Nueva solución de la integral exponencial para su aplicación en flujo de fluidos en medios porosos

Ricardo Posadas Mondragón
Pemex Exploración y Producción
ricardo.posadas@pemex.com

Fernando Samaniego Verduzco
Facultad de Ingeniería, UNAM.
fersamaniegov@hotmail.com

Información del artículo: recibido: junio de 2014-aceptado: febrero de 2015

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo mostrar una nueva ecuación para solucionar la integral exponencial mediante el método de integración numérica por trapezoides, habiendo obtenido una ecuación en términos de una sumatoria. Existen diferentes ecuaciones tal como Abramowitz (1970), que son sumatorias infinitas para evaluar la integral exponencial para un valor del argumento. En el presente trabajo se establece una ecuación con una serie *finita*, ya que se evalúan los términos de la sumatoria requeridos con la finalidad de optimizar el cálculo.

Solucionar la integral exponencial resulta de gran ayuda para comprender fenómenos físicos de yacimientos para el flujo de fluidos en medios porosos, ya que una de las aplicaciones directas son pruebas de interferencia, evaluación de fallas geológicas, comportamiento de presión en un yacimiento naturalmente fracturado, entre otras aplicaciones.

En este trabajo se mostrará una aplicación para evaluar el comportamiento de presión de un pozo ante una falla geológica utilizando pozos imagen y la solución de la integral exponencial.

Palabras clave: Integral exponencial, pozos imagen, fronteras, pruebas de presión.

New Solution of exponential integral for application in fluid flow on porous media

Abstract

This paper show a new equation for solution of exponential integral through numerical integration using the trapezoid method. There are different equations as Abramowitz (1970), those are infinite sums to evaluate a argument value of exponential integral. This paper present a equation as finite serie, we evaluate the terms required in the sum in order to optimize the calculation.

The solution of exponential integral helps to understand the physical phenomena in the reservoir, specially fluid flow on porous media. The main application is in well test analysis; interference tests, dynamic characterization for boundaries, pressure behavior in naturally fractured reservoirs, etc.

In this paper we show application to evaluate the wellbore pressure behavior with a seal fault as boundary using the image wells technic and the new solution of exponential integral.

Keywords: Exponential integral, image wells, boundaries, well test.

Introducción

Para el ingeniero de yacimientos y de productividad de pozos, resulta indispensable conocer el comportamiento de presión-producción de los pozos, para lo cual se recurre al entendimiento de la ecuación de difusión y a las condiciones de frontera interna y externa establecidas para su solución. Para el caso de un yacimiento infinito con pozo produciendo a gasto constante, se puede solucionar por cualquiera de las diferentes formas existentes:

a) Transformada de Boltzman
b) Transformada de Laplace

Independientemente de la forma de solucionar la ecuación de difusión, se llega a una solución en términos de la integral exponencial (la cual no tiene solución analítica) y para solucionar el comportamiento de presión de los pozos, se tiene que recurrir a técnicas tales como:

1. Aproximación logarítmica
2. Inversión numérica de Laplace
3. Solución de integral exponencial por integración numérica

La aproximación logarítmica es válida sólo para ciertos valores del argumento de la integral exponencial, lo cual limita su uso para su aplicación en la evaluación del comportamiento transitorio de presión.

La inversión numérica de Laplace es un método útil para generar la solución, sin embargo, su aplicación requiere un mayor conocimiento del tema y un algoritmo para lograr invertir del espacio de Laplace al espacio real del tiempo.

Una de las técnicas más comunes ha sido la integración numérica, ya que resulta más fácil de aplicar y comprender. La mayoría de las ecuaciones establecidas se basan en sumatorias infinitas o bien soluciones seccionadas de acuerdo al valor del argumento de la integral exponencial.

El presente trabajo muestra una forma simple de evaluar la integral exponencial mediante una serie finita para su aplicación directa en la evaluación del comportamiento de presión en pozos.

Este trabajo forma parte de la investigación que se realiza en un proyecto de tesis de maestría que se está desarrollando en la Universidad Nacional Autónoma de México, (UNAM).

Desarrollo del tema

Definición del problema

La solución de la ecuación de difusión para un yacimiento infinito y que considera un pozo como una línea fuente produciendo a gasto constante expresada en variables adimensionales se encuentra en función de la integral exponencial (Ec. 1). La cual no tiene solución analítica, para solucionar dicha integral se debe recurrir a diferentes métodos.

$$p_D = \frac{1}{2} E_1\left[\frac{r_D^2}{4t_D}\right] \tag{1}$$

Por definición la integral exponencial es la Ec. 2, donde se puede observar que no existe solución analítica, ya que al intentar plantear una integración por partes se llegará a una integral de la misma forma sin lograr una solución.

$$E_1[x] = \int_x^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \qquad x = \frac{r_D^2}{4t_D} \tag{2}$$

Solución

Por lo anterior, lo primero que se establece para solucionar la integral exponencial mediante el método de trapezoides es verificar que la función a integrar $\frac{e^{-x}}{x}$ sea positiva, lo cual se muestra en la **Figura 1**. Debido a que la función siempre será positiva se puede establecer entonces que el área bajo la curva de dicha curva corresponde a la integral de la función.

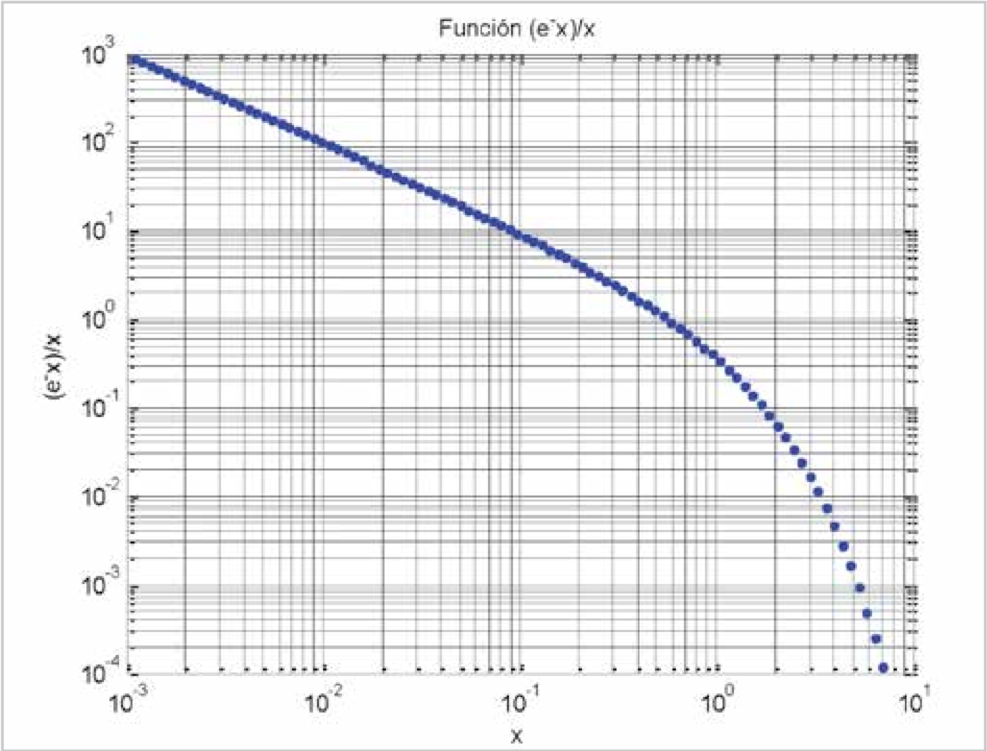

Figura 1. Verificación de función positiva $\frac{e^{-x}}{x}$.

El método de trapezoides consiste en seccionar el rango de valores a evaluar de la función, que en nuestro caso es $\frac{e^{-x}}{x}$, en pequeñas divisiones, **Figura 2**, y determinar el área de esos pequeños rectángulos generados con la Ec.3.

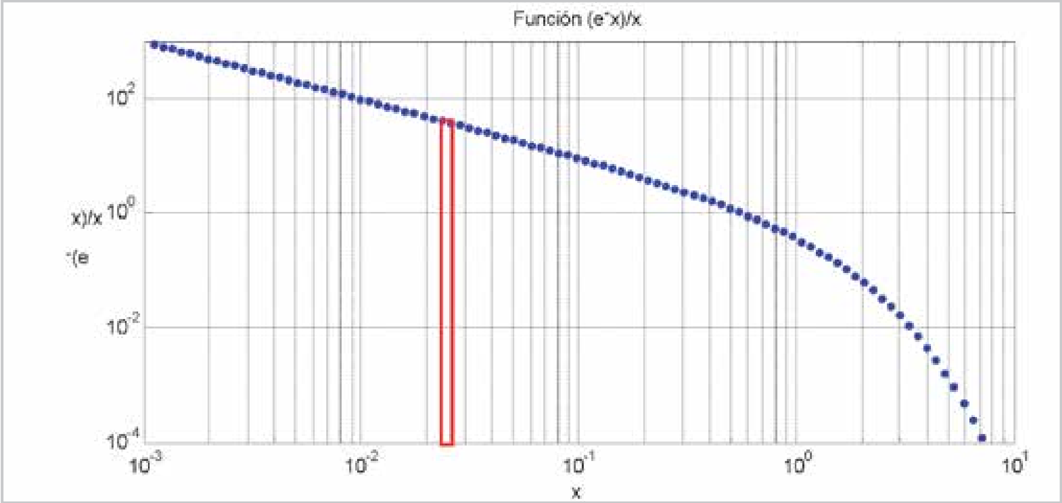

Figura 2. Definición de integración numérica por trapezoides.

$$A = \frac{\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)_{i+1} + \left(\frac{e^{-x}}{x}\right)_{i}}{2} \cdot \Delta x \tag{3}$$

Posteriormente realizar la sumatoria correspondiente a los límites definidos en la integral de la Ec.2 y de esta manera obtener la solución de la integral exponencial. Lo anterior se muestra a continuación:

$$E_1(x) = \int_X^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)_{i+1} + \left(\frac{e^{-x}}{x}\right)_{i} \right] \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Sin embargo, la ecuación anterior es válida sólo si es constante, pero resulta evidente que al trabajar en escalas logarítmicas, no es conveniente mantener constante dicho valor, ya que los términos de la sumatoria requeridos para evaluar la integral exponencial serían demasiados.

Para el caso donde el incremento del valor del argumento no es constante se obtuvo la Ec. 4, siendo la ecuación que representa la solución de la integral exponencial mediante el método de trapezoides.

$$E_1(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\left[x \cdot \Delta x^{(i-1)}\right]} (\Delta x - 1) + e^{-\left[x \cdot \Delta x^{i}\right]} \left(1 - \Delta x^{(-1)}\right) \tag{4}$$

Donde Δx representa un valor multiplicador para el incremento de los valores del argumento de la integral exponencial, el cual siempre será mayor a la unidad.

Sin embargo, aunque la Ec.4 representa una nueva solución de la integral exponencial, continúa siendo una sumatoria infinita, por lo cual se analizó la forma de evaluar el número de elementos de la sumatoria, atendiendo a los siguientes aspectos:

a) Valores comunes del argumento de la integral exponencial son generalmente menores a 100, $x < 100$.

b) Δx, representa el valor de crecimiento del argumento de la Integral.

c) Número de valores deseados en cada ciclo logarítmico.

Obteniendo la Ec. 5 para evaluar el número de elementos de la sumatoria requeridos:

$$n = \frac{(-\log_{10}(x) + 2) \cdot 2.5}{(\Delta x - 1)} \tag{5}$$

Se debe notar que el denominador corresponde a los ciclos logarítmicos que se tendrán dependiendo del valor de x y que el denominador representa el inverso del número de datos por cada ciclo logarítmico.

De esta manera las ecuaciones propuestas en el presente artículo son la Ec. 5 y Ec. 6.

$$\begin{gathered} E_1(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} e^{-\left[x \cdot \Delta x^{(i-1)}\right]} (\Delta x - 1) + e^{-\left[x \cdot \Delta x^{i}\right]} \left(1 - \Delta x^{(-1)}\right) \\ n = \frac{(-\log_{10}(x) + 2) \cdot 2.5}{(\Delta x - 1)} \end{gathered} \tag{6}$$

Para validar los resultados se toma la solución del Abramowitz (1970) Ec.7. Se comparan las dos soluciones observando los mismos resultados, **Figura 3**.

$$E_1(x) = -\gamma - \ln(x) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i x^i}{i \cdot i!} \tag{7}$$

Una vez evaluada la integral se puede evaluar la presión adimensional P_D de la Ec.1, generando la curva tipo de la solución línea fuente, la cual es útil para análisis de pruebas de interferencia, **Figura 4**.

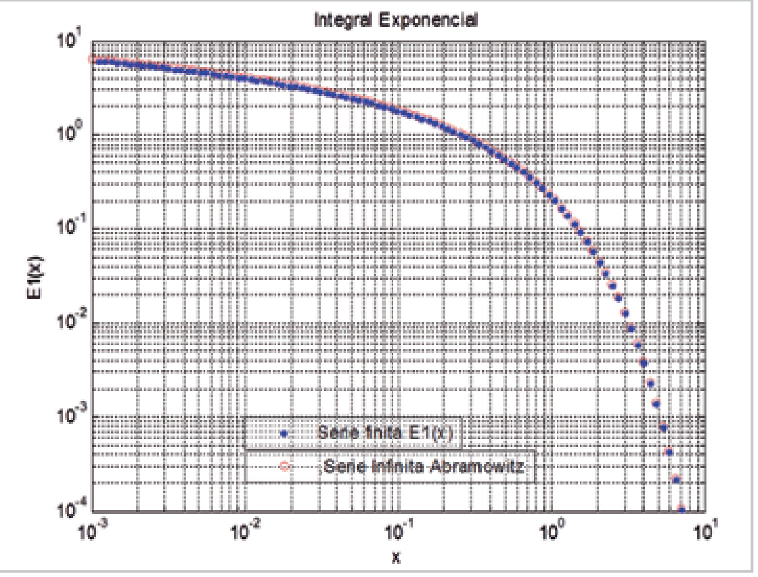

Figura 3. Validación de solución integral exponencial con Abramowitz, (1970).

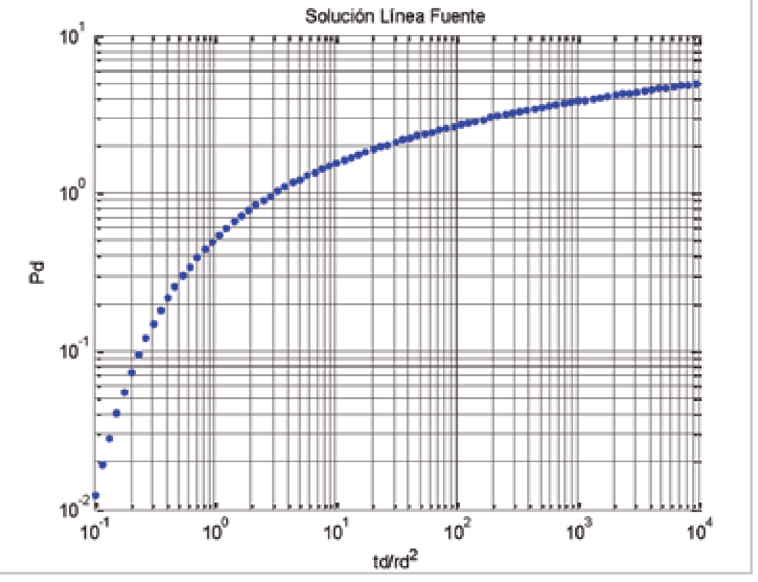

Figura 4. Curva tipo de la solución línea fuente.

Otra aplicación de la solución de la integral exponencial es poder modelar fallas geológicas, mediante la técnica de pozos imagen. Esta técnica es muy útil y representa muy bien el comportamiento, con la finalidad de mostrar los resultados para el análisis de una falla sellante en un pozo, se recopiló e interpretó la información de un pozo utilizando un software comercial, obteniendo los resultados-mostrados en la **Figura 5**, posteriormente con la información obtenida de la interpretación se reproduce el comportamiento de una falla sellante mediante la técnica de pozos imagen para la parte posterior al almacenamiento y se sobreponen a los datos de la prueba y se observa una buena reproducción en la **Figura 6**, con lo que se pueden validar los resultados de la solución de la integral exponencial obtenidos con las ecuaciones propuestas en el presente artículo.

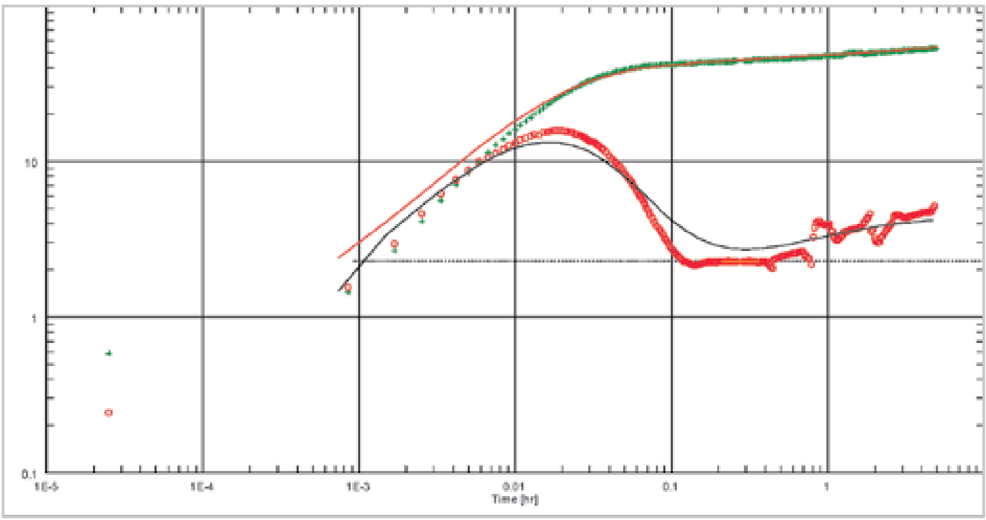

Figura 5. Prueba de presión representando una falla sellante.

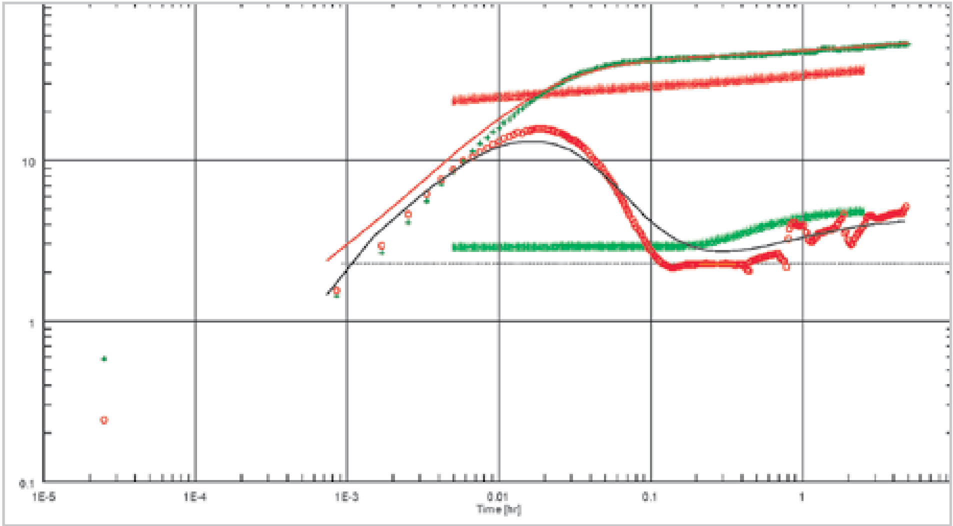

Figura 6. Reproducción del comportamiento de una falla sellante usando la solución propuesta de la integral exponencial.

Discusión de resultados

De acuerdo a los resultados presentados en la **Figura 3,** se demuestra que las Ec. 5 y 6 propuestas como nueva solución de la integral exponencial en el presente artículo, ofrecen resultados confiables, los cuales pueden ser aplicables para determinar el comportamiento de presión de un pozo desde un comportamiento en un yacimiento infinito, fronteras de flujo, hasta el caso más complejo que es la compartamentalización donde existen cuatro fallas delimitando el área de drene del pozo.

En la **Figura 6** se muestra una aplicación de la solución propuesta de la integral exponencial para el caso de una falla sellante, reproduciendo el comportamiento del pozo con resultados satisfactorios.

Conclusiones

- Se ha obtenido una nueva ecuación para evaluar la integral exponencial mediante integración numérica por el método de trapezoides.
- La ecuación obtenida es una serie finita, ya que se evalúan el número de elementos de la sumatoria requeridos para su solución.
- A partir de la solución de la integral exponencial, se obtiene la curva tipo de la solución línea fuente, útil para evaluar pruebas de interferencia.
- Se aplica la ecuación propuesta de solución de la integral exponencial al caso de evaluar fronteras en pozos ante una falla sellante.

Nomenclatura

$A[a\ \dim];$	Área de integración.
$E_1[x];$	Integral exponencial.
$n[a\dim];$	Número de elementos de la sumatoria.
$P_D[a\dim];$	Presión adimensional.
$r_D[a\dim];$	Tiempo adimensional.
$t_D[a\dim];$	Radio adimensional.
$x[a\dim];$	Argumento de la integral exponencial.

Agradecimientos

A Pemex-CONACYT por las facilidades prestadas para la realización de una maestría, de donde se han obtenido los resultados del presente trabajo.

Especial agradecimiento al Dr. Fernando Samaniego Verduzco por la revisión de la ecuación propuesta y por su apoyo para la realización del trabajo de investigación.

Referencias

Abramowitz, M. y Stegun, I. 1970, H*andbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publications.

Semblanza de los autores

Ricardo Posadas Mondragón

Egresado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM en junio de 2004 habiendo obtenido el título de Ingeniero Petrolero con Mención Honorífica. De julio de 2004 a octubre de 2005 se desempeñó en la compañía Halliburton en el área de DST. De octubre de 2005 a la fecha se desempeña en el área de productividad de pozos y sistemas artificiales de producción, en la Coordinación del grupo multidisciplinario de especialistas técnicos de diseño de proyectos, en el Activo de producción Cantarell, participando en proyectos del Activo, tales como pozos no convencionales, terminaciones submarinas y nuevas aplicaciones tecnológicas en la terminación de pozos.

Fernando Samaniego Verduzco

Ingeniero Petrolero y Maestro en Ingeniería Petrolera por parte de la UNAM, y Doctor en Ingeniería Petrolera por la Universidad de Stanford. Su vida profesional se ha centrado en los problemas relacionados a las diversas áreas de la explotación de petróleo en México. Actualmente labora en la UNAM como profesor titular de la División de Posgrado de la Facultad de Ingeniería.