabilidad, así como el hecho de que, asociado a él, existe un esquema para el cálculo consistente de la energía del medio.

Sean $\varepsilon = r_0 < r_1 < \dots < r_M = L$ y $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ dos particiones regulares consistentes de M y N subintervalos, respectivamente, de los intervalos radial y temporal $[\varepsilon, L]$ y $[0, T]$, respectivamente. El esquema numérico empleado en la aproximación de las soluciones del problema alternativo (5) con condición adicional $v(\varepsilon, t) = \varepsilon\phi(t)$ se describe por medio de la expresión:

$$\frac{v_j^{n+1} - 2v_j^n + v_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{(\Delta r)^2} + \gamma \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} + (j\Delta r)^2 \frac{V(v_j^{n+1}/j\Delta r) - V(v_j^{n-1}/j\Delta r)}{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}} = 0, \quad (6)$$

donde V_j^n es la aproximación de $v(r_i, t_n)$ proporcionada por el método, $\Delta r = L/M$ y $\Delta t = T/N$.

Por su parte, la energía del sistema en el n -ésimo instante de tiempo es aproximada consistentemente por la relación:

$$E^n = 4\pi E_0^n, \quad (7)$$

donde:

$$\frac{E_0^n}{\Delta r} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{M-1} \left(\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{M-1} \left(\frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta r} \right) \left(\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta r} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{M-1} (j\Delta r)^2 [V(v_j^{n+1}/j\Delta r) + V(v_j^n/j\Delta r)] \quad (8)$$

Finalmente, el esquema numérico a emplearse tiene la propiedad de que $(E^{n+1} - E^n)/\Delta t$ proporciona una estimación consistente de la razón de cambio de la energía del sistema con respecto al tiempo. Además, el esquema mismo es consistente y condicionalmente estable, con condición de estabilidad descrita por la igualdad:

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta r} \right)^2 < 1 + \gamma \frac{\Delta t}{4}. \quad (9)$$

RESULTADOS

Fíjese un tamaño de paso Δt en el tiempo igual a 0.02, y tómesese un tamaño de paso radial y un número ε ambos iguales a Δt . En todos los cálculos numéricos realizados en el presente trabajo se considera un periodo de tiempo fijo. Más aún, con el objeto de evitar la creación de ondas de choque en el origen, la amplitud de la perturbación armónica es incrementada linealmente desde cero hasta su valor actual A , durante un periodo de tiempo relativamente corto y anterior al instante $t = 0$. Se asume además que el medio no posee amortiguamiento externo.

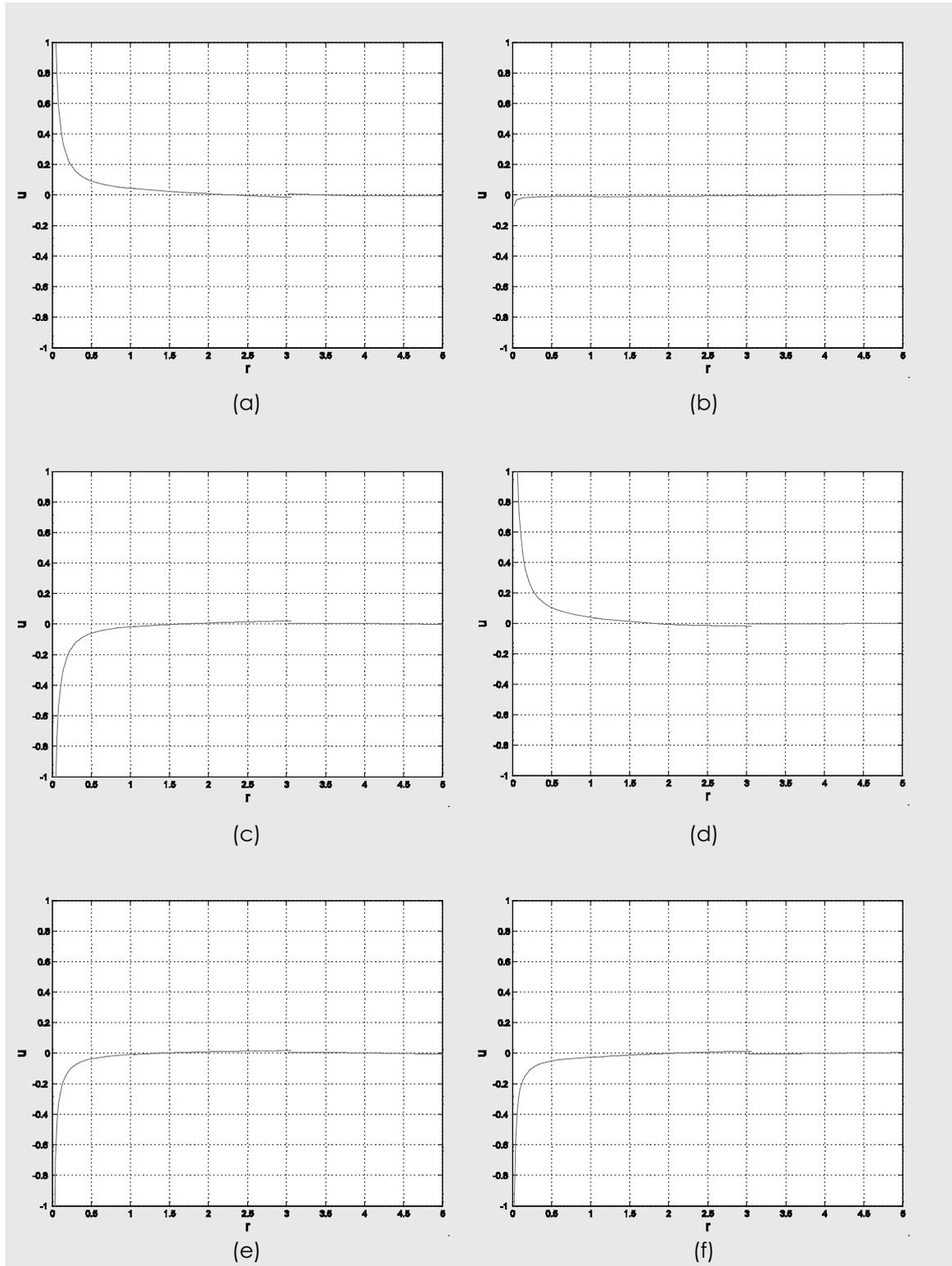


Figura 1. Gráfica de la solución de la ecuación (1) vs. r , para seis tiempos distintos: (a) 15, (b) 17.5, (c) 20, (d) 22.5, (e) 25, (f) 27.5.

Con el objeto de simular un medio no acotado, los resultados computacionales son obtenidos aproximando la solución del problema en una esfera cerrada, con centro situado en el origen y radio igual a 6, en el que el parámetro γ lentamente es incrementado en magnitud de 0 a 1 fuera de la esfera abierta con centro en el origen y radio 5, simulando, de tal forma, una frontera absorbente. Más precisamente, definimos:

$$\gamma(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} \{1 + \tanh[8(r - 5.5)]\}, & 5 \leq r \leq 6, \\ 0, & 0 < r < 5. \end{cases} \quad (10)$$

Cabe señalar que si la función de potencial V es aquella para un sistema de seno-Gordon, entonces $rV'(v/r)$ es aproximadamente igual a cero para valores positivos de r suficientemente cercanos a cero. Por tanto, el medio se comporta linealmente en la vecindad del origen y, particularmente, se especula que el sistema bajo estudio es incapaz de producir el fenómeno de supratransmisión en presencia de perturbaciones armónicas en el origen. Por supuesto, esta afirmación se verificará numéricamente a continuación, para medios gobernados por ecuaciones de seno-Gordon y Klein-Gordon.

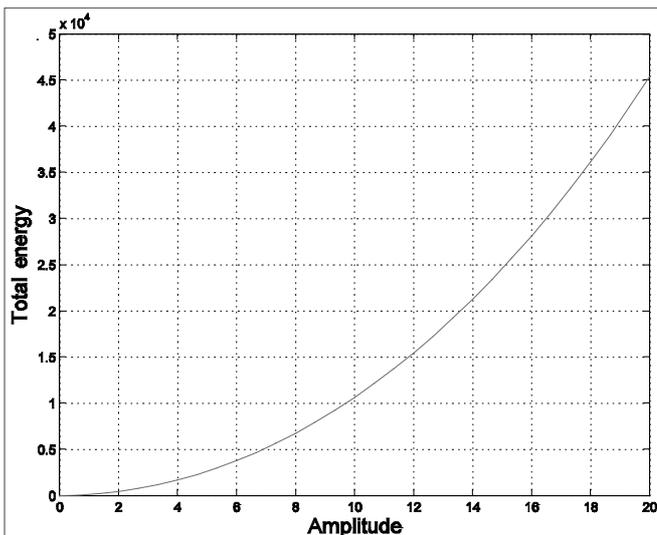


Figura 2. Energía total vs. amplitud de la perturbación armónica en el problema (1), sometido a una frecuencia igual a 0.8.

RESULTADOS

Comenzamos proporcionando una prueba numérica en el que el proceso de supratransmisión no está presente en el sistema (1). Para tal efecto, se ha perturbado el sistema armónicamente con una frecuencia de 0.9 y una amplitud de 3, y se han registrado los resultados para seis tiempos distintos. Los resultados se muestran en la figura 1, la cual evidencia el hecho que no existe transmisión de energía en el sistema.

Por el resto de esta sección, el parámetro A tomará valores en el intervalo $[0,20]$.

Fijese una frecuencia $\Omega = 0.8$ en el ancho de banda prohibida de un sistema de seno-Gordon descrito por (1). Se calcula la energía total del sistema durante un periodo de tiempo igual a 20, y la figura 2 muestra los resultados obtenidos en los cálculos. La gráfica demuestra un incremento continuo en el monto de energía inyectado en el sistema debido a la perturbación armónica en el origen, sin ningún incremento drástico aparente.

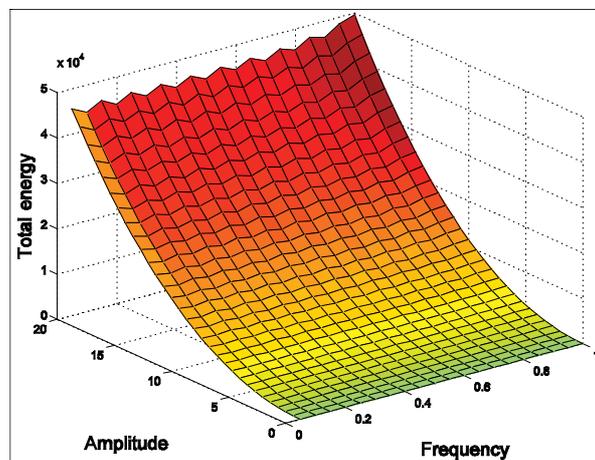


Figura 3. Energía total del sistema de Klein-Gordon (1) vs. frecuencia y amplitud de la perturbación armónica en el origen.

A continuación se permite a la frecuencia Ω tomar valores en el intervalo $[0,1]$. La gráfica de energía total del sistema sobre el intervalo de tiempo especificado vs. la frecuencia y la amplitud de la perturbación en el origen es presentada en la figura 3. Los resultados muestran nuevamente una dependencia continua de la energía total del medio con respecto a la frecuencia y la

amplitud. Este hecho apoya la afirmación de que el proceso de supratransmisión no lineal de energía se encuentra ausente en sistemas de Klein-Gordon descritos por (1).

Enseguida se procede a examinar el caso de sistemas del tipo de seno-Gordon. Resultados preliminares que no han sido incorporados en este trabajo indican que, para una frecuencia igual a 0.8, la energía total del sistema durante un periodo de tiempo de longitud 20 se incrementa suavemente con respecto a A . Variando Ω entre 0 y 1, y calculando la energía total del medio sobre el periodo de tiempo seleccionado para varias parejas (Ω, A) , es posible obtener la figura 4, la cual demuestra que el proceso de supratransmisión no lineal también se encuentra ausente en el caso de ecuaciones de seno-Gordon.

CONCLUSIONES

Este trabajo aporta evidencia numérica relevante respecto a que el proceso de supratransmisión

no lineal de energía no se encuentra presente en medios descritos por ecuaciones continuas de seno-Gordon en tres dimensiones, en las que las condiciones iniciales son nulas y en las que el origen es perturbado armónicamente con una frecuencia en el ancho de banda prohibida. De este modo, se establece que no todo sistema no lineal con un ancho de banda prohibida es capaz de presentar el fenómeno de supratransmisión. Los cálculos son apoyados empíricamente por el hecho que un sistema de seno-Gordon con simetría esférica se comporta linealmente cerca del origen, y analíticamente por el hecho que el origen de dichos sistemas es incapaz de producir estructuras coherentes localizadas.

Agradecimientos:

El presente artículo fue realizado bajo las siglas del proyecto de investigación PIMO8-1 en la Universidad Autónoma de Aguascalientes.

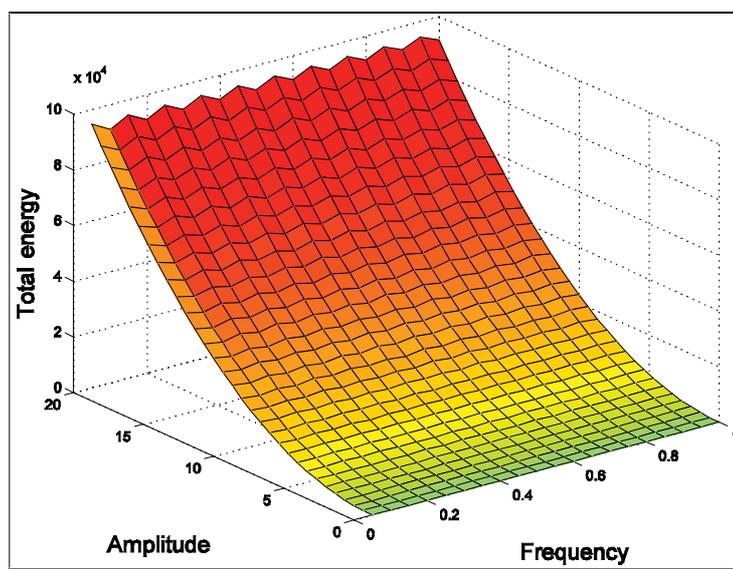


Figura 4. Energía total del sistema de seno-Gordon (1) vs. frecuencia y amplitud de la perturbación armónica en el origen.

BIBLIOGRAFÍA

1. CHEVRIEUX, D.; KHOMERIKI, R.; LEON, J., Theory of a Josephson junction parallel array detector sensitive to very weak signals, *Physical Review B* 73, 214516, 2006a.
2. CHEVRIEUX, D.; KHOMERIKI, R.; LEON, J., Bistable transmitting nonlinear directional couplers, *Modern Physics Letters B* 20, 515, 2006b.
3. GENIET, F.; LEON, J., Energy transmission in the forbidden band gap of a nonlinear chain, *Physical Review Letters* 89, 134102, 2002.
4. GENIET, F.; LEON, J., Nonlinear supratransmission, *Journal of Physics: Condens Matter* 15, 2933-2949, 2003.
5. KHOMERIKI, R., Nonlinear band gap transmission in optical waveguide arrays, *Physical Review Letters* 92, 063905, 2004.
6. KHOMERIKI, R.; LEON, J., Bistability in sine-Gordon: the ideal switch, *Physical Review E* 71, 056620, 2005.
7. KHOMERIKI, R.; LEON, J.; CHEVRIEUX, D., Quantum hall bilayer digital amplifier, *European Physics Journal B* 49, 213-218, 2006.
8. KHOMERIKI, R.; LEPRI, S.; RUFFO, S., Nonlinear supratransmission and bistability in the Fermi-Pasta-Ulam model, *Physical Review E* 70, 066626, 2004.
9. KHOMERIKI, R.; RUFFO, S., Nonadiabatic Landau-Zener tunneling in waveguide arrays with a step in the refracting index, *Physical Review Letters* 94, 113904, 2005.
10. LEON, J.; SPIRE, A., Gap soliton formation by nonlinear supratransmission in Bragg media, *Physics Letters A* 327, 474-480, 2004.
11. MACÍAS-DÍAZ, J. E., A symplectic method for discrete systems of modified sine-Gordon equations, *Applied Numerical Analysis*. Sometido a revisión, 2007a.
12. MACÍAS-DÍAZ, J. E., A numerical method in the analysis of the transmission of wave signals in media governed by two-dimensional Klein-Gordon equations submitted to harmonic driving, *SIAM Journal of Scientific Computing*. Sometido a revisión, 2007b.
13. MACÍAS-DÍAZ, J. E.; Finite-difference schemes in the energy analysis of dissipative sine-Gordon systems, *SIAM Journal of Numerical Analysis*. Sometido a revisión, 2007c.
14. MACÍAS-DÍAZ, J. E.; Los procesos de supratransmisión e infratransmisión en arreglos discretos de uniones de Josephson, *Investigación y Ciencia* 38, 2007d.
15. MACÍAS-DÍAZ, J. E.; PURI, A., A numerical method for computing radially symmetric solutions of a dissipative nonlinear modified Klein-Gordon equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 21, 998-1015, 2005.
16. MACÍAS-DÍAZ, J. E.; PURI, A., An energy-based computational method in the analysis of the transmission of energy in a chain of coupled oscillators, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, en prensa, 2007a.
17. MACÍAS-DÍAZ, J. E.; PURI, A., On the propagation of binary signals in damped mechanical systems of oscillators, *Physica D* 228, 112-121, 2007b.
18. MACÍAS-DÍAZ, J. E.; PURI, A., An application of nonlinear supratransmission to the propagation of binary signals in semi-infinite mechanical systems of coupled oscillators, *Physics Letters A* 366, 447-450, 2007c.
19. MACÍAS-DÍAZ, J. E.; PURI, A., On the transmission of binary bits in discrete Josephson-junction arrays, *Physical Review B*. Sometido a revisión, 2007d.