

## *La función de producción agregada en retrospectiva*

JESÚS FELIPE  
J.S.L. MCCOMBIE\*

### INTRODUCCIÓN

Durante los años cincuenta, sesenta y principios de los setenta, un grupo de economistas libró uno de los debates más importantes del siglo XX en la teoría económica, conocidos en la literatura como los debates de Cambridge-Cambridge,<sup>1</sup> cuyo objetivo fue una discusión muy profunda sobre los fundamentos teóricos del concepto de función de producción agregada y las implicaciones de ésta, en particular como base de una teoría

---

Manuscrito recibido en mayo de 2004; aceptado en diciembre de 2004.

\* Jesús Felipe pertenece al Economics and Research Department, Asian Development Bank Manila, Filipinas <jfelipe@adb.org>. J.S.L. McCombie es profesor del Downing College, Cambridge, Reino Unido <jslm2@hermes.cam.ac.uk>. Este artículo representa la opinión de los autores y no la del Asian Development Bank, sus Directores Ejecutivos, o la de los países miembros a los que representan. Los autores agradecen a dos dictaminadores anónimos sus muy valiosos comentarios y sugerencias, y a Julio López su enorme ayuda.

<sup>1</sup> Los dos Cambridge se refieren a Cambridge, Reino Unido y Cambridge, Estados Unidos. Los defensores del primer grupo fueron Robinson, Sraffa, Pasinetti, Garegnani y Kaldor. En el otro grupo estaban Samuelson, Solow, Hahn y Bliss.

de la distribución del producto agregado; sin embargo, hacia finales de los años setenta, la controversia decayó y el tema se abandonó. De forma paralela, otra literatura abordó el problema de los fundamentos teóricos de la función de producción desde otro punto de vista, el de la agregación. El resultado de estos debates, así como de la literatura sobre la agregación, fue que el concepto de función de producción agregada y sus implicaciones salieron muy estropeados. Pero, con la llegada de los modelos de crecimiento endógeno durante la década de los ochenta, una nueva generación de economistas comenzó a desarrollar modelos teóricos de crecimiento y a llevar a cabo ejercicios empíricos al utilizar funciones de producción agregadas, como si los debates de Cambridge y las críticas tan importantes que cuestionaron la noción de función de producción agregada jamás hubieran tenido lugar.

El objetivo de este artículo es hacer un resumen actualizado de la literatura que ha cuestionado el concepto de función de producción agregada durante varias décadas. Es paradójico que uno de los conceptos más importantes de la macroeconomía neoclásica, la función de producción agregada, sea a la vez un concepto sin fundamento teórico sólido, hasta el punto de ser una entidad totalmente ficticia.<sup>2</sup> Por ello, hacer hoy este ejercicio de retrospectiva es importante dado que gran parte de los economistas desconocen esta literatura (y no porque haya sido publicada en revistas profesionales oscuras), la cual tiene implicaciones muy importantes tanto desde el punto de vista teórico (el tipo de modelos que se construyen) como desde el empírico (resultados) y, por tanto, en la política económica (recomendaciones).<sup>3</sup> Una gran parte de los economistas formados desde la década de los ochenta no ha oído hablar de estas críticas fundamentales

---

<sup>2</sup> Nos referimos a una función de producción agregada como aquella en la que el producto es una medida del valor monetario (aunque este deflacionada) y no una cantidad física, independientemente de la unidad de observación (empresa, industria). La medida de valor tiene que ser utilizada para agregar productos heterogéneos. La conversión a precios constantes por medio de un deflactor no da lugar a cantidades físicas.

<sup>3</sup> Para el lector que desee profundizar en estos temas, recomendamos consultar a Felipe y Fisher (2003) y Felipe y McCombie (2005a).

del concepto de función de producción agregada, y la utilizan con el convencimiento de ser un pilar básico de la economía que han estudiado y practican, en particular en áreas tales como el crecimiento económico, trabajo o comercio internacional.

Aunque el artículo tiene un carácter teórico en su forma, las implicaciones son de carácter eminentemente empírico. Hacemos referencia a una gran cantidad de trabajos publicados que esperamos el lector revise (si no todos, sí algunos) con vistas a profundizar en los argumentos.

Desde el punto de vista empírico, las funciones de producción agregadas se utilizan con los siguientes fines: i) obtener estimaciones de la elasticidad de sustitución entre los factores y de la elasticidad precio-demanda de los factores. Esta se utiliza i) con el fin de predecir los efectos de cambios en la tecnología o en la oferta de los factores sobre la distribución de la renta nacional (Ferguson, 1969); ii) estudiar las fuentes del crecimiento con vistas a distribuir el crecimiento total entre el que se obtiene gracias a la acumulación de los factores de la producción y el progreso técnico (Solow, 1957); iii) contrastar teorías y cuantificar sus efectos (Mankiw *et al.*, 1992); iv) discutir y evaluar diferentes políticas económicas (Jorgenson y Yu, 1984). Por ello, la pregunta fundamental que hacemos es la siguiente: ¿es la función de producción agregada un “resumen” de la supuesta tecnología “agregada”? En otras palabras: si una función de producción agregada es estimada por medio de métodos estadísticos, ¿los coeficientes estimados reflejan los verdaderos parámetros tecnológicos subyacentes?

La cuestión de fondo a tratar es la siguiente: la función de producción es un concepto puramente microeconómico que describe la tecnología con la que se obtiene el máximo producto dados unos insumos; todo ello en un contexto de optimización y asignación eficiente; es decir, donde la empresa maximiza el producto dados los insumos. Por tanto, uno puede preguntarse: ¿es legítimo, desde el punto de vista teórico, agregar productos (e insumos) del sector industrial, tales como el refinado de petróleo y la industria textil, y estimar una función de producción “agregada” que, de alguna forma, trata de representar los parámetros tecnológicos, tales como

la elasticidad de sustitución, de este hipotético sector industrial agregado? La aún más hipotética función de producción agregada de toda la economía es el resultado de un también hipotético proceso de agregación de una multiplicidad de industrias aún más dispares (pues hay que añadir el sector agrícola y los servicios). Si la respuesta a la pregunta es que este ejercicio es dudoso, como se concluyó durante los debates a los que aludimos más arriba, las siguientes preguntas lógicamente deben hacerse: i) ¿qué se estima estadísticamente cuando se utilizan datos agregados?; ii) ¿por qué la función de producción agregada continua siendo utilizada en análisis teóricos y empíricos? Estas preguntas tienen una gran relevancia porque gran parte de la macroeconomía moderna depende de este concepto.

El resto del artículo se estructura de la forma siguiente. La sección dos hace un resumen de los debates de Cambridge-Cambridge, por un lado, y la literatura de la agregación, por el otro. Ambos cuestionaron hace décadas la noción de función de producción agregada. Partiendo de puntos de vista distintos, estas dos literaturas convergen y concluyen que tal concepto es difícil de justificar desde el punto de vista teórico. La sección tres resume las tesis de Felipe y McCombie (véanse referencias), desarrolladas durante la última década sobre la base de trabajos anteriores. Estos trabajos dan respuesta a la pregunta siguiente: si la función de producción agregada no se puede derivar teóricamente a partir de las funciones de producción microeconómicas, como la literatura sobre la agregación demostró, ¿qué se obtiene entonces al estimar estadísticamente una regresión del producto agregado sobre agregados del capital y el trabajo?, ¿cómo se pueden y deben interpretar los resultados? La sección cuatro discute varios ejemplos de aplicaciones de funciones de producción agregadas. La sección cinco discute los motivos por los cuales los macroeconomistas continúan utilizando las funciones de producción agregadas y ofrece una evaluación al respecto. La sección seis presenta las conclusiones del trabajo.

## LOS DEBATES DE CAMBRIDGE-CAMBRIDGE Y EL PROBLEMA DE LA AGREGACIÓN

### Los debates de Cambridge-Cambridge sobre la teoría del capital

En uno de los artículos de los más importantes en la historia de la economía del siglo XX, Joan Robinson (1953-1954) hizo una pregunta que desató lo que se conoce hoy como los debates de Cambridge-Cambridge sobre la teoría del capital: *¿en qué unidades se mide el capital?* Robinson se refería al “capital” que los economistas neoclásicos utilizaban como argumento en funciones de producción agregadas del tipo  $Q=f(K, L)$ , donde  $Q$  es el producto,  $L$  es el trabajo y  $K$  es el capital. En este modelo el producto físico ( $Q$ ) es único y homogéneo. Partiendo de esta relación fundamental, la economía neoclásica llega a tres resultados fundamentales (Cohen y Harcourt, 2003, p. 201): i) la tasa de beneficio real del capital (la tasa de interés) esta determinada por las propiedades técnicas de la productividad marginal decreciente del capital; ii) una mayor cantidad de capital conlleva un menor producto marginal del capital adicional y, por tanto, una menor tasa de interés; iii) la distribución del producto entre trabajadores y capitalistas se explica por la abundancia relativa de los factores y por los productos marginales. El precio de los servicios del capital (la tasa de interés) está determinado por la escasez relativa y la productividad marginal del capital agregado; el precio de los servicios del factor trabajo (el salario) esta determinado por la escasez relativa y la productividad marginal del trabajo.

El motivo de la pregunta de Robinson fue el siguiente: los resultados del modelo neoclásico con un solo producto (resumidos en el párrafo anterior) dependen y necesitan de una noción del capital en términos físicos (y lo mismo para el trabajo) para que existan las relaciones causales unidireccionales señaladas (es decir, cambios en las cantidades físicas de los factores implican cambios inversos en los precios de los mismos). Pero, si la función de producción es una relación técnica entre las cantidades

físicas del producto y de los factores de producción, a nivel agregado el capital presenta un problema, pues los bienes de capital están constituidos por una serie de bienes heterogéneos que no se pueden expresar en términos de una sola unidad física homogénea.<sup>4</sup> La única forma de expresarlos en una sola unidad a nivel agregado es en términos monetarios, lo que representa un problema si la cantidad monetaria se utiliza en la función de producción. El valor del capital puede ser medido bien en términos del costo de producción, el cual lleva tiempo, o en términos del valor actualizado del flujo del producto que genera. En cualquier caso, el *tiempo* juega un papel importante, y por tanto hay una tasa de interés que, como se ha indicado más arriba, está determinada causalmente por la cantidad de capital. En este punto el razonamiento degenera en un problema de circularidad. La conclusión es que los tres resultados fundamentales del modelo neoclásico señalados anteriormente no se cumplen más que en el caso muy especial del modelo de un solo producto.

Joan Robinson indicó que los economistas neoclásicos hicieron desaparecer, mediante la función de producción, dos conceptos distintos del capital que los economistas habían distinguido tradicionalmente: i) capital como el ahorro acumulado a través del tiempo (un fondo). Este era el concepto financiero del capital, el cual podía ser medido de forma inequívoca; ii) capital como un conjunto de factores productivos, bienes de capital heterogéneos. Este era el concepto técnico del capital que no podía ser medido en una única unidad. La solución a este problema fue argumentar que, sobre períodos de tiempo muy largos, cambios en el valor del capital reflejaban cambios en el *stock* de los bienes de inversión. Esto era

---

<sup>4</sup> En términos simples, el problema planteado es el siguiente. Supóngase que hay  $n$  tipos de bienes de capital,  $K_i^t$ ,  $i = 1 \dots n$ . El precio de cada bien de capital en términos de un período base es  $P_i^0$ . ¿Se puede definir un concepto de capital como

$$K^t = \sum_{i=1}^n P_i^0 K_i^t,$$

resultado de combinar cantidades de bienes de capital en un único número que puede ser interpretado como una medida del capital real de la economía total?

requisito necesario para demostrar que en un estado de *laissez-faire* cada factor de la producción que contribuye a la producción recibe el equivalente al valor de lo que produce. Esta es la esencia de la teoría marginalista de la producción.

Con la revolución marginalista estos dos conceptos del capital se comenzaron a mezclar, en particular en el contexto de la función de producción. La consecuencia fue que las economías se comenzaron a analizar y modelizar en términos de agregados del producto (capital y trabajo) y se comenzó a hablar de la remuneración de estos factores en términos de sus productividades marginales. Es más, se argumentó que la división del producto entre los factores podía ser explicada en términos de las productividades marginales. Esta explicación de la división del producto era inaceptable para Robinson y otros economistas.

Joan Robinson argumentó que la solución neoclásica de expresar el agregado de capital de la función de producción en términos monetarios era incorrecta, pues ese valor no tenía nada que ver con la noción de factor de producción. Los bienes de capital que configuran la noción de *stock* de capital han sido, a su vez, producidos por empresas que, en su producción, requerían unos beneficios. Esto implica que para llegar a una noción de *stock* de capital agregado uno debe saber su precio (la circularidad mencionada anteriormente). Es más, el precio de cualquier bien no puede ser determinado independientemente de las condiciones técnicas de la producción y de la tasa de beneficios. Es decir, el precio del capital agregado está influido por la distribución del ingreso entre los factores. El valor del capital cambia al variar el salario y la tasa de beneficio, de forma que la misma cantidad física de capital puede representar valores distintos; y diferentes *stocks* de capital pueden tener el mismo valor. En tanto el *stock* de capital represente un conjunto de bienes heterogéneos, su medida requiere conocimiento de los valores relativos de los capitales individuales que lo componen. Esto sólo puede conseguirse si el vector de precios de la economía y la tasa de beneficios se conocen de antemano. La consecuencia es que el *stock* de capital agregado, la función de producción y los productos marginales de los factores sólo pueden ser definidos cuando la

tasa de beneficios esta dada, lo que implica que no pueden ser utilizados como parte de una teoría de la tasa de beneficio o de la distribución.

Estos argumentos se pueden exponer algebraicamente de la forma siguiente (siguiendo a Bhaduri, 1969). El producto total ( $Q$ ) se puede expresar como la suma de la masa salarial ( $W$ ) y todos los beneficios ( $\Pi$ ), es decir,  $Q \equiv W + \Pi$ . A su vez, la masa salarial se puede escribir como el producto del salario medio ( $w$ ) multiplicado por el número de trabajadores ( $L$ ),  $W \equiv wL$ , y los beneficios se pueden escribir como el producto de la tasa de beneficio media ( $r$ ) multiplicada por el *stock* de capital ( $K$ ),  $\Pi \equiv rK$ . Ello da lugar a  $Q \equiv wL + rK$ . El cambio total en el producto ( $dQ$ ) es igual a  $dQ \equiv dW + r dK + K dr$  (como no afecta al argumento, no desagregamos el cambio en la masa salarial). Ahora podemos preguntar cuánto varía el producto al variar el *stock* de capital. Esto es igual a:

$$\frac{dQ}{dK} = \frac{dW}{dK} + r + \frac{dr}{dK} K.$$

A nivel de una empresa, la economía neoclásica asume que  $dW/dK = 0$  y  $dr/dK = 0$ . Ello quiere decir que un incremento del *stock* de capital no produce impacto alguno en la masa salarial ( $(dW/dK = 0)$ ) o en la tasa de beneficio ( $(dr/dK = 0)$ ). Esto implica que  $dQ = r dK$  o  $(dQ/dK) = r$ ; es decir, un cambio en el *output* consecuencia de un cambio en el *stock* de capital ( $dQ/dK$ ) –la productividad marginal del capital– es igual a la tasa de beneficio ( $r$ ).

Sin embargo, ese argumento aunque puede ser una aproximación correcta al nivel de la empresa, no es cierto a nivel agregado. A este nivel, un cambio en el *stock* de capital tiene implicaciones para el salario y la tasa de beneficio. Por tanto, tenemos:

$$\frac{dV}{dJ} = \frac{dW}{dJ} + r + \frac{dr}{dJ} J$$

(donde ahora  $V$  representa el *output* agregado y  $J$  el *stock* de capital agregado). Ello indica que el producto marginal no es, en general, igual a la tasa

de beneficio. Esto quiere decir que, a nivel agregado, cambios en la oferta o la demanda conllevan cambios en la distribución del producto: un cambio en el *stock* de capital variará no sólo el producto, sino también el salario y la tasa de beneficio. Estos cambios alteran la distribución del producto entre trabajadores y capitalistas y, por tanto, afectarán a la demanda. Lo mismo ocurre si consideramos cambios en el producto resultado de cambios en el empleo. En general, a nivel agregado  $(dV/dL) \neq w$  (la productividad marginal del trabajo no es igual al salario medio). La conclusión es que la distribución de la renta no está determinada por el mercado en el sentido en que ésta es explicada por los economistas neoclásicos.

Como se puede apreciar, el argumento anterior utiliza la noción de “capital” como si tal factor de producción existiera a nivel agregado. A este nivel, el capital sería una hipotética suma de los camiones, barcos, aviones, refinerías, estaciones eléctricas, etcétera, de un país. A su vez, cada uno de estos bienes de capital es el resultado de sumar otros capitales. Lo único que todos estos capitales tienen en común es el *precio*, y es por medio de este que se llega a un agregado de capital. Pero el precio de un bien de capital depende de la tasa de beneficio, la cual variara con cambios de los precios. Esta es la circularidad mencionada anteriormente.

Los debates de Cambridge-Cambridge se extendieron y llegaron a tener un gran número de participantes y, además de los temas señalados en los párrafos anteriores, hubo dos temas centrales de gran importancia que fueron objeto de intercambios muy importantes. Ellos son los problemas del recambio (*reswitching*) y de la reversión del capital (*capital reversing*). El primero se refiere a la violación de la supuesta relación única entre la intensidad del capital y la tasa de beneficio que la economía neoclásica postula; mientras que el segundo ocurre cuando el valor del capital se mueve en la misma dirección que la tasa de beneficio. Ello ocurre cuando el proyecto más rentable es aquel con la técnica menos intensiva en capital.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup> Todos estos argumentos fueron expuestos claramente por Sraffa (1960) en su *Production of Commodities by Means of Commodities: Prelude to a Critique of Economic Theory*, donde los problemas de la agregación del capital y de la noción del capital como un factor de producción fueron

Después de años intercambiando artículos en las revistas más prestigiosa de la profesión, las partes concluyeron que los problemas del recambio y de la reversión del capital eran posibles teóricamente y suponían graves problemas para la justificación del uso de las funciones de producción agregadas neoclásicas (por ejemplo, a nivel de sector), ni siquiera como “parábolas”, utilizando la terminología de Samuelson (1961-1962). Estos argumentos fueron admitidos finalmente por Samuelson (1966).

Estos son unos resultados teóricos tremendamente importantes. Pero podemos preguntarnos: ¿cuál es su importancia, sobre todo desde el punto de vista empírico? Si, por una parte, los modelos neoclásicos agregados con capital como un factor de la producción quedaron completamente cuestionados y dañados por los debates de Cambridge; por otra, la teoría neoclásica no necesita la agregación, pues es posible conceptualizar la producción en términos de bienes de capital heterogéneos. Además, se puede argumentar, las conclusiones y posibles recomendaciones desde el punto de vista práctico que se podrían derivar de objetar a nivel agregado (por ejemplo, que un país en vías de desarrollo debería utilizar técnicas de producción menos intensivas en capital cuando el factor trabajo es abundante y más barato en términos relativos) no dependen de como se deter-

---

expuestos y discutidos con una lucidez magistral. La teoría neoclásica puede ser formulada a distintos niveles de agregación. Los bienes de capital tales como la maquinaria y equipo son, por supuesto, heterogéneos y cualquier intento de referencia al “capital”, a un nivel agregado como un factor de producción, debe llevar consigo un procedimiento o modelo de agregación. Al mismo tiempo, el modelo neoclásico invoca a menudo el resultado de que la productividad marginal del capital “determina” la tasa de retorno del capital (por ejemplo, tasa de interés o de beneficio). Sraffa (1960) cuestionó estas tesis y conclusiones y demostró que, en general, el capital no puede ser definido como un factor de la producción independientemente de la tasa de beneficio, y puso en duda que la productividad marginal del capital fuera la que determina la tasa de beneficio. La implicación es que las técnicas de producción no pueden ser enumeradas de mayor a menor en términos de la intensidad del capital, pues dicha intensidad puede variar en el sentido contrario al de la clasificación cuando la tasa de beneficio baja. Ello se debe a que la intensidad del capital depende de la tasa de beneficio. Con respecto al problema del recambio, se demostró que es posible que una economía se mueva de una técnica de producción a otra dependiendo de la tasa de beneficio, de forma que una misma técnica de producción puede ser utilizada con tasas altas y con tasas bajas de beneficio.

mina a nivel teórico la tasa de beneficio; sin embargo, a nivel teórico, la idea de que el tipo de interés (tasa de beneficio) es la recompensa a la productividad del capital y no el resultado de la explotación del trabajo (teoría marxista), o el residuo o diferencia entre el valor del producto y el costo de los factores de la producción (teoría ricardiana), ha jugado durante mucho tiempo un papel crucial en debates a nivel político y social en discusiones sobre la naturaleza del capitalismo. Por ello, el contexto político y social de la crítica demoledora de Sraffa (1960) sobre el capital como un factor de la producción, es más fácil de apreciar y entender una vez que la discusión se plantea en términos históricos como un debate que ha durado varios siglos. Las conclusiones de Sraffa deben ser entendidas como una respuesta a una explicación particular (con enormes implicaciones normativas) del sistema capitalista de producción, y es ahí donde reside la relevancia potencial de esos resultados de carácter técnico.<sup>6</sup>

Que los debates de Cambridge-Cambridge tuvieron una gran importancia y no fueron una mera pérdida de tiempo donde se discutieron juegos ideológicos en vez de economía seria, como algunos participantes han argumentado (Solow, 1988, p. 309), lo prueba que una de las revistas más prestigiosas de la profesión, el *Journal of Economic Perspectives* (Cohen y Harcourt, 2003) publicara recientemente un artículo sobre el tema, recordando la relevancia y actualidad de unas discusiones que tuvieron lugar

---

<sup>6</sup> Un evaluador nos ha preguntado si alguien respondió a Sraffa. La respuesta es que evidentemente sí. Cuando Joan Robinson (1953-1954) abrió los debates de Cambridge, los argumentos esenciales que ella esgrimió eran los de Sraffa, los cuales conocía muy bien. Por ello, y de alguna forma, una gran parte de los intercambios entre los dos grupos fueron, implícita o explícitamente, discusiones sobre el trabajo de Sraffa. Es imposible hacer una lista de todos los artículos y libros que tratan el trabajo de este autor. Recomendamos al lector la compilación de artículos en Kurz (2000). También Fisher (1993, Introducción) cuenta como él comenzó a trabajar en el problema de la agregación (véase sección 2.2 más adelante) a mediados de los años sesenta sin darse cuenta de que, de una forma u otra, sus argumentos estaban relacionados con los debates de Cambridge. Sin embargo, Fisher señala claramente que él siempre ha pensado que los argumentos de Cambridge, Reino Unido, eran incorrectos. Fisher argumenta que existe un problema con el concepto de función de producción agregada, pero no por los motivos señalados por Sraffa, Joan Robinson y los defensores de las posiciones de Cambridge, Reino Unido, sino debido al problema de la agregación es sus términos.

hace 40 años.<sup>7</sup> El renovado interés en la teoría del crecimiento con la llegada de los modelos de crecimiento endógeno durante la década de los ochenta no ha hecho cambiar la situación, sino quizá exacerbarla, debido a que estos modelos padecen de los mismos problemas porque siguen estando basados en el concepto de función de producción agregada (Pasinetti, 1994; Sylos Labini, 1995). A ello hay que añadir que la nueva generación de economistas no ha oído hablar de estos problemas. El resultado es que hábitos erróneos y una presunta “ciencia” basada en supuestos incorrectos, han dado lugar a una mala forma de hacer economía, y a consejos de política económica sin fundamentos. Esto se refleja claramente en un artículo reciente que evalúa los nuevos modelos de crecimiento endógeno, donde Temple (1999, p. 15) concluye que la función de producción agregada es sin lugar a dudas el aparato más dudoso de la macroeconomía actual. Sin embargo, argumenta el autor, como una gran cantidad de economistas la considera esencial a la hora de entender los niveles y tasas de crecimiento del producto, hay que seguirla utilizando. Uno debe preguntarse si éste es motivo suficiente y válido para seguir empleando un concepto tan dudoso y sin fundamento alguno.

### **El problema de la agregación**

Además de los problemas señalados anteriormente, la función de producción agregada se encuentra con otro problema a nivel teórico. Este se refiere a las condiciones bajo las cuales las funciones de producción microeconómicas se pueden agregar para dar lugar a una función de producción agregada con propiedades neoclásicas. Este fue el problema estudiado, entre otros, por Franklin Fisher (1993) y que Felipe y Fisher (2003) han tratado recientemente. Para entender lo que es una función de producción agregada se debe entender, en primer lugar, lo que conlleva el problema de la agregación. El tema clave es cómo medir *cantidades* que

---

<sup>7</sup> También véanse los comentarios que aparecieron en el *Journal of Economic Perspectives* (otoño, 2003).

representan una serie de productos heterogéneos por medio de un solo número; es decir, ¿cuál es la legitimidad de agregados tales como la inversión, el producto total, el trabajo y el capital? Analíticamente, el problema se puede representar de la forma siguiente. Suponga que la producción de las empresas A y B puede ser representada por dos funciones de producción  $Q^A = f^A(K_1^A, K_2^A, L^A)$  y  $Q^B = f^B(K_1^B, K_2^B, L^B)$ , donde  $K_1 = K_1^A, K_1^B$ ,  $K_2 = K_2^A, K_2^B$  y  $L = L^A + L^B$  (K representa dos tipos de capital y L representa el trabajo, que se supone homogéneo). El problema es determinar si y en qué circunstancias existe una función  $K = h(K_1, K_2)$  tal que la función agregadora  $h(\bullet)$  satisface la propiedad  $G(K, L) = G[h(K_1, K_2), L] = Y(Q^A, Q^B)$ , y donde la función Y representa la curva de posibilidades de producción de la economía.<sup>8</sup>

La literatura de la agregación demostró que las condiciones matemáticas para agregar funciones de producción microeconómicas con el fin de generar una función de producción agregada son tan inverosímiles (en el sentido de que las economías reales no las pueden satisfacer) que, para todo fin práctico, se puede decir con gran certeza que estas funciones no existen como entidades que describen la realidad. Fisher demostró que se puede generar un capital agregado sólo si todas las funciones de producción microeconómicas difieren únicamente en el coeficiente de la eficiencia del capital. Es decir, cada función de producción microeconómica debe ser del tipo  $F(b_v, K_v, L_v)$ , donde la función  $F(\bullet, \bullet)$  es común a todas las empresas, pero el parámetro  $b_v$  puede diferir entre ellas. Bajo estas circunstancias, una unidad de un tipo nuevo de capital es una réplica de un número fijo de unidades del capital antiguo (“mejor” equivale a “más”). El *stock* de capital agregado puede entonces construirse con capital medido en unidades de eficiencia.

Pero aún hay más, pues las condiciones de agregación, a diferencia de los debates de Cambridge, que se centraron exclusivamente en los proble-

---

<sup>8</sup> Hay que hacer una aclaración. Esta se refiere a la pregunta filosófica sobre el nivel al que hay que ascender o descender para poder empezar a hablar del problema de la agregación. Desde un punto de vista teórico y matemático uno puede desagregar infinitamente.

mas del capital, también afectan al trabajo y al producto. Un agregado de trabajo existirá siempre y cuando, dado unos salarios relativos, todas las empresas empleen diferentes tipos de trabajo en la misma proporción. Es decir, la condición de agregación del trabajo requiere la ausencia de especialización en el empleo. De forma similar, existirá un agregado de producto siempre y cuando, dado unos precios de mercado relativos, todas las empresas produzcan todos los productos en la misma proporción. Es decir, la condición de agregación del producto requiere la ausencia de especialización en la producción. Todas las empresas deben producir la misma cesta de productos y sólo pueden diferir en la escala. Ciertamente estas condiciones son extremadamente restrictivas y lo más posible es que no se cumplan en la realidad.

De forma general, las implicaciones de las condiciones de agregación de Fisher se pueden resumir de la siguiente forma (Felipe y Fisher, 2003):

- Excepto en el caso de rendimientos constantes a escala, las funciones agregadas de producción muy posiblemente no existen
- Incluso bajo el supuesto de rendimientos constantes, las condiciones de agregación son tan difíciles de satisfacer que hacen de la existencia de la función de producción en economías reales la excepción y no la regla. Esto es verdad no sólo para el caso de la existencia de un agregado del capital, sino también para la existencia de agregados del trabajo y el producto
- Uno no puede escapar de la fuerza e implicaciones de estos resultados simplemente argumentando que las funciones de producción agregadas son aproximaciones satisfactorias, en el sentido de que las condiciones de agregación sean satisfechas sólo aproximadamente. Las condiciones de agregación también indican que las funciones de producción agregadas no se pueden derivar ni siquiera como una aproximación

Las consideraciones anteriores son interesantes desde el punto de vista comparativo. Para los economistas de Cambridge, Reino Unido, el objetivo de sus ataques al concepto de función de producción agregada se centraba exclusivamente en los problemas peculiares que el factor capital presentaba, la determinación de la tasa de beneficio y la relación con el problema de la distribución. Pasinetti (2000, p. 209) indicaba recientemente que el problema central del capital no es el de su agregación, sino el de la dificultad conceptual de tratar un agregado de, teóricamente, una

cantidad, pero que está expresado en términos monetarios (no físicos) de la misma forma en que son tratados otros agregados que sí son cantidades físicas, como la tierra y el trabajo. El capital expresado en unidades monetarias y las cantidades físicas de tierra y trabajo son entidades lógicas distintas y no pueden ser tratadas de la misma forma, e incluidas de forma paralela en la misma función. Para Fisher, y en general para la literatura de la agregación, el capital no plantea problema especial alguno. Es más, el factor trabajo presenta problemas similares a los del capital.

El argumento de los economistas de Cambridge, Reino Unido, era que el factor trabajo puede ser expresado en unidades físicas, por ejemplo, horas trabajadas. A este factor le corresponde una retribución, el salario por hora. El problema del capital, sin embargo, no reside en él mismo, pues ciertamente se puede expresar en unidades físicas (por ejemplo, el número de máquinas; o un índice de cantidad física), sino en su retribución, la tasa de beneficio. El problema se deriva de que la retribución está relacionada con el valor del capital, no con la cantidad física. El valor del capital es el producto de la cantidad física multiplicada por su precio. Este último depende de la tasa de beneficio y, consecuentemente, de la distribución del producto (Pasinetti, 2000, p. 206).<sup>9</sup>

En cualquier caso, dados los resultados de los debates de Cambridge, así como del problema de la agregación, uno se pregunta por qué las funciones de producción agregadas continúan siendo utilizadas en análisis teóricos y empíricos. El motivo, en opinión de estos autores, es sencillo, aunque desafortunado. Desde que se empezaron a publicar resultados empíricos a comienzos del siglo XX (Cobb y Douglas, 1928), se ha argumentado que las funciones de producción tienden a dar “buenos resultados”. Con ello se quiere decir que (Fisher, 1971): i) los coeficientes estimados se aproximan a las proporciones de los factores en el producto, sobre todo en el caso de la función Cobb-Douglas. Esto se ha interpretado en la literatura como validación empírica de la teoría neoclásica de la

---

<sup>9</sup> La respuesta a este argumento desde el punto de vista de la agregación es que se puede argumentar igualmente que los salarios están relacionados con el valor del trabajo y no con su cantidad física.

distribución (Douglas, 1976); ii) la productividad marginal explica bien el salario; iii) el ajuste estadístico tiende a ser alto. La siguiente sección explica a que se deben los llamados buenos resultados.

### LA IDENTIDAD CONTABLE Y LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN

La defensa de estimaciones empíricas de funciones de producción agregadas fue hecha por Robert Solow, quien por otra parte conocía muy bien los problemas señalados anteriormente (los debates de Cambridge-Cambridge y el problema de la agregación). Solow (1966, pp. 1259-1260) admitió abiertamente que la función de producción agregada no es un concepto que se pueda justificar rigurosamente. Por el contrario, según él, es una parábola que ayuda a entender determinados problemas; o, simplemente, un aparato que ayuda a sintetizar y entender los datos, el cual se puede utilizar en tanto produzca buenos resultados empíricos, pero que debe ser abandonado cuando deje de producir buenos resultados, o cuando la profesión encuentre otro aparato más adecuado.

La mayor parte de los economistas actuales han sido educados creyendo, de alguna forma, que la relación funcional entre producto, capital y trabajo tiene carácter de *ley*, debido a que puede refutarse empíricamente mediante su estimación. Desde el tiempo de los estudios de Douglas y sus colaboradores en los años treinta y cuarenta, se ha encontrado con frecuencia que la función de producción agregada produce buenos ajustes estadísticos, especialmente cuando se utilizan datos de corte transversal, y que los coeficientes estimados aproximan muy bien las proporciones de los factores en el producto total.<sup>10</sup>

Sin embargo, estos estudios empíricos no podían haber encontrado otro resultado más que la proximidad de las elasticidades estimadas a las proporciones de los factores. Esto se debe al hecho de que, idealmente, la función de producción es un concepto microeconómico que especifica

---

<sup>10</sup> Estimaciones con series temporales tienden a producir resultados mucho peores. La razón por la que esto ocurre se explica más adelante.

la relación entre el producto físico (toneladas de trigo) y los insumos empleados, también medidos en términos físicos (por ejemplo, número de trabajadores, número de maquinas idénticas). A nivel agregado, por otra parte, no existen magnitudes físicas y lo que se utiliza para representar al producto y al capital total son medidas monetarias de valor expresadas en términos constantes. Este es un procedimiento cuyas implicaciones son tan profundas que impiden que la función de producción agregada pueda ser contrastada y, lo que es más importante, refutada empíricamente.

Este problema fue claramente expuesto por el premio Nóbel de economía Herbert Simon (1979a, p. 497) en su discurso de aceptación del premio cuando indicó que los buenos ajustes y la proximidad de las elasticidades estimadas a las proporciones de los factores producidos por la función Cobb-Douglas no pueden ser interpretados como evidencia empírica a favor de la teoría neoclásica. Ello se debe a que los mismos resultados se pueden obtener con datos generados, no por una función Cobb-Douglas, sino por la identidad contable que relaciona el valor agregado del producto con la suma de los salarios más los beneficios. El problema es similar al de la identificación estadística, pero con la gran diferencia de que aquí no hay solución, pues una de las “ecuaciones” es una identidad contable (y por tanto no hay problema de identificación como tal).

En esta sección se demuestra que las distintas especificaciones de la función de producción agregada no son sino aproximaciones a dicha identidad contable y, por tanto, no dan información alguna sobre la tecnología de la empresa representativa que podría estar subyacente. Ello implica que es posible obtener un ajuste estadístico teóricamente perfecto, con coeficientes que suman uno e iguales a las elasticidades de los factores, resultado que puede ser interpretado como existencia de rendimientos constantes a escala. Cuando algunos autores han encontrado rendimientos crecientes o la presencia de externalidades, por ejemplo, se ha debido a que han estimado especificaciones de la función de producción que son incorrectas (en el sentido explicado más adelante) y que dieron lugar a coeficientes sesgados (Felipe, 2001a, 2001b; Felipe y McCombie, 2003; McCombie, 2000-2001).

El problema que la identidad contable supone para la interpretación de la función de producción agregada se entiende fácilmente en el caso de la función Cobb-Douglas, aunque el mismo problema esté presente en otras especificaciones como la CES (Felipe y McCombie, 2001) o la translog (Felipe y McCombie, 2003). Phelps Brown (1957) fue el primero en exponer el problema de forma clara en su artículo clásico “The Meaning of the Fitted Cobb-Douglas Function”. Es una ironía de la historia del pensamiento económico que este artículo, que desafía abiertamente toda la justificación para estimar funciones de producción agregadas, fuera publicado el mismo año que el artículo de Solow (1957) “Technical Change and the Aggregate Production Function”. Este último artículo es, como bien se sabe, el origen del análisis neoclásico moderno del crecimiento a nivel empírico.

Un aspecto importante de la crítica de Phelps Brown es que se refería a la estimación de funciones de producción con datos de corte transversal y se dirigía específicamente a los estudios de Paul Douglas (por ejemplo, Douglas, 1948). Por simplicidad exponemos este caso en primer lugar y a continuación extendemos el argumento al caso de series temporales.<sup>11</sup>

### Datos de corte transversal

El hecho de que posiblemente el argumento central en el trabajo de Phelps Brown (1957) fuera discutido de forma no suficientemente clara y que este de alguna forma escondido, no ayudo a su recepción, a pesar de ser publicado en una de las revistas más prestigiosas de Estados Unidos. Phelps Brown argumentó que hay una identidad contable subyacente para la empresa iésima dada por:

$$V_i \equiv W_i + \Pi_i \equiv w_i L_i + r_i J_i \quad [1]$$

---

<sup>11</sup> Dada la discusión de la sección anterior, se debe hacer hincapié en que nos referimos a una función de producción agregada como aquella que utiliza datos expresados en términos de valor, aunque sea a un nivel muy desagregado.

donde  $V$ ,  $W$ ,  $\Pi$ ,  $J$  representan el valor del producto agregado, la masa total de salarios, los beneficios totales y el stock de capitla expresado en unidades monetarias (a precios constantes), respectivamente. Sin pérdida de generalidad, los dos componentes de la identidad se pueden descomponer a su vez en los productos a la derecha de la identidad, donde  $L$ ,  $J$ ,  $w$  y  $r$  representan el número de trabajadores, el valor del *stock* de capital expresado en términos constantes, el salario real por trabajador y la tasa de beneficio, respectivamente (estas dos últimas variables son los valores medios de la industria); y se puede asumir que varían poco y por tanto son uniformes. Debido a la existencia de esta identidad contable, Phelps Brown (1957, p. 557) concluyó que el parámetro  $\alpha$  de la función Cobb-Douglas (la elasticidad del factor trabajo) y la proporción de los salarios en el producto total no son más que las dos caras de la misma moneda.

El argumento es el siguiente. La elasticidad del producto ( $\alpha$ ) con respecto al factor trabajo se define como  $\alpha = (\partial V_i / \partial L_i) (L_i / V_i)$ . Dadas las hipótesis de la teoría neoclásica sobre el precio de los factores (condiciones de primer orden), el producto marginal del factor trabajo es igual al salario, es decir,  $\partial V_i / \partial L_i = w$ . Consecuentemente,  $\alpha = wL_i / V_i = a$ , que es la proporción de los salarios en el valor agregado ( $a$ ). La economía neoclásica presenta este argumento como una predicción contrastable asumiendo una determinada función de producción, por ejemplo la Cobb-Douglas.

Sin embargo, la identidad contable [1] define el valor agregado para cualquier unidad de observación (empresa, sector, economía). Debe hacerse hincapié en que la identidad [1] no depende de teoría o hipótesis alguna y es compatible con cualquier estado de la competencia y con la existencia de rendimientos constantes, crecientes o decrecientes a escala, y con la existencia o no de una función de producción con propiedades neoclásicas. Dado que la mayor parte de las bases estadísticas contienen datos del producto, trabajo, salarios por trabajador y *stocks* de capital en valores monetarios, la tasa de beneficio puede obtenerse de forma residual como el producto de la proporción de los beneficios en el valor agregado,  $(1-a)$ , y el coeficiente producto-capital, es decir,  $r = (1-a)V_i/J_i = \Pi_i/J_i$ .

Ello implica que, al diferenciar parcialmente la identidad contable [1] respecto a  $L_i$ , resulta  $(\partial V_i / \partial L_i) \equiv w$ , con lo que  $(\partial V_i / \partial L_i) (L_i / V_i) \equiv a \equiv wL_i / V_i$ . Se verá que este resultado es idéntico al obtenido anteriormente a través de la función de producción y las condiciones de primer orden. El problema es que como en este caso el resultado ha sido derivado de una identidad contable, siempre será verdad y, lo que es más importante, será imposible refutarlo mediante contraste estadístico alguno. Como el argumento de la identidad contable no conlleva hipótesis de comportamiento alguna, el hallazgo de que las supuestas elasticidades de los factores sean equivalentes a las proporciones observadas de los salarios y beneficios en el valor agregado no puede ser contemplado como verificación de que los factores de producción son remunerados de acuerdo a sus productividades marginales. Desafortunadamente, Douglas (1976) creía que una gran cantidad de estudios corroboraban la función Cobb-Douglas y que la aproximación de las elasticidades estimadas a las proporciones de los salarios y los beneficios en el producto daba credibilidad a la teoría competitiva de la distribución y refutaba la teoría marxista (Douglas 1976, p. 914). Parece ser que Douglas no había leído el artículo de Phelps Brown.

Si la elasticidad agregada del producto con respecto al factor trabajo y la proporción de la masa salarial en el producto no son más que las dos caras de la misma moneda, ¿podría ser que la función Cobb-Douglas fuera simplemente una forma algebraica alternativa de expresar la identidad contable y que, por tanto, no se puede derivar de ella implicación alguna sobre la tecnología subyacente de la economía? Esta fue, de hecho, la proposición que Simon y Levy (1963) demostraron ocho años después. En efecto, siguiendo a estos autores y a otros como Intriligator (1978), se puede probar el isomorfismo entre la función de producción Cobb-Douglas y la identidad contable.

La función Cobb-Douglas estimada con datos de corte transversal para empresas, industrias o regiones se especifica como:

$$V_i = AL_i^\alpha J_i^\beta \quad [2]$$

donde  $A$  es una constante y  $\alpha$  y  $\beta$  son las elasticidades respectivas; dividiendo por  $\bar{V} = \bar{A}\bar{L}^\alpha \bar{J}^{1-\alpha}$ , donde la barra sobre la variable se refiere a que se trata de la observación de referencia, por ejemplo, el valor de la empresa representativa, al tomar logaritmos:

$$\ln \frac{V_i}{\bar{V}} = \alpha \ln \frac{L_i}{\bar{L}} + \beta \ln \frac{J_i}{\bar{J}} \quad [3]$$

Utilizando la aproximación

$$\ln \frac{X}{\bar{X}} \cong \frac{X}{\bar{X}} - 1,$$

la ecuación [3] puede ser reescrita de la forma siguiente:

$$V_i = \left( \alpha \frac{\bar{V}}{\bar{L}} \right) L_i + \left( \beta \frac{\bar{V}}{\bar{J}} \right) J_i + (1 - \alpha - \beta) \bar{V} \quad [4]$$

Si comparamos la ecuación [4], que no es más que una linearización de la función Cobb-Douglas [2], con la identidad contable [1] implica que:

$$w = \alpha \frac{\bar{V}}{\bar{L}} \quad \text{y} \quad r = \beta \frac{\bar{V}}{\bar{L}}.$$

Más aún, la comparación de estas dos expresiones indica que  $(1 - \alpha - \beta) \bar{V}$  debe ser igual a cero, es decir,  $\alpha + \beta = 1$ . A consecuencia de ello, los datos siempre deben indicar la existencia de *rendimientos constantes a escala*, cualquiera que sea la verdadera relación tecnológica.

Ahora podemos mostrar como la identidad contable puede ser transformada en una expresión idéntica a la función Cobb-Douglas. Considere de nuevo la identidad contable [1]. A continuación se sustituye  $w$  de la definición  $w = a\bar{V}/\bar{L}$ , donde se recordará que  $a$  es la proporción de los salarios en el producto. Asimismo, se sustituye  $r$  usando  $r = (1 - a)\bar{V}/\bar{J}$ , donde  $(1 - a)$  es la proporción del capital. Ello da:

$$\frac{V_i}{\bar{V}} = a \frac{L_i}{\bar{L}} + (1-a) \frac{J_i}{\bar{J}}.$$

Ahora se utiliza la aproximación

$$\frac{X}{\bar{X}} \cong \ln \frac{X}{\bar{X}} + 1$$

que da lugar a

$$\ln \frac{V_i}{\bar{V}} = a \ln \frac{L_i}{\bar{L}} + (1-a) \ln \frac{J_i}{\bar{J}}.$$

Finalmente se obtiene

$$\ln V_i = \ln A + a \ln L_i + (1-a) \ln J_i - [\ln \bar{V} - \ln A - a \ln \bar{L} - (1-a) \ln \bar{J}].$$

De las ecuaciones [2] y [3] se deduce que el último término (el que va dentro del paréntesis) debe ser cero. Esto da  $V_i = AL_i^\alpha J_i^{1-\alpha}$ . El argumento es que para variaciones pequeñas de L y J y con w y r constantes (el argumento central, como veremos a continuación, no depende de esto) una función Cobb-Douglas producirá una muy buena aproximación a una función lineal de L y K. El corolario es que la identidad contable producirá asimismo una buena aproximación a la función Cobb-Douglas. En tanto la identidad contable exista y sea compatible con cualquier tecnología subyacente, uno nunca podrá estar seguro de si los coeficientes estimados son los parámetros de la supuesta tecnología o simplemente los que indica la identidad. El hecho de que la estimación estadística de lugar a un buen ajuste no implica nada.

La buena aproximación de la función Cobb-Douglas a la identidad contable también ocurre cuando w y r varían, siempre y cuando las proporciones de los salarios y los beneficios no varíen mucho. Para demostrarlo se asume la existencia de un continuo de empresas y se diferencia la identidad contable:

$$dV_i = (dw_i)L_i + w_i dL_i + (dr_i)J_i + r_i dJ_i \quad [5]$$

o,

$$\frac{dV_i}{V_i} = a_i \frac{dw_i}{w_i} + a_i \frac{dL_i}{L_i} + (1-a_i) \frac{dr_i}{r_i} + (1-a_i) \frac{dJ_i}{J_i} \quad [6]$$

A continuación se asume que las proporciones de los factores son constantes.<sup>12</sup> Integrando la ecuación [6] da:

$$V_i = B w_i^a r_i^{1-a} L_i^a J_i^{1-a} \quad [7]$$

donde B es el antilogaritmo de la constante de integración. Si  $w_i^a r_i^{1-a}$  tiene poca variación o es ortogonal a  $L_i^a J_i^{1-a}$ , o ambos, la función (putativa) Cobb-Douglas producirá un muy buen ajuste estadístico. En regiones o industrias dentro de un país,  $w_i$  y  $r_i$  probablemente varían poco respecto a las variaciones que pueden tener  $V_i$ ,  $L_i$  y  $J_i$ . Por ello, no debiera ser sorprendente que las numerosas regresiones estimadas por Paul Douglas y sus colaboradores, al utilizar estos datos, resultarán en ajustes estadísticos excepcionales y con elasticidades casi idénticas a las proporciones de los salarios y los beneficios en el producto total (véanse, por ejemplo, las tablas resumen en Douglas, 1948). Sin embargo, al utilizar datos de corte transversal de las conocidas Penn World Tables que incluyen a países desarrollados y en vías de desarrollo, se alcanzan resultados mucho peores, debido a la variabilidad de los datos, especialmente  $w$ . En este caso, la función Cobb-Douglas es una mala aproximación a la identidad.

Debe hacerse hincapié en que esta crítica de la función de producción no se confina a la función Cobb-Douglas. Simon (1979b) consideró explícitamente el caso de la función CES,  $V_i = \psi[\theta L_i^{-\eta} + (1-\theta)J_i^{-\eta}]^{-1/\eta}$ , donde  $\psi$ ,  $\eta$  y  $\theta$  son parámetros. Simon argumentó que si la verdadera relación entre

---

<sup>12</sup> Ello puede ser debido, por ejemplo, a que las empresas fijan precios de acuerdo a una política de *mark-up*.

las variables estuviera dada por la identidad, pero erróneamente se estimara una función CES, y si el parámetro  $\eta$  tendiera a cero, entonces esta función se convierte en la Cobb-Douglas. Simon cita a Jorgenson (1974) quien sugiere que estimaciones estadísticas del parámetro  $\eta$  indican que en efecto es cero, y por tanto el argumento general tiene validez. Sin embargo, estudios más recientes indican que la elasticidad de sustitución es menor que uno. De todas formas, el argumento es mucho más general de lo que sugiere Simon y ha sido desarrollado en detalle para el caso de la CES por Felipe y McCombie (2001). El argumento se explica en la siguiente sección.

Si expresamos cualquier función de producción de la forma  $V_i = f(L_i, J_i)$  (por ejemplo, la función translog) en tasas de crecimiento y utilizáramos las condiciones de primer orden, encontraríamos que  $dV_i/V_i = c + a_i dL_i/L_i + (1-a_i) dJ_i/J_i$ . Esta expresión es formalmente equivalente a la identidad contable expresada en tasas de crecimiento, siempre que  $a_i(dw_i/w_i) + (1-a_i)(dr_i/r_i)$  sea constante, y producirá una buena aproximación a la identidad si  $a_i(dw_i/w_i) + (1-a_i)(dr_i/r_i)$  es ortogonal a  $a_i(dL_i/L_i) + (1-a_i)(dJ_i/J_i)$ . Este resultado se deriva de la ecuación [6], de la que también se deduce que  $\alpha_i = a_i$  y  $(1-\alpha_i) = (1-a_i)$ . Si las proporciones de salarios y beneficios no son constantes, entonces tendríamos que encontrar una forma funcional explícita más flexible que la Cobb-Douglas que produzca un buen ajuste estadístico a datos compatibles con la identidad. Pero ello no quiere decir que ahora los coeficientes estimados pueden ser interpretados como parámetros tecnológicos. Si  $a_i(dw_i/w_i) + (1-a_i)(dr_i/r_i)$  no satisface las hipótesis asumidas más arriba, simplemente querrá decir que la forma funcional estimada será incorrecta y el ajuste será inferior (McCombie, 2000).

### Series temporales

El hecho de que la identidad contable no autorice el interpretar estimaciones de la función Cobb-Douglas (o de otras formas funcionales) con datos de corte transversal como reflejo de los verdaderos parámetros tecnológicos de la economía, sugiere, implícitamente, que el mismo argu-

mento debería ser cierto para estimaciones con series temporales.<sup>13</sup> Como claramente demostró Shaikh (1974, 1980), el argumento es paralelo, y se obtiene al diferenciar la identidad contable  $V_t \equiv w_t L_t + r_t J_t$  con respecto al tiempo. En este caso se obtiene:

$$\hat{V}_t \equiv a_t \hat{w}_t + (1 - a_t) \hat{r}_t + a_t \hat{L}_t + (1 - a_t) \hat{J}_t \quad [8]$$

donde  $\hat{V}$ ,  $\hat{L}$ ,  $\hat{J}$ ,  $\hat{w}$  y  $\hat{r}$  denotan las tasas de crecimiento exponenciales,  $a_t \equiv (w_t L_t)/V_t$  es la proporción de los salarios en el producto y  $(1 - a_t) \equiv (r_t J_t)/V_t$  es la proporción del capital en el producto. Asumiendo que estas proporciones son constantes; *i.e.*,  $a_t \equiv a$  y  $(1 - a_t) \equiv (1 - a)$ , e integrando se obtiene:

$$V_t \equiv B w_t^a r_t^{1-a} L_t^a J_t^{1-a} \quad [9]$$

Asumamos ahora que la tasa de crecimiento del salario por trabajador es aproximadamente constante ( $\hat{w}_t = \hat{w}$ ) y que la tasa de beneficio es constante ( $\hat{r} = 0$ ). Las hipótesis sobre las proporciones de los factores y las tasas de crecimiento de los precios de los factores se pueden considerar como hechos estilizados.<sup>14</sup> Consecuentemente,  $B$ , una constante, de forma que la ecuación [9] se convierte en una expresión que se “asemeja” a la función de producción Cobb-Douglas con progreso técnico exógeno; es decir:

$$V_t \equiv A_0 e^{\lambda t} L_t^a J_t^{1-a} \quad [10]$$

<sup>13</sup> Phelps Brown (1957) consideró este caso, pero sin incluir una tendencia en la regresión. En estos casos, los coeficientes estimados simplemente reflejarán las tasas de crecimiento históricas de las variables.

<sup>14</sup> Algún lector podría argumentar que el hecho de que se asuma que las proporciones de los factores son constantes, implica, implícitamente, una función de producción Cobb-Douglas. Este argumento es incorrecto, como indico Fisher (1971) en sus simulaciones. Fisher demostró que el hecho de que la función Cobb-Douglas de buenos resultados se debe a que las proporciones de los factores son constantes y no al revés (que las proporciones de los factores son constantes porque la tecnología de la economía es Cobb-Douglas), como algunos economistas neoclásicos argumentan.

De hecho, mientras que los estudios con datos de corte transversal para regiones o industrias normalmente dan muy buenos resultados, las estimaciones de la función Cobb-Douglas con una tendencia exponencial (que se interpreta como el crecimiento del progreso técnico) con series temporales a menudo resultan en coeficientes sin sentido económico, como por ejemplo, un coeficiente del capital negativo. La tabla 1 de Sylos Labini (1995, p. 490) ofrece un muy útil resumen de estudios de funciones de producción con series temporales que resultaron en ajustes estadísticos muy bajos. El hecho de que los resultados sean malos a menudo podría, irónicamente, interpretarse como que la ecuación estimada es, de hecho, una relación de comportamiento. Sin embargo, de los argumentos anteriores se deriva que los malos resultados obtenidos al estimar una Cobb-Douglas se deben a uno (o ambos) de dos motivos; bien porque las proporciones de los factores no son constantes (primera hipótesis), o bien porque la aproximación  $a_t \hat{w}_t + (1 - a_t) \hat{r}_t \cong a w = \lambda$ , la constante (segunda hipótesis), no es lo suficientemente precisa. En la práctica, es esta segunda hipótesis la que suele ser incorrecta y la que induce los malos resultados. De hecho, la estimación de la ecuación [9] con una gran variedad de bases de datos produce muy buenas y precisas estimaciones de los coeficientes, iguales a las proporciones de los factores. Es bien conocido el hecho de que la tasa de beneficio se mueve con el ciclo, de forma que aproximando la suma ponderada de los logaritmos de  $w$  y  $r$  por medio de una tendencia lineal (o las tasas de crecimiento mediante una constante) induce un sesgo en los coeficientes estimados de  $\ln L$  y  $\ln J$  (McCombie, 2000-2001; Felipe y Holz, 2001).

En la teoría y econometría tradicionales, el tratamiento del problema de los malos resultados consiste en atribuir la culpa a la falta de ajuste de los insumos por cambios en la utilización de la capacidad (Lucas, 1970). Como  $a_t \hat{w}_t + (1 - a_t) \hat{r}_t$  tiende a variar procíclicamente, la inclusión de una variable de utilización de la capacidad inducirá una mejora en el ajuste estadístico y acercará los coeficientes estimados a las correspondientes proporciones de los factores. Mientras que  $\hat{r}$  fluctúa procíclicamente, el crecimiento del *stock* de capital suele variar poco. Por ello, al ajustar  $\hat{J}$  por

cambios en la utilización de la capacidad se eleva su fluctuación cíclica y al mismo tiempo se reduce la de  $\hat{r}$ .<sup>15</sup> La suma ponderada de los logaritmos del salario por trabajador y de la tasa de beneficio se aproximará mejor con la tendencia lineal y la regresión aproximará mejor la identidad.

Un procedimiento alternativo al descrito anteriormente consiste en introducir una función trigonométrica del tiempo que capture adecuadamente la variación en  $\lambda_t$  (Shaikh, 1980; Felipe y McCombie, 2003). Así, de nuevo, el ajuste aumentaría (tendiendo a uno en el límite), las variables serían altamente significativas desde un punto de vista estadístico y se aproximaría a la identidad contable.

En resumen, esta sección ha respondido a la pregunta de como es posible que a pesar de los problemas teóricos detrás del concepto de función de producción agregada discutidos en la sección anterior, las estimaciones econométricas hayan dado lugar a resultados que parecen ser posibles (sobre todo con datos de corte transversal), en particular que los coeficientes estimados a menudo se aproximan a las proporciones de los factores en el producto. El motivo por el que esto ocurre es que la identidad contable que define el producto como la suma de los salarios más los beneficios se puede describir como una forma funcional que *se parece* a una función de producción. Sin embargo, no se está estimando nada más que una aproximación a dicha identidad contable. El problema no tiene solución alguna desde el punto de vista empírico. Desde el punto de vista teórico, la solución pasa por abandonar el modelo neoclásico, al menos en todas las facetas en las que depende de la función de producción agregada, por ejemplo, la teoría del crecimiento.

## EJEMPLOS DE USOS DE FUNCIONES DE PRODUCCIÓN AGREGADAS

En esta sección resumimos algunas de las aplicaciones empíricas más importantes de las funciones de producción agregadas y brevemente expo-

---

<sup>15</sup> Ello se debe a que las dos variables están ligadas por medio de la definición de la proporción de los beneficios en el producto  $(1-a) = r/V$ .

nemos la crítica de Felipe y McCombie a cada una de estas aplicaciones. En esencia, la crítica es que las formas funcionales estimadas se pueden derivar, según lo visto más arriba, como transformaciones de la identidad contable. Si se considera que las funciones de producción agregadas no existen, estos ejercicios empíricos no tienen validez alguna (en el sentido de interpretación teórica alguna).

### **La función Cobb-Douglas**

Desde el punto de vista histórico, se considera que las estimaciones de Cobb-Douglas (1928) fueron las primeras de una función de producción agregada. Como bien se sabe, Cobb y Douglas utilizaron datos del sector manufacturas (índices del producto, empleo y capital) de Estados Unidos del periodo 1899-1922 y estimaron la famosa función de producción  $V_t = B(L_t)^\alpha (J_t)^\beta$ . El resultado que obtuvieron fue de  $\alpha = 0.75$  y  $\beta = 0.25$ , iguales a las proporciones de los factores en el producto. Cobb y Douglas interpretaron estos resultados como evidencia empírica de la teoría neoclásica de la distribución, aunque estos resultados fueron severamente criticados durante algunos años. Por ejemplo, pronto se argumentó que, curiosamente, la función de producción no tenía el progreso tecnológico (un hecho muy patente en la economía americana de principios de siglo) como uno de los regresores. Así, se sugirió estimar la ecuación, donde la tendencia (T) se interpreta como una proxy del progreso técnico. Sin embargo, al estimar esta regresión con los datos originales de Cobb y Douglas, Felipe y Adams (2005) observan que los resultados cambian radicalmente:  $\lambda = 0.0468$ ,  $\alpha = 0.906$  y  $\beta = -0.526$  (estadísticamente no significativo). Es más, si la regresión original de Cobb y Douglas se estima sin los dos últimos años, es decir, para el periodo 1899-1920, se obtienen los siguientes resultados (Felipe y Adams, 2005):  $\alpha = 1.09$  y  $\beta = 0.08$  (estadísticamente no significativo). A pesar de esto y con el paso del tiempo, esta forma funcional se ha convertido en pieza fundamental de la economía neoclásica.

Felipe y Adams (2005) reanalizan con los datos originales la famosa regresión de Cobb y Douglas y demuestran como estimación de la regre-

sión  $\ln Q_t = \lambda[\sin(T^5) + \cos(T^4) - \cos(T^2) - \sin(T^2)] + \alpha \ln L_t + \beta \ln$ , resuelve el problema:  $\lambda=0.033$ ,  $\alpha=0.72$ ,  $\beta=0.28$ . Como se indico en la sección anterior, la tendencia lineal trata de aproximar la expresión  $w_t^a r_t^{1-a}$  en la identidad contable [9] (o la constante trata de aproximar la expresión  $a_t \hat{w}_t + (1-a_t) \hat{r}_t$  en la identidad contable en tasas de crecimiento, ecuación [8]). El problema es que la tendencia produce una aproximación muy pobre de  $w_t^a r_t^{1-a}$  (o la constante de  $a_t \hat{w}_t + (1-a_t) \hat{r}_t$ ). ¿A qué se debe esto? La expresión  $a_t \hat{w}_t + (1-a_t) \hat{r}_t$  varía procíclicamente. Es virtualmente imposible que una constante produzca una buena aproximación. Sin embargo, la aproximación dada por la función trigonométrica (es decir, una expresión que fluctúa)  $[\sin(T^5) + \cos(T^4) - \cos(T^2) - \sin(T^2)]$  da mejores resultados. Fisher (1971, p. 305) cuenta con humor como una vez Robert Solow le comentó que si Cobb y Douglas hubieran encontrado en sus estimaciones  $\alpha=0.25$  y  $\beta=0.75$  (justo lo opuesto), las funciones de producción agregadas no existirían hoy. Una ironía de la historia.

### La función CES

Arrow, Chenery, Minhas y Solow (1961) (en adelante ACMS), propusieron la función de producción con elasticidad de sustitución constante, o CES. El punto de partida de ACMS fue la observación empírica que el valor añadido por trabajador en una industria varía entre países con el salario. Consecuentemente, ACMS estimaron la regresión de la productividad del trabajo sobre el salario, con ambas variables en logaritmos, es decir,  $\ln(V_i/L_i) = c + b \ln w_i + \varepsilon_i$ , donde  $\varepsilon$  es el término de error. La estimación de esta regresión con datos para 19 países y para 24 sectores manufactureros para inicios de la década de los cincuenta, lleva a ACMS a concluir que en la mayor parte de los casos más de 85% de la variación en la productividad del trabajo se podía explicar por medio de la variación en los salarios. Además, en la mayor parte de los casos, el coeficiente  $b$  de la regresión anterior (interpretado como la elasticidad del producto por trabajador con respecto al salario) era menor que uno. Con estos resultados, los autores concluyeron que la elasticidad de sustitución era inferior a la unidad,

poniendo en entredicho así la validez empírica de la función Cobb-Douglas, la cual implica una elasticidad de sustitución unitaria. ACMS demostraron que la función de producción subyacente a la relación que estimaron empíricamente es la bien conocida función de producción CES, es decir,  $V_i = \psi[\theta L_i^{-\eta} + (1-\theta)J_i^{-\eta}]^{-(1/\eta)}$ .

Felipe y McCombie (2001), sin embargo, cuestionaron el ejercicio de ACMS (1961). Felipe y McCombie argumentaron que la definición de la proporción de los salarios en el *output*, una identidad contable, es idéntica a la expresión estimada por ACMS (1961). La definición de la proporción de los salarios es  $a_i \equiv (w_i L_i)/V_i$ , que se puede reescribir (tomando logaritmos) como  $\ln(V_i/L_i) = c + b \ln w_i$ , donde  $c \equiv \ln(1/a_i)$  y  $b \equiv 1$ . Si, casualmente, en la muestra utilizada la proporción de los salarios en el *output* no varía, es obvio que esta regresión debe dar lugar a un ajuste estadístico perfecto y a  $b \equiv 1$ . Si, por el contrario, esta proporción varía entre los países de la muestra (como ocurre en la realidad), el ajuste será inferior a la unidad y el coeficiente estimado de  $b$  diferirá de uno. Esta explicación no requiere apelar a teoría alguna y es perfectamente compatible con la identidad de la proporción de los salarios en el producto.

## Estimación de los rendimientos a escala

Felipe (2001a) discute la reciente literatura (Basu y Fernald, 1995, 1997) que, en el contexto de los modelos de crecimiento endógeno, trata de estimar el nivel de rendimientos a escala, pues estos modelos postulan bien rendimientos crecientes o condiciones de mercado no competitivas, o ambos. Sin embargo, una de las implicaciones del álgebra de la sección anterior es que, si la función de producción agregada está “correctamente” especificada y estimada, el único posible resultado son los rendimientos constantes a escala, es decir, los coeficientes del capital y el trabajo deben sumar uno, como la expresión [10] indica. Ello no se debe a la existencia de rendimientos constantes propiamente dichos (que, como consecuencia de los problemas de agregación, es una noción sin sentido a nivel agre-

gado), sino que es un resultado que se deriva directamente de la identidad contable. Ciertamente la cuestión importante es especificar correctamente la función de producción. Si la forma funcional utilizada no provee una buena aproximación a la identidad contable, entonces es posible obtener cualquier otro resultado, por ejemplo, rendimientos crecientes. En muchos casos, las proporciones de los factores son suficientemente estables en el tiempo, de forma que una función Cobb-Douglas debería funcionar. Si a esta función se le añade una tendencia lineal para aproximar la evolución del progreso técnico, muy probablemente la regresión dará malos resultados (típicamente el coeficiente del capital es negativo, como se vio más arriba), y el problema tiene poco que ver con una cuestión técnica de la existencia de raíces unitarias o cointegración (Felipe y Holz, 2001). El problema es que, desde el punto de vista de la identidad contable, la tendencia aproxima a la media ponderada de las tasas de variación de los salarios y de la tasa de beneficio, es decir,  $a, \hat{w}_t + (1-a), \hat{r}_t$ . Es fácil ver mediante una gráfica que esta aproximación es incorrecta. Felipe (2001a) propone utilizar una función trigonométrica dada las fluctuaciones de la media ponderada. Una vez hecho esto, la identidad se recupera y los coeficientes estimados suman la unidad.

Frecuentemente se ven funciones Cobb-Douglas estimadas en primeras diferencias, es decir,  $\hat{V}_t = b_1 + b_2 \hat{L}_t + b_3 \hat{J}_t + \epsilon_t$ , donde  $\epsilon_t$  es el término de error. Si se compara esta expresión con la expresión [8], se puede ver con facilidad por que la forma Cobb-Douglas en tasas de crecimiento no puede dar buenos resultados. El motivo básico es similar al problema del sesgo inducido por omitir una variable relevante en la regresión. Al comparar la expresión [8] con la Cobb-Douglas se puede ver en las tasas de crecimiento que el término constante de esta última,  $b_1$ , esta tratando de aproximar la media ponderada de las tasas de variación de los salarios y de la tasa de beneficio,  $a, \hat{w}_t + (1-a), \hat{r}_t$ , de la identidad contable. En la mayoría de los casos, el término constante no da una buena aproximación a la variabilidad de  $a, \hat{w}_t + (1-a), \hat{r}_t$ , y, por ello, este tipo de regresiones no suele funcionar. A efectos prácticos, el problema es, como señalamos antes, el mismo de la omisión de una variable relevante en la regresión.

## Contraste de la hipótesis de competencia perfecta

Felipe y McCombie (2002) tratan el método propuesto por Hall (1988) para contrastar la hipótesis de competencia perfecta. Hall (1988) derivó de una función de producción la regresión  $(\hat{V}_t - \hat{J}_t) = c + \mu(a, n_t)$ , donde  $\mu$  es el *mark-up*,  $a$ , es la proporción de los salarios en el producto total, y  $n_t$  es el crecimiento del empleo menos el crecimiento del *stock* de capital. Este modelo le permite contrastar la existencia de competencia perfecta estimando  $\mu$  y contrastando la hipótesis nula  $H_0: \mu=1$ . Al ser estimada la ecuación con datos del sector manufacturero de Estados Unidos, Hall encontró *mark-ups* muy altos, significativamente mayores que uno, lo que se interpretó como una estructura de mercado no competitiva.

Sin embargo, Felipe y McCombie (2002) demuestran que el modelo de Hall padece de los mismos problemas discutidos anteriormente y que su ecuación se puede derivar como una transformación de la identidad contable. En efecto, esta última se puede escribir en tasas de crecimiento como  $\hat{V}_t \equiv a_t \hat{w}_t + (1 - a_t) \hat{x}_t + -a_t \hat{L}_t + (1 - a_t) \hat{J}_t$ , o  $\hat{V}_t \equiv \lambda_t + a_t \hat{L}_t + (1 - a_t) \hat{J}_t$ , donde  $\lambda_t \equiv a_t \hat{w}_t + (1 - a_t) \hat{x}_t$ . Esta ecuación puede a su vez reescribirse como  $(\hat{V}_t - \hat{J}_t) \equiv \tau \lambda_t + \mu(a, n_t)$ , que por ser una identidad contable implica que  $\tau = \mu = 1$ ; evidentemente, no tiene contenido económico alguno.

Lo importante es darse cuenta de que, como en el caso de los rendimientos a escala, la ecuación de Hall aproxima mediante la constante  $c$  el término  $\lambda_t \equiv a_t \hat{w}_t + (1 - a_t) \hat{x}_t$ , lo que induce sesgo en el coeficiente  $\mu$ , que Hall interpreta como el *mark-up*. Si ese término estuviera aproximado correctamente en la regresión, Felipe y McCombie (2002) demuestran que  $\mu$  debe tomar el valor uno, de nuevo debido a la identidad contable y no se puede interpretar como evidencia de que los mercados son competitivos.

## Función de producción agregada con gastos de infraestructura

Desde la publicación del artículo de Aschauer (1989), la cuestión de la cuantificación de los efectos de los gastos en infraestructura sobre el pro-

ducto del sector privado y sobre la productividad ha sido objeto de intenso debate. La mayor parte de los autores han estimado una ecuación del tipo  $V_t = A_0 G_t^\delta L_t^\alpha J_t^\beta$ , donde  $G$  representan los gastos en infraestructura. Los resultados empíricos, no dan lugar a consenso y en una gran cantidad de casos el coeficiente estimado de  $G$  ha sido puesto en duda.

Felipe (2001b) ha argumentado que las estimaciones de esta formal funcional también se pueden explicar desde el punto de vista de la no existencia de la función de producción agregada y de la identidad contable. El argumento es el siguiente: suponga que en la economía en cuestión las tasas de crecimiento de los salarios y de la tasa de beneficio se aproximan empíricamente mediante las funciones  $\hat{w}_t = \delta_1 g_t$  ( $w_t = G_t^{\delta_1}$  en niveles) y  $\hat{r}_t = \delta_2 g_t$  ( $r_t = G_t^{\delta_2}$  en niveles), donde  $g$  es la tasa de crecimiento de los gastos en infraestructura. Estas hipótesis no tienen contenido teórico alguno. El único argumento hecho es que, empíricamente, la aproximación es buena desde el punto de vista estadístico. Bajo estas circunstancias, y asumiendo que las proporciones de los factores en el producto son constantes,  $\varphi_t = a\hat{w}_t + (1-a)\hat{r}_t = a\delta_1 g_t + (1-a)\delta_2 g_t = \delta g_t$ , donde  $\delta \equiv a\delta_1 + (1-a)\delta_2$ . Y sustituyendo en la identidad contable:

$$\hat{V}_t = a\hat{w}_t + (1-a)\hat{r}_t + a\hat{L}_t + (1-a)\hat{J}_t = \delta g_t + a\hat{L}_t + (1-a)\hat{J}_t .$$

Finalmente, al integrar (y tomar anti-logaritmos) se obtiene  $Q_t = A_0 G_t^\delta L_t^\alpha J_t^{1-\alpha}$ . Esta última ecuación, como se ha derivado, no es más que la identidad contable bajo el supuesto de la constancia de los factores y que los salarios y la tasa de beneficio siguen la pauta descrita anteriormente. En este caso, la regresión  $V_t = A_0 G_t^\delta L_t^\alpha J_t^\beta$  dará como resultado  $\alpha = a$ ,  $\beta = 1 - a$  y  $\delta = a\delta_1 + (1-a)\delta_2$ .

¿Qué quiere decir lo anterior? Pues que la regresión estimada en la literatura  $V_t = A_0 G_t^\delta L_t^\alpha J_t^\beta$  dará lugar a coeficientes creíbles cuando empíricamente  $w_t = G_t^{\delta_1}$  y  $r_t = G_t^{\delta_2}$  sean aproximaciones correctas. Como por lo general esto no es así, de ahí los malos o extraños resultados obtenidos.

## El debate sobre el milagro asiático y las fuentes del crecimiento

En una serie de artículos que han creado uno de los debates más importantes en las áreas de crecimiento y desarrollo durante la última década (Kim y Lau, 1994; Young, 1992, 1994, 1995) aplicaron la técnica de la contabilidad del crecimiento, así como la estimación de la función de producción agregada, con el fin de estudiar las fuentes del crecimiento en los países del llamado “milagro asiático” (Hong Kong, Singapur, Taiwan y Corea del Sur). El debate es muy importante por las implicaciones que tiene, dado que la profesión tiene un gran interés en descifrar qué hizo a los países del sudeste asiático crecer de la forma que lo hicieron durante tres décadas.

Utilizando caminos y técnicas distintas, estos autores llegaron a la conclusión de que el progreso técnico, medido en términos de la tasa de productividad total, fue un contribuyente menor al crecimiento total, incluso cero en el caso de Singapur, durante el período de alto crecimiento de los países de esa región, 1960-1990. La mayor parte del crecimiento, concluyeron, fue debido simplemente a la acumulación de capital. La productividad (progreso técnico) no fue un ingrediente importante de la receta. Esta literatura creó un gran debate durante los años noventa que ha sido resumido por Felipe (1999).

Felipe y McCombie (2003) argumentan que este debate tiene poca sustancia. Ello se debe a que, empíricamente, todos los cálculos y estimaciones llevadas a cabo por estos autores, se pueden reproducir y reinterpretar desde el punto de vista de la identidad contable. Por ejemplo, Young (1994) estimó, con datos para un gran número de países, la regresión (derivada de una función de producción agregada)  $(V_i - \bar{L}_i) = a + b(\hat{L}_i - \bar{L}_i) + \varepsilon_i$ , donde el residuo  $\varepsilon$  mide las tasas de crecimiento de la productividad total del país  $i$  menos la media de la muestra. Young obtuvo el resultado siguiente:  $a = -0.21$  y  $b = 0.45$ . Con estos resultados, calculó las tasas de productividad total de los países asiáticos y concluyó que eran relativamente bajas.

Por su parte, Felipe y McCombie (2003) argumentan lo siguiente. La identidad contable en tasas de crecimiento se puede escribir como  $(\hat{V}_i - \hat{L}_i) \equiv a_i \hat{w}_i + (1 - a_i) \hat{t}_i + (1 - a_i) (\hat{J}_i - \hat{L}_i)$ , o  $(\hat{V}_i - \hat{L}_i) \equiv \gamma_i + (1 - a_i) (\hat{J}_i - \hat{L}_i)$ , donde  $\gamma_i \equiv a_i \hat{w}_i + (1 - a_i) \hat{t}_i$ . Recuérdese que esto es una identidad. Su relevancia es la siguiente: si se estima la regresión  $(\hat{V}_i - \hat{L}_i) = a + b(\hat{J}_i - \hat{L}_i) + \varepsilon_i$ , como Young hizo, una comparación con la identidad contable  $(\hat{V}_i - \hat{L}_i) \equiv \gamma_i + (1 - a_i) (\hat{J}_i - \hat{L}_i)$ , indica que es obvio que el coeficiente  $b$  de la regresión de Young debe aproximar la proporción del capital en el producto, *i.e.*,  $(1 - a_i)$ ; y que la suma de la constante ( $a$ ) y el error ( $\varepsilon_i$ ) den, por definición,  $\gamma_i \equiv a_i \hat{w}_i + (1 - a_i) \hat{t}_i$ . Naturalmente, los coeficientes pueden tener algún sesgo si  $\gamma_i$  no es ortogonal a  $(\hat{J}_i - \hat{L}_i)$ .

Finalmente, Felipe y McCombie demuestran como se deriva la función translog, utilizada por Kim y Lau (1994), como una transformación de la identidad contable.

### El modelo de Mankiw-Romer-Weil (1992)

En un artículo muy conocido y discutido durante la última década, Mankiw y otros (1992) propusieron un método para contrastar empíricamente el modelo de Solow (1956). Para ello, derivaron la forma en estado estacionario de dicho modelo. El modelo de Solow en estado estacionario predice que la productividad del trabajo se relaciona positivamente con la tasa de ahorro y negativamente con el crecimiento de la población; es decir,

$$\ln \frac{V}{L} = b_0 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln s - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln(\ell + 0.05) + \varepsilon,$$

donde  $V/L$  es la productividad del trabajo,  $s$  la tasa de ahorro,  $\ell$  es la tasa de crecimiento de la población, y 0.05 es la suma de la tasa de crecimiento de la tecnología más la tasa de depreciación. El modelo, como se puede apreciar, además predice el tamaño de los coeficientes. Mankiw y otros (1992) también derivaron un modelo de Solow aumentado que incluía capital humano.

Cuando estos autores estimaron los dos modelos, concluyeron que mientras el modelo de Solow tradicional tenía muy poco poder predictivo (en particular cuando era estimado para el grupo de países de la OCDE), el modelo aumentado con capital humano daba buenos resultados, con elasticidades de los tres factores (capital físico, capital humano y trabajo) alrededor de  $1/3$ . Los autores también calcularon la velocidad de convergencia hacia el estado estacionario, estimada en 2%. Este resultado indica que cada país se acerca 2% a su estado estacionario cada año.

Por su parte, Felipe y McCombie (2005b) derivan una ecuación idéntica a la del modelo de Solow directamente de la identidad contable, con sus mismas variables, signos y coeficientes a partir de la identidad contable. Este resultado explica por qué y cuándo la ecuación derivada por Mankiw y otros (1992) dará lugar a buenas (o malas) estimaciones econométricas. Respecto a la ecuación por la que se calcula la velocidad de convergencia hacia el estado estacionario, Felipe y McCombie (2005b) demuestran que si se estima correctamente (de nuevo ello quiere decir que la ecuación estimada sea la aproximación adecuada a la identidad contable), la velocidad de convergencia debe ser infinita, un resultado absurdo dentro del modelo neoclásico. Estos resultados nos llevan a cuestionar muchas de las discusiones que han tenido lugar durante la última década en el contexto de los modelos de crecimiento de corte neoclásico.

### **Contabilidad del crecimiento**

Uno de los usos más importantes de las funciones de producción agregadas son los ejercicios de contabilidad del crecimiento en la tradición de Solow (1957). Mediante este procedimiento se obtiene, residualmente, una aproximación a lo que normalmente se interpreta como la tasa de crecimiento del progreso tecnológico. La gran ventaja de esta metodología es que evita los malos resultados a que suelen dar lugar las estimaciones de funciones de producción agregadas, por lo que hoy en día una gran cantidad de autores las prefieren (Barro, 1999, Hsieh 2002). Para llevar a cabo la contabilidad del crecimiento, se asume que las condiciones de

primer orden prevalecen y que, por tanto, las elasticidades de los factores son iguales a las proporciones de estos en el producto. Al expresar la función de producción en tasas de crecimiento y asumir las condiciones de primer orden, la tasa de crecimiento del progreso técnico (o tasa de productividad total) viene dada por la expresión  $\hat{TPT}_t = \hat{V}_t - a_t \hat{\ell}_t - (1 - a_t) \hat{f}_t$ , donde  $\hat{TPT}_t$  es el crecimiento de la tasa de productividad total. Sin embargo, Felipe y McCombie (2005c) argumentan que la expresión [8], una identidad contable, se puede reescribir como:

$$a_t \hat{w}_t + (1 - a_t) \hat{f}_t \equiv \hat{V}_t - a_t \hat{L}_t - (1 - a_t) \hat{f}_t.$$

Comparando estas dos expresiones, se debe llegar a la inescapable conclusión de que lo que la economía neoclásica denomina como tasa de productividad total se puede derivar como una tautología a partir de una identidad contable. Además, el resultado implica que

$$\hat{TPT}_t \equiv a_t \hat{w}_t + (1 - a_t) \hat{f}_t.$$

Si la función de producción agregada no existe, no hay motivo alguno para interpretar este “residuo” como se hace en la economía neoclásica; es decir, como la tasa de crecimiento del progreso técnico. La última expresión es simplemente una media ponderada de las tasas de variación de los salarios y de la tasa de beneficio, es decir, una medida de la distribución del producto.

### **¿POR QUÉ LOS MACROECONOMISTAS CONTINUAN UTILIZANDO FUNCIONES DE PRODUCCIÓN AGREGADAS?**

¿Por qué siguen los economistas empleando funciones de producción agregadas? Debe resaltarse, en primer lugar, que el uso en trabajos teóricos y empíricos por parte de los macroeconomistas educados en la tradición neoclásica, de agregados tales como la inversión, capital, trabajo, o producto total, todos ellos derivados teóricamente de una función de producción agregada con propiedades neoclásicas (así como la función de

producción agregada misma), no legitima tales construcciones.<sup>16</sup> Los macroeconomistas neoclásicos han aprendido a responder a la pregunta inconveniente de “por qué” los utilizan a pesar de todos los problemas señalados anteriormente. Sin lugar a duda hay un motivo fundamental y subyacente en la práctica, y es que tal y como se explica en la economía hoy en día, hay poco lugar para disentir. Como se indicó más arriba, la generación moderna de economistas no ha oído hablar de los problemas señalados anteriormente y tras años dedicados a aprender la ciencia “lúgubre” (dismal), descubrir repentinamente que uno de los instrumentos fundamentales en los que se basa su conocimiento en áreas tales como crecimiento, trabajo o comercio internacional, no tiene fundamento alguno, es duro de entender. Como argumenta Lavoie (1992, pp.14-19), es muy difícil alejarse de lo que a uno se le ha enseñado durante muchos años pues el precio a pagar es muy alto.

Por ello y porque los resultados de los teoremas de agregación son tan dañinos, la profesión ha optado por ignorarlos y se siente a gusto con respuestas que no van más allá de ser *clichés*. Por ejemplo, siguiendo los razonamientos de Ferguson (1971) se argumenta a menudo que se puede pensar en las funciones de producción agregadas por analogía a las funciones de producción microeconómicas y, por tanto, la validez de las funciones agregadas es simplemente una cuestión empírica. Otro argumento esgrimido, siguiendo a Samuelson (1961-1962), es que las funciones de producción agregadas son parábolas. Finalmente, otros autores argumentan que para determinadas aplicaciones empíricas (por ejemplo, contabilidad del crecimiento y estimación econométrica) no hay otra solución. Ninguno de estos motivos es válido.

El primer argumento es que a pesar de los problemas de agregación y las controversias de Cambridge, las funciones de producción dan resultados empíricos válidos, al menos a veces, y proveen hipótesis contrastables

---

<sup>16</sup> Naturalmente ello no quiere decir que la noción del producto agregado ( $Y$ ), derivado como la suma del consumo ( $C$ ), gasto público ( $G$ ), inversión ( $I$ ) y las exportaciones netas ( $X-M$ ), *i.e.*,  $Y=C+G+I+X-M$ , sea incorrecta. Lo que es incorrecto es pensar en el producto agregado como  $Y=F(K, L)$ .

empíricamente para los econométricos. Entonces, ¿por qué no seguir utilizándolas? Este es el argumento de Ferguson (1971) en su intercambio con Joan Robinson (1970) donde el primero indicó que es simplemente una cuestión de fe. Sin embargo, este argumento no es más que instrumentalismo y, por tanto, nada defendible desde un punto de vista metodológico. (Blaug, 1993).<sup>17</sup> El problema es que construir modelos teóricos de crecimiento, por ejemplo, argumentando que la función de producción es microeconómica, para luego argumentar o proveer evidencia empírica en términos de agregados, como se suele hacer hoy en día, es incorrecto. Es decir: las conclusiones derivadas de modelos microeconómicos no se pueden trasladar a los agregados. Además, este tipo de argumento fue refutado por Fisher (1971) (ver la nota a pie de página número 15).

Naturalmente, el problema de la agregación aparece en todas las áreas de la macroeconomía, incluyendo la teoría del consumo, donde existe una teoría bien definida a nivel microeconómico. De la misma forma, la función agregada neoclásica se construye por analogía (Ferguson, 1971). Bajo esta perspectiva, problematizar la agregación no sería más que una posición destructiva y sin valor alguno. Sin embargo, este argumento no es válido. El empleo de funciones de producción agregadas bajo la premisa no verificada de que la inferencia por analogía es correcta, es inadmisibles. La diferencia con respecto a la función de consumo es que las condiciones de agregación en este último caso, aún siendo también restrictivas, lo son mucho menos que las condiciones para agregar funciones de producción. La función de consumo agregada existirá siempre y cuando las utilidades marginales del consumo individuales sean constantes y aproximadamente iguales; o sí la distribución de la renta varía relativamente poco. Estas condiciones son posibles (Fisher, 1987).

---

<sup>17</sup> Paradójicamente, tras criticar la teoría de la productividad marginal agregada y referirse al problema de la agregación (Blaug, 1993, capítulos 9-10), Blaug (1993, p. 181) defiende a Ferguson y argumenta que no hay nada absurdo con tener fe en el concepto de función de producción agregada.

El segundo argumento utilizado a veces para justificar el uso de la función agregada de producción es que esta última es una parábola, argumento utilizado por Samuelson (1961-1962). Samuelson argumentó que incluso en los casos con bienes de capital heterogéneos, la función agregada podría tener una justificación, asumiendo un único factor homogéneo llamado capital cuyo producto marginal es igual a la tasa de interés. De esta forma, Samuelson construyó lo que se conoce como la “función de producción sustituta” (*surrogate*). Sin embargo, el modelo de Samuelson dependía de una hipótesis crucial: que las industrias productoras de los bienes de consumo y de los bienes de capital utilizan la misma proporción de insumos, de forma que con cada técnica de producción, el coeficiente trabajo/capital necesario para producir bienes de capital era el mismo que para producir bienes de consumo. Ello implica que los precios relativos son independientes de las alteraciones en la distribución entre salarios y beneficios. Garegnani (1970) demostró que la hipótesis simplificadora de Samuelson implicaba, irónicamente, trabajar en el marco de la teoría clásica del valor basada en el trabajo, que tanto repudiaban los economistas neoclásicos.

Como señalamos antes, Samuelson (1966) admitió finalmente que aparte de los modelos con producto único y por tanto homogéneo, los problemas del recambio y de reversión del capital eran la norma, y no casos anómalos. Economistas neoclásicos como Hahn (1972) o Bliss (1975) concluyeron sin reservas que la noción de función de producción agregada no se podía derivar a partir de los principios de la teoría del equilibrio general; y que la proposición general de que un insumo será más barato cuanto más cantidad disponible haya de él no se deduce de la teoría del equilibrio general. Sin embargo, otros economistas neoclásicos argumentaron que aunque teóricamente correctos, los problemas del recambio y de la reversión del capital no eran relevantes empíricamente (Stiglitz 1974) y, por tanto, seguían teniendo fe en el mecanismo de sustitución implícito en la función de producción agregada.<sup>18</sup>

---

<sup>18</sup> Esta última parte es interesante en tanto el problema no tiene que ver con la probabilidad de que el fenómeno de reversión del capital ocurra empíricamente. El principio de la sustitución de los

El último argumento a favor del uso de funciones de producción agregadas es que no hay otra opción a la hora de estudiar los problemas para los que la función de producción agregada se utiliza; por ejemplo, para estudiar las diferencias de productividad entre países, o para realizar la contabilidad del crecimiento. Este argumento merece escasa consideración. Naturalmente, si uno insiste en la legitimidad de un programa de investigación cuyo objetivo es estudiar las fuentes del crecimiento siguiendo la lógica neoclásica (es decir, que tiene sentido separar las contribuciones de los factores), ni que decir tiene que el punto de partida será la función de producción agregada. Pero si nos damos cuenta de que agregados tales como la inversión, el producto, el trabajo o el capital son cuestionables, la legitimidad de tal programa de investigación colapsa.

A lo anterior debemos añadir la importancia que la función de producción agregada tiene como base de la teoría neoclásica de la distribución (tema mencionado al resumir los debates de Cambridge). En este modelo, la distribución del producto entre las clases sociales se explica enteramente en términos técnicos (optimización, productividad marginal y el coeficiente capital-trabajo). Pensar en la distribución del producto en términos de clases, poder, o cualquier otro tipo de fuerzas políticas, históricas o sociológicas, es casi anatema en los círculos ortodoxos.

## CONCLUSIONES

Este artículo ha resumido y discutido una parte de la literatura existente que cuestiona la noción de función de producción agregada tanto desde el punto de vista teórico como desde el empírico. Desde el primero, los participantes en los debates de Cambridge-Cambridge, así como los autores que trataron el problema de la agregación, concluyeron hace varias décadas que la noción de función de producción agregada no tiene fundamento teórico alguno. Una vez que esto fue admitido y aceptado, el argumento

---

factores surgió no a partir de una observación empírica sino en un proceso deductivo a partir de axiomas que los primeros marginalistas creyeron posibles.

esgrimido en defensa de la función de producción agregada cambió: la cuestión de la validez de la función de producción agregada era solo una cuestión empírica, es decir, que mientras las funciones de producción agregadas produjeran “buenos” resultados al ser estimadas estadísticamente, no había motivo alguno para dejar de utilizarlas. Sin embargo, hoy sabemos por qué las funciones de producción agregadas pueden dar lugar a resultados que pueden interpretarse como aceptables desde el punto de vista teórico cuando son estimadas estadísticamente, aun no existiendo teóricamente: no son más que aproximaciones a la identidad contable que relaciona el valor agregado con la masa salarial y los beneficios.

Lo anterior implica que cualquier trabajo teórico o empírico basado en la función de producción agregada debe ser visto con gran escepticismo y cautela.

## BIBLIOGRAFÍA

- Arrow, K., H.B. Chenery, S. Minhas, y R.M. Solow, “Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency”, *Review of Economics and Statistics*, XLIII, 1961, pp. 225-250.
- Aschauer, D., “Is Public Expenditure Productive?”, *Journal of Monetary Economics*, marzo de 1989, pp. 177-200.
- Bhaduri, Amit, “On the Significance of Recent Controversies on Capital Theory: A Marxian View”, *The Economic Journal*, vol. 79, núm. 315, septiembre de 1969, pp. 532-539.
- Barro, Robert, “Notes on Growth Accounting”, *Journal of Economic Growth*, vol.64, núm. 2 junio de 1999, pp. 119-137.
- Basu Susanto y J.G. Fernald, “Are Apparent Spillovers a Figment of Specification Error?”, *Journal of Monetary Economics*, núm. 36, 1995, pp. 165-188.
- , “Returns to Scale in U.S. Production: Estimates and Implications”, *Journal of Political Economy*, vol. 105, núm. 2, 1997, pp. 249-283.
- Blaug, Mark, *The Methodology of Economics. Or How Economists Explain*, Cambridge University Press, 2da. edición (reimpresión), 1993.
- Blis, Christopher J., *Capital Theory and the Distribution of Income*, Amsterdam and New York, Elsevier North-Holland, 1975.
- Cobb, C.W. y P.H. Douglas, “A Theory of Production”, *American Economic Review*, vol. 18, suplemento de marzo, *Papers and Proceedings of the Fortieth Annual Meeting of the American Economic Association*, diciembre de 1928, pp. 139-165.

- Cohen, Avi, y G. Harcourt, "Whatever Happened to the Capital Controversies?", *Journal of Economic Perspectives*, invierno de 2003, pp. 199-214.
- Douglas, P.H., "The Cobb-Douglas Production Function Once Again: Its History, Its Testing, and Some Empirical Values", *Journal of Political Economy*, octubre de 1976, pp. 903-915.
- , "Are There Laws of Production?", *American Economic Review*, marzo de 1948, pp. 1-41.
- Felipe, Jesús, "Endogenous Growth, Increasing Returns, and Externalities: An Alternative Interpretation of the Evidence", *Metroeconomica*, vol. 52, núm. 4, noviembre de 2001a, pp. 391-427.
- , "Aggregate Production Functions and the Measurement of Infrastructure Productivity: A Reassessment", *Eastern Economic Journal*, vol. 27, núm. 3, verano de 2001b, pp. 323-344.
- , "Total Factor Productivity Growth in East Asia: A Critical Survey", *The Journal of Development Studies*, vol. 34, núm. 5, abril de 1999, pp. 1-41.
- Felipe, Jesús y F. Gerard Adams, "A Theory of Production'. The Estimation of the Cobb-Douglas Function: A Retrospective View", Forthcoming in the *Eastern Economic Journal*, 2005.
- Felipe, Jesús y Franklin M. Fisher, "Aggregation in Production Function: What Applied economists Should Know", *Metroeconomica*, vol. 54, núms. 2-3, mayo-septiembre de 2003, pp. 208-262.
- Felipe, Jesús y Carsten Holz, "Why do Production Functions Work? Fisher's Simulations, Shaikh's Identity and Some New Results", *International Review of Applied Economics*, julio de 2001, pp. 261-285.
- Felipe, Jesús y J.S.L. McCombie, "How Sound are the Foundations of the Aggregate Production Function? An Overview", Forthcoming in the *Eastern Economic Journal*, 2005a.
- , "Why are Some Countries Richer than Others? A Sceptical View of Mankiw-Romer-Weil's Test of the Neoclassical Growth Model", Forthcoming in *Metroeconomica*, 2005b.
- , "Is a Theory of Total Factor Productivity Really Needed?", Asian Development Bank (Manila, Filipinas) y University of Cambridge, Manuscrito, 2005c.
- , "Some Methodological Problems with the Neoclassical Analysis of the East Asian Economic Miracle", *Cambridge Journal of Economics*, agosto de 2003, pp. 695-721.

- , “A Problem with Some Recent Estimations and Interpretations of the Markup in Manufacturing Industry”, *International Review of Applied Economics*, vol. 16, núm. 2, abril de 2002, pp. 187-215.
- , “The CES Production Function, the Accounting Identity and Occam’s Razor”, *Applied Economics*, agosto de 2001, pp. 1221-1232.
- Ferguson, C.E., “Capital Theory up to Date: A Comment on Mrs Robinson’s Article”, *Canadian Journal of Economics*, mayo de 1971, pp. 250-254.
- , *The Neoclassical Theory of Production and Distribution*, Cambridge, Cambridge University Press (edición revisada en 1972), 1969.
- Fisher, Franklin, *Aggregation. Aggregate Production Functions and Related Topics*, Cambridge, MA, The MIT Press, 1993.
- , “Aggregation Problem”, en Millgate Eatwell y Newman (eds.), *The New Palgrave. A Dictionary of Economics*, London and Basingstoke, Macmillan, 1987, pp. 53-55.
- , “Aggregate Production Functions and the Explanation of Wages: A Simulation Experiment”, *The Review of Economics and Statistics*, vol. 53, núm. 4, noviembre de 1971, pp. 305-325.
- Garegnani, P., “Heterogeneous Capital, the Production Function and the Theory of Distribution”, *Review of Economic Studies*, vol. 37, 1970, pp. 407-436.
- Hahn, Frank H., *The Share of Wages in the National Income*, Londres, Weidenfeld and Nicholson, 1972.
- Hall, Robert, “The Relation between Price and Marginal Cost in U.S. Industry”, *Journal of Political Economy*, núm. 96, 1988, pp. 921-947.
- Hsieh Chang-Tai, “What Explains the Industrial Revolution in East Asia? Evidence from Factor Markets”, *American Economic Review*, núm. 92 (3), 2002, pp. 502-526.
- Intriligator, M.D., *Econometric Models, Techniques and Applications*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1978.
- Jorgenson, D.W., “Investment and Production: A Review”, en M.D. Intriligator y D.A. Kendrick, *Frontiers of Quantitative Economics*, vol. II, Amsterdam, North Holland, 1974.
- Jorgenson, D.W. y K.Y. Yun, “Tax Policy and Capital Allocation”, Harvard Institute of Economic Research Discussion Paper núm. 1107, 1984.
- Journal of Economic Perspectives, “Comments”, vol. 17, núm. 4, otoño de 2003, pp. 227-235.
- Kim, J.I. y L. Lau, “The Sources of Economic Growth of the East Asian Newly Industrialized Countries”, *Journal of the Japanese and International Economies*, vol. 8, 1994, pp. 235-271.

- Kurz, Heinz (ed.), *Critical Essays on Piero Sraffa's Legacy in Economics*, Cambridge, Cambridge University Press, 2000.
- Lavoie, Marc, *Foundations of Post-Keynesian Economic Analysis*, Aldershot and Brookfield, Edward Elgar, 1992.
- Lucas, R.E., "Capacity, Overtime, and Empirical Production Functions", *American Economic Review. Papers and Proceedings*, mayo de 1970, pp. 23-27.
- Mankiw, G., D. Romer, D. Weil, "A Contribution to the Empirics of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, vol. 107, núm. 2, mayo de 1992, pp. 407-437.
- McCombie, J.S.L., "The Solow Residual, Technical Change and Aggregate Production Functions", *Journal of Post Keynesian Economics*, invierno de 2000-2001, pp. 267-297 (errata *ibid.* p. 544).
- , "The Regional Production and the Accounting Identity: A Problem of Interpretation", *Australasian Journal of Regional Studies*, 2000, pp. 133-155.
- Pasinetti, L.L., "Critique of the Neoclassical Theory of Growth and Distribution", *Moneta e Credito, Banca Nazionale del Lavoro Quarterly Review*, núm. 210, junio de 2000, pp. 187-232.
- , "The Structure of Long-Term Development: Concluding Comments", in Pasinetti, L.L. y R.M. Solow (eds.), *Economic Growth and the Structure of Long-Term Development*, Basingstoke, Macmillan, 1994.
- Phelps Brown, E.H., "The Meaning of the Fitted Cobb-Douglas Function", *Quarterly Journal of Economics*, noviembre de 1957, pp. 546-560.
- Robinson, Joan, "The Measure of Capital: The End of the Controversy", *The Economic Journal*, vol. 81, núm. 323, septiembre de 1971a, pp. 597-602.
- , "The Existence of Aggregate Production Functions: Comment", *Econometrica*, vol. 39, núm. 2, marzo de 1971b, p. 405.
- , "Capital Theory Up to Date", *Canadian Journal of Economics*, vol. 3, núm. 2, mayo de 1970, pp. 309-317.
- , *The Accumulation of Capital*, London, Macmillan, 1956.
- , "The Production Function and the Theory of Capital- Reply", *Review of Economic Studies*, vol. 23, núm. 2, 1955-1956, p. 247.
- , "The Production Function and the Theory of Capital", *Review of Economic Studies*, vol. 21, núm. 2, 1953-1954, pp. 81-106.
- Samuelson, Paul., "A summing Up", *Quarterly Journal of Economics*, vol. 80, núm. 4, 1966, pp. 568-583.
- , "Parable and Realism in Capital Theory: The Surrogate Production Function", *Review of Economic Studies*, vol. 29, junio, 1961-1962, pp. 193-206.

- Shaikh, A., "Laws of Production and Laws of Algebra: Humbug II", en E.J. Nell (ed.), *Growth, Profits and Property, Essays in the Revival of Political Economy*, Cambridge, Cambridge University Press, 1980, pp. 80-95.
- , "Laws of Production and Laws of Algebra: The Humbug Production Function", *Review of Economics and Statistics*, febrero de 1974, pp. 115-120.
- Simon, H.A., "Rational Decision Making in Business Organizations", *American Economic Review*, núm. 69, 1979a, pp. 493-513.
- , "On Parsimonious Explanation of Production Relations", *Scandinavian Journal of Economics*, diciembre de 1979b, pp. 459-474.
- Simon, H. A. y F.K. Levy, "A Note on the Cobb-Douglas Function", *Review of Economic Studies*, junio de 1963, pp. 93-94.
- Solow, Robert, "Growth Theory and After", *American Economic Review*, junio de 1988, pp. 307-317.
- , "Review of *Capital and Growth*", *American Economic Review*, vol. 56, núm. 5, diciembre de 1966, pp. 1257-1260.
- , "Technical Change and the Aggregate Production Function", *Review of Economics and Statistics*, agosto de 1957, pp. 312-320.
- , "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, vol. 70, 1956, pp. 65-94.
- Stiglitz, J.E., "The Cambridge-Cambridge Controversy in the Theory of Capital: A View from New Heaven: A Review Article", *Journal of Political Economy*, vol. 82, núm. 4, julio-agosto de 1974, pp. 893-903.
- Sylos Labini, Paolo, "Why the Interpretation of the Cobb-Douglas Production Function Must be Radically Changed", *Structural Change and Economic Dynamics*, vol. 6, 1995, pp. 485-504.
- Temple, Jonathan, "The New Growth Evidence", *Journal of Economic Literature*, vol. 37, marzo de 1999, pp. 112-156.
- Young, Alwyn, "A Tale of Two Cities: factor accumulation and technical change in Hong Kong and Singapore", *National Bureau of Economics Research Macroeconomics Annual 1992*, 1992, pp. 13-63.
- , "Lessons from the NICs: a contrarian view", *European Economic Review*, vol. 38, 1994, pp. 964-973.
- , "The Tyranny of Numbers: confronting the statistical realities of the East Asian growth experience", *Quarterly Journal of Economics*, vol. 110, 1995, pp. 641-80.