

## **Simulación del comportamiento caótico de un oscilador generalizado de Duffing para diferentes frecuencias de excitación**

***Evelyn Marín\*, Nelvin Andrade\*\* y Magdy De Las Salas\*\****

*\*Universidad del Zulia. Facultad de Ingeniería. Maracaibo  
evelyn.marin320@gmail.com*

*\*\*Universidad del Zulia. Núcleo Costa Oriental del Lago*

### **Resumen**

La presente investigación tiene como objetivo simular mediante el programa Matlab el comportamiento caótico del oscilador generalizado de Duffing para determinadas frecuencias de excitación, para ello se realiza el análisis de un modelo matemático representado por la ecuación diferencial no lineal correspondiente al oscilador de Duffing, se varía la frecuencia de excitación hasta lograr obtener un comportamiento caótico. Se observa la evolución del sistema a partir de su respuesta en dominio del tiempo, espacio de fase y dominio de frecuencia así como también el comportamiento del sistema ante la variación de la frecuencia de excitación. El sistema mecánico está compuesto por un péndulo invertido pivoteado en su base y excitado con dos resortes horizontales, que a su vez son accionados por un mecanismo de biela-manivela (oscilador generalizado de Duffing). Se registró su comportamiento bajo determinados parámetros a través de un sensor de movimiento acoplado a un computador. A partir de un software interactivo, los datos experimentales fueron representados en gráficas en el dominio del tiempo, espacio de fase y dominio de frecuencia. El comportamiento caótico de los modelos matemático y físico es obtenido mediante duplicaciones de periodo al variar la frecuencia de excitación. Los resultados demuestran que el modelo matemático describe el comportamiento del modelo físico real en cuanto a la duplicación de periodos a las mismas frecuencias aunque no existe correspondencia entre los periodos de oscilación.

**Palabras clave:** caos, Oscilador Duffing, Sistemas No Lineales, Espacio de Fase.

## *Simulation of the Chaotic Behavior of a Generalized Duffing Oscillator for Different Excitation Frequencies*

### **Abstract**

The objective of this research was to use the Matlab program to simulate the chaotic behavior of a Duffing Oscillator for certain excitation frequencies. A mathematical model represented by the nonlinear differential equation corresponding to a Duffing Oscillator was analyzed, varying the excitation frequency until obtaining chaotic behavior. Evolution of the system was observed based on its response in the time domain, phase space and frequency domain. Also, behavior of the system related to excitation frequency variation was observed. The mechanical system was composed of an inverted pendulum pivoted on its base and excited by two horizontal springs, driven by a connecting rod-crank mechanism (generalized Duffing oscillator). Its behavior was recorded under certain parameters using a movement sensor connected to a computer. Using interactive software, the experimental data were represented in graphics in the time domain, phase space and frequency domain. Chaotic behavior for the mathematical and physical models was obtained by doubling the period when varying the excitation frequency. Results demonstrate that the mathematical model described the behavior of the real physical model in terms of period doubling at the same frequencies, although there was no correspondence between oscillation periods.

**Keywords:** chaos, Duffing oscillator, nonlinear systems, phase space.

### **Introducción**

Cuando se comenzaron a construirse los primeros puentes, calderas y edificaciones, los ingenieros involucrados en estos proyectos se topaban con el desorden al enfrentar cambios abruptos que no correspondía a la respuesta que ellos esperaban. La física newtoniana en la que se basaban muchos de estos cálculos parecía ser desafiada ante problemas como curvatura en las placas de algunas construcciones o la repentina fractura de algunos materiales.

En el siglo diecinueve los científicos conocían muy vagamente las ecuaciones diferenciales no lineales. Estas ecuaciones se aplican específicamente a fenómenos discontinuos tales como las explosiones, a fisuras repentinas en materiales y los altos vientos. Las ecuaciones diferenciales no lineales constituyen un factor clave en el análisis de sistemas susceptible a entrar en caos. Fenómenos como la turbulencia y el movimiento oscilatorio de algunos sistemas están relacionados con el caos. Una de las características primordiales de estos sistemas es su sensible dependencia a la variación en sus condiciones iniciales; es decir, que una pequeña perturbación podría desencadenar en algún momento una respuesta desproporcionada en comparación con la esperada.

Un ejemplo de este comportamiento puede ser estudiado a partir de la construcción de un sistema de péndulo invertido en el cual una delgada lámina metálica es empotrada en una base fija, en su extremo se ubica una masa y el sistema es excitado por una fuerza externa. Es posible lograr que este sistema físico se comporte de forma caótica si se realiza una apropiada combinación de sus parámetros.

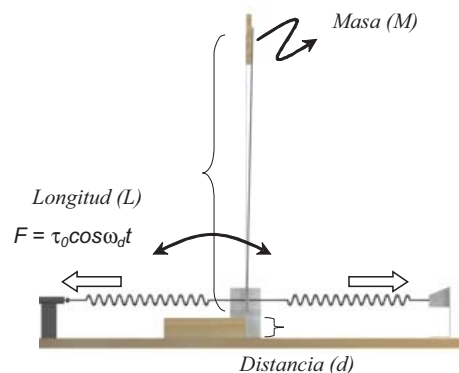
## Sistemas no lineales y el oscilador generalizado de Duffing

Según Nayfeh y Balachandran (2004), un sistema dinámico es aquel cuyo estado evoluciona con el tiempo  $t$ . Una evolución discreta del tiempo usualmente es definida por un sistema algebraico de ecuaciones, mientras que un sistema que evoluciona continuamente en el tiempo, por lo general es descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales. Los sistemas dinámicos pueden ser caracterizados a partir de sus trayectorias en el espacio de fase, la cual muestra la evolución del sistema relacionando dimensiones de desplazamiento con velocidad. De acuerdo a Briggs y Peat (1994), un atractor representa una región del espacio de fase que ejerce una atracción sobre un sistema, y parece arrastrar al sistema hacia esta región.

Según Asfar y Masoud (2002), en la década pasada, el comportamiento caótico de sistemas no lineales determinísticos y su transición al caos ha atraído a atención de un gran número de científicos y matemáticos en casi todos los campos de la ciencia y la ingeniería. Se ha observado, sin embargo, que muchos sistemas caóticos no lineales tienen una característica en común y que justo antes de entrar en caos, estos sistemas duplican sucesivamente su periodo, lo que eventualmente culmina en caos.

Un sencillo diseño de un péndulo invertido fue propuesto por Briggs y Peat (1994), en el año 1987, actualmente este modelo experimental ha sufrido algunas modificaciones, aunque básicamente consiste en péndulo invertido que es excitado por una fuerza periódica externa lateral y que bajo ciertas condiciones se comporta en forma caótica. Una representación general de este sistema se muestra en la Figura 1. Este modelo consiste en un péndulo invertido con una masa acoplada en su tope superior. El péndulo es excitado por medio de dos resortes horizontales accionados por un mecanismo.

De acuerdo a la mecánica clásica, una fuerza generalizada conservativa  $\mathbf{F}$  se define como el negativo del gradiente de una función potencial:



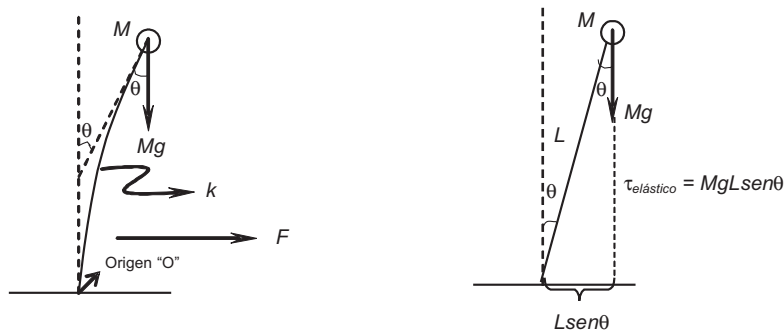
**Figura 1.** Descripción general del oscilador generalizado de Duffing.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \quad (1)$$

Donde la función potencial ( $V$ ) viene dado por la expresión (2):

$$V(\theta) = \frac{1}{2} k\theta^2 \quad (2)$$

Al aplicar la expresión (1) se obtiene el torque elástico del sistema ( $\tau_{\text{elástico}}$ ), donde  $k$  constituye la constante de elasticidad torsional del sistema y su posición angular como se ilustra en la figura 2.



**Figura 2.** Representación de la lámina empleada en el oscilador generalizado de Duffing.

$$\tau_{\text{elástico}} = -k\theta \text{ y } \tau_{\text{gravitatorio}} = MgL \text{sen} \theta$$

Al aplicar la segunda ley de Newton al sistema mostrado en la Figura 2 se tiene:

$$\sum \vec{\tau} = I_0 \ddot{\theta}$$

$$ML^2 \ddot{\theta} = -\gamma \dot{\theta} - k\theta + MgL \text{sen} \theta + \tau_0 \cos \omega_d t$$

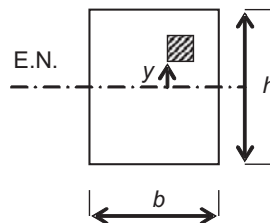
De aquí se obtiene una ecuación aproximada que describe el movimiento de este sistema y viene dada por:

$$ML^2 \ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + k\theta - MgL \text{sen} \theta = \tau_0 \cos \omega_d t \quad (3)$$

Donde  $\theta$  es el ángulo de inclinación de la lámina curvada en su parte superior,  $\dot{\theta} = d\theta/dt$ ,  $M$  es la masa ubicada en el tope superior de la lámina,  $L$  es la distancia desde la base hasta la parte superior de la lámina,  $\gamma$  es la constante de amortiguamiento,  $\tau_0 = F_0 d$  es el máximo valor del periodo del torque aplicado,  $\tau(t) = \tau_0 \cos \omega_d t$ ,  $\omega_d$  representa la velocidad angular y  $F_0$  es la fuerza máxima debido a los resortes horizontales. El valor de  $d$  corresponde a la distancia desde la base de la lámina hasta el punto de aplicación de la fuerza.

Para Sánchez y González (2011), en la determinación de la constante de elasticidad, se debe considerar una viga de sección transversal rectangular como la lámina empleada en el oscilador de Duffing con ancho  $b$  y espesor  $h$  mostrado en la Figura 3.  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje neutro (E.N.); para esta lámina se tiene que:

$$I = \frac{1}{12}bh^3 \quad (4)$$



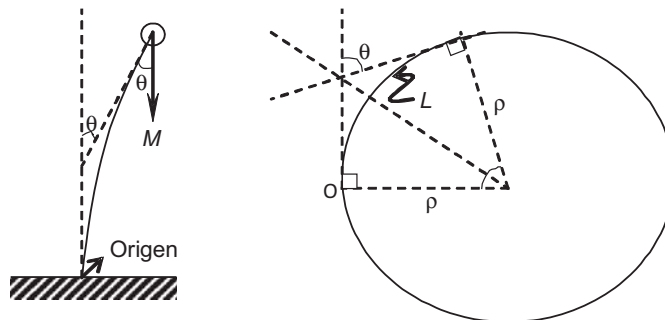
**Figura 3.** Sección transversal rectangular de una lámina a la cual se le determina el segundo momento de área.

El torque  $\tau_o$  en el punto  $O$  debido a las fuerzas aplicadas sobre la lámina es:

$$\tau_o = -EI/\rho \quad (5)$$

Para estimar  $\rho$  (el radio de curvatura), se aproximará el arco de la curvatura de la lámina a un arco de circunferencia, como se muestra en la Figura 4. Adicionalmente se despreciará la masa de la lámina y la única masa a considerar es la ubicada en el tope de la misma. Para esta figura se tiene que  $\theta = L/\rho$ . Sustituyendo  $\rho = L/\theta$  en (5) se obtiene:

$$\tau_o = -\left(\frac{EI}{L}\right)\theta$$



**Figura 4.** Deflexión de una lámina de acero.  $\theta$  es el ángulo formado con el eje vertical y la recta tangente a la lámina en el punto de ubicación de Dúchense y otros (1991).

Para una determinada lámina los parámetros  $E$ ,  $I$  y  $L$  quedan definidos y se tiene que el valor del torque  $\tau_0$  es proporcional al ángulo  $\theta$ . A este coeficiente de proporcionalidad se le conoce como constante elástica ( $k$ ); es decir,

$$k = \frac{EI}{L} \quad (6)$$

Una vez construida la lámina, ésta debe ser excitada con una fuerza externa lateral periódica. Esta fuerza será suministrada por un motor eléctrico el cual estará acoplado a un mecanismo de biela-manivela que transmita esta fuerza a los resortes horizontales, y estos a su vez a la lámina vertical.

## Metodología

De acuerdo a la ecuación (6) la constante de elasticidad de la lámina de acero se calcula a partir de los parámetros  $I$  (segundo momento de área),  $E$  (módulo de Young) y  $L$  (longitud de la lámina). Asimismo, el valor de  $I$  está dado por la expresión (4) la cual es proporcional a las dimensiones de la sección transversal de la lámina. Según Giancoli D. (2008), el valor del Módulo de Young correspondiente al acero es  $200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ . Sustituyendo los valores  $deb = 0,01105 \text{ m}$  y  $h = 0,9 \times 10^{-3} \text{ m}$  tenemos que  $I = 6,7129 \times 10^{-13} \text{ m}^4$  y de acuerdo a la ecuación (6), el valor de la constante de elasticidad será  $k = 0,4582 \text{ N.m}$ :

La simulación del comportamiento caótico de un oscilador generalizado de Duffing requiere además de la determinación de la masa mínima necesaria para que el sistema apenas salga de su posición de equilibrio (0, 0). Para ello, el sistema se estudiará en reposo (sin velocidad ni aceleración) y sin fuerza excitadora (ecuación homogénea), quedando la ecuación (3):

$$k\theta - MgL \sin\theta = 0 \quad (7)$$

Si sustituimos el término no lineal de la expresión anterior por su desarrollo en serie de Taylor y tomamos sólo los dos primeros términos (ya que los otros términos son muy pequeños y pueden despreciarse)  $\sin\theta = \theta - \theta^3/6$  y despejando  $M$ , tenemos:

$$M = \frac{6k}{gL(6 - \theta^2)} \quad (8)$$

Tomando el valor de  $\theta = 1^\circ$  (0,0174 rad) y  $g = 9,78 \text{ m/s}^2$ , se determinó la masa necesaria para sacar a la lámina de su punto de equilibrio (0,0) es  $M = 0,15991 \text{ kg}$ . Teóricamente este valor indica que se requiere de una masa ligeramente mayor a 0,15991 kg para que la masa ubicada en el tope de la lámina quede fuera de su posición de equilibrio.

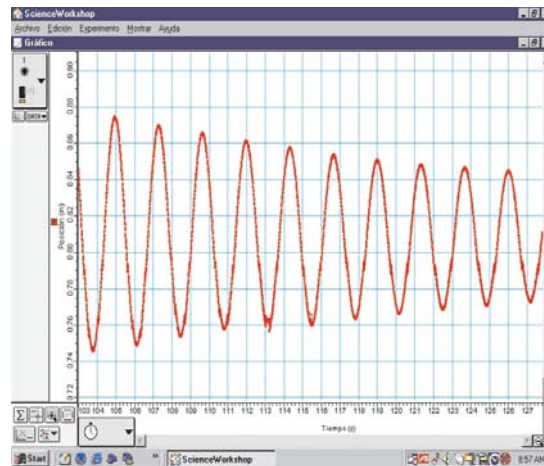
En palabras de Giancoli (2008), la amplitud de cualquier resorte o péndulo real que oscile lentamente va disminuyendo con el tiempo. Un movimiento donde ocurra este comportamiento se les denomina movimiento armónico amortiguado. El amor-

tiguamiento se debe principalmente a la resistencia del medio y a la fricción interna del material, convirtiendo así la energía térmica en una reducción de la amplitud de la oscilación. Para este tipo de movimiento se obtiene que la constante de amortiguamiento se obtiene mediante la expresión (9):

$$\gamma = \frac{2ML^2}{T} \ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) \quad (9)$$

La constante de amortiguamiento ( $\gamma$ ) de la lámina vertical del modelo físico es determinado a partir de pruebas en las cuales dicha lámina se fija a una superficie horizontal por un extremo y al otro extremo (superior) se le coloca la masa. La masa a emplear es de un valor de 0,160 kg, la cual corresponde al valor necesario para que el sistema esté ligeramente fuera de su posición de equilibrio. Esta masa fue representada físicamente utilizando monedas de forma simétrica a ambos lados de la lámina.

En el cálculo de la constante de elasticidad de la lámina se tomaron los datos de Figura 5 la cual fue generada a partir del sistema físico experimental y monitoreado por medio del sensor de movimiento y cuya gráfica se realizó a través de Data Studio. En la Tabla 1 se muestran los datos tomados de la Gráfica anterior.



**Figura 5.** Determinación de la constante a partir de un gráfico

**Tabla 1.** Parámetros para la estimación de la constante de elasticidad ( $k$ )

Masa (M)	Longitud de la lámina (L)	Amplitud 1 $\theta_1$	Amplitud 2 $\theta_2$	Periodo (T)
0,15991 kg	0,293 m	0,0535 m	0,0410 m	9,4 s

Sustituyendo en la ecuación (9)

$$\gamma = \frac{2(0,15991)(0,293)}{9,4} \ln\left(\frac{0,0535}{0,0410}\right) \quad \gamma = 7,7727 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}$$

Una vez definidos los resortes a emplear, se determina el desplazamiento horizontal ( $x_1$ ) que se desea lograr. La fuerza necesaria para este desplazamiento viene dada a través de la Ley de Hooke:

$$F = Kx_1 \quad (10)$$

donde  $K = 6,3 \text{ N/m}$

La siguiente tabla muestra para diferentes valores de fuerza ( $F$ ) a emplear los correspondientes valores de desplazamiento determinados a partir de (10).

**Tabla 2.** Desplazamiento de la manivela y fuerza producida por el mecanismo

Fuerza $F$	Desplazamiento $x_1$
0,6 N	9,5 cm
0,5 N	7,9 cm
0,4 N	6,3 cm
0,3 N	4,8 cm

En la determinación de la frecuencia excitadora del modelo físico se utilizó una fotocelda que registraba el tiempo que le tomaba a un punto ubicado en el borde del disco giratorio de la biela en dar una vuelta (periodo de la revolución). Al calcular la inversa de este tiempo se obtiene la frecuencia de excitación del sistema.

## Resultados

Una de las rutas para llegar al caos consiste en variar la frecuencia de excitación del oscilador manteniendo constante el resto de los parámetros. Con esto, se pretende obtener la duplicación de periodos hasta llegar a obtener una respuesta caótica. A partir del programa Matlab, se efectuó una simulación en la cual se varía la frecuencia de excitación en la ecuación diferencial y se observa la respuesta en el dominio del tiempo, en el espacio de fase y en el dominio de frecuencia.

La Tabla 3 muestra los parámetros a los cuales se simuló el comportamiento del oscilador de Duffing con los valores empleados en la construcción y diseño del modelo mecánico correspondiente:

Con los parámetros de entrada descritos en la Tabla 3, el programa Caos generó una serie de gráficas. Las Figuras 6, 7, 8, 9 y 10, muestran las sucesivas duplicaciones de periodo que exhibe el sistema ante la variación de la frecuencia de excita-



**Tabla 3.** Parámetros empleados para el programa Caos. Datos utilizados en la construcción del modelo mecánico con condiciones iniciales (0,1)<sup>1</sup>

Masa (kg)	Longitud de la lámina (m)	Constante de amortiguamiento (kgm <sup>2</sup> /s)	Constante de elasticidad (kgm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	Gravedad (m/s <sup>2</sup> )
0,160	0,293	$7,7729 \times 10^{-4}$	0,4582	9,78
Fuerza de excitación (N)	Distancia (m)	Frecuencia Inicial (Hz)	Frecuencia Final (Hz)	Paso de la frecuencia
0,4	0,039	0,1	0,25	0,005
Tiempo inicial (Parámetro fijo)	Tiempo final (s)	Paso del tiempo (Parámetro fijo)	Velocidad Inicial (m/s)	Desplazamiento Inicial (rad)
0	500	0,05	0	1

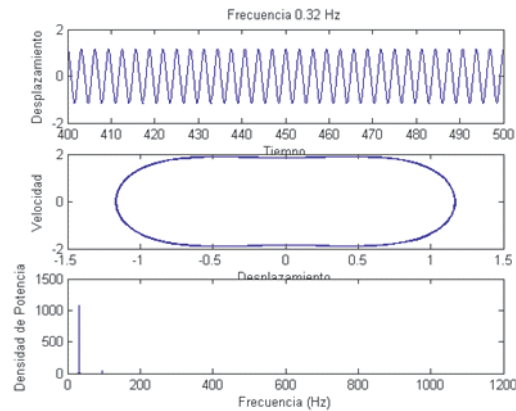
ción. En estas gráficas sólo se observa la respuesta estacionaria del sistema puesto que la respuesta transitoria de la misma ha sido suprimida.

Como se observa en la Figura 6, el sistema se comporta de forma periódica ante la aplicación de una fuerza de excitación de 0,4 N a una frecuencia de 0,32 Hz. El periodo de oscilación es de 3,125 segundos. La gráfica de desplazamiento versus tiempo muestra una onda senoidal periódica de amplitud y periodo constante. La respuesta en el espacio de fase (gráfica de desplazamiento versus velocidad) se muestra un atractor de un solo ciclo lo cual corresponde a un movimiento periódico de amplitud constante. Asimismo, la gráfica del espectro de potencia de la señal presenta un solo contenido de frecuencia lo cual es característico de un movimiento armónico simple.

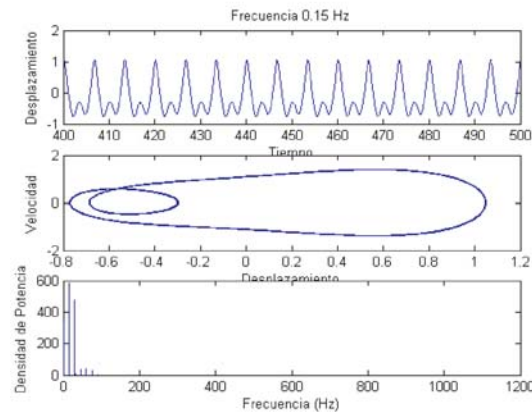
En la Figura 7 se muestra la duplicación de período de la señal. Las respuestas del sistema en el dominio del tiempo y espacio de fase presentan una señal con doble ciclo que indican que la señal original ha duplicado su periodo de oscilación de 3,125 segundos (Figura 6) a 6,25 segundos (Figura 7). El espectro de potencia lo constituye una cantidad finita y discreta de líneas espectrales que representan el contenido de frecuencia de la señal.

En la Figura 8 se observa la respuesta del sistema en el dominio del tiempo, espacio de fase y dominio de frecuencia la cual muestra la solución gráfica de la ecuación generalizada de Duffing bajo las condiciones señaladas en la Tabla 3 y con una fuerza de excitación cuya frecuencia es de 0,195 Hz. El periodo de oscilación de este sistema es de 12,5 segundos, lo cual representa cuatro veces el periodo de oscilación de la Figura 6.

<sup>1</sup> El programa Matlab utiliza dos condiciones iniciales para resolver la ecuación generalizada de Duffing de Segundo orden. Estas condiciones se introducen en el programa Caos en el siguiente orden: (Velocidad inicial, Desplazamiento inicial).



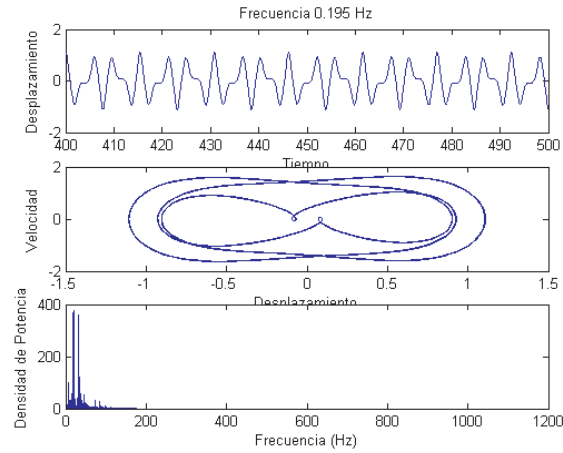
**Figura 6.** Respuesta de la ecuación generalizada de Duffing: a) dominio del tiempo, b) espacio de fase y c) dominio de frecuencia para una frecuencia de excitación de 0,32 Hz



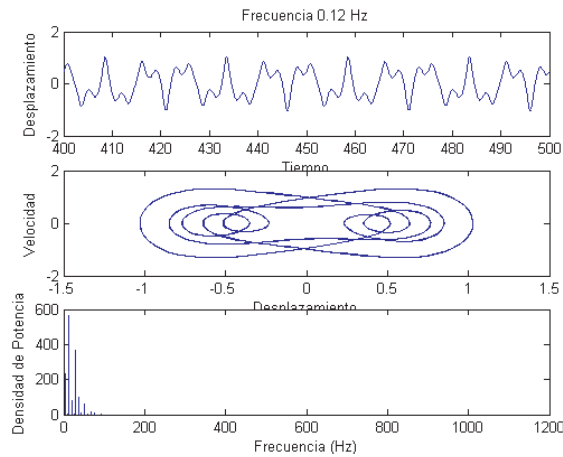
**Figura 7.** Respuesta de la ecuación generalizada de Duffing: a) dominio del tiempo, b) espacio de fase y c) dominio de frecuencia para una frecuencia de excitación de 0,15 Hz

Como se observa en la Figura 9, el sistema oscila con un periodo 25 segundos, lo cual indica que ha multiplicado su periodo ocho veces respecto al original (3,125 segundos). Esto se puede observar por medio de los múltiples ciclos presentes en el atractor del espacio de fase así como en el espectro de potencia de la señal que muestra ocho principales contenidos de frecuencia.

Finalmente el sistema responde ante las variaciones de la frecuencia de excitación y llega a comportarse de manera caótica cuando la fuerza es aplicada a una fre-

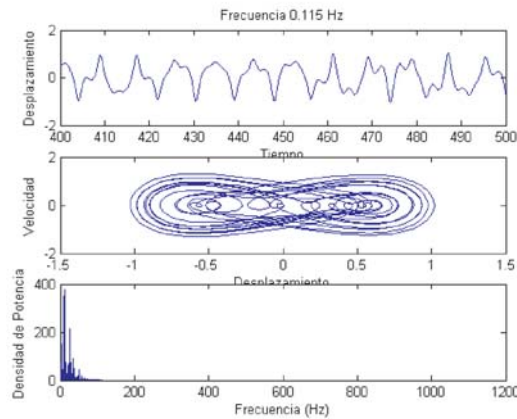


**Figura 8.** Respuesta de la ecuación generalizada de Duffing: a) dominio del tiempo, b) espacio de fase y c) dominio de frecuencia para una frecuencia de excitación de 0,195 Hz



**Figura 9.** Respuesta de la ecuación generalizada de Duffing: a) dominio del tiempo, b) espacio de fase y c) dominio de frecuencia para una frecuencia de excitación de 0,12 Hz

cuencia de 0,115 Hz como lo señala la Figura 10. En la gráfica de desplazamiento versus tiempo, se observa una señal que no presenta periodo de oscilación puesto que no muestra ningún patrón que se repita a lo largo del tiempo. La respuesta en el espacio de fase constituye un atractor extraño, el cual es característico de los sistemas en caos. Igualmente, el espectro de potencia de la señal representa un conjunto continuo de líneas espectrales de frecuencia típicas en los sistemas caóticos.



**Figura 10.** Respuesta de la ecuación generalizada de Duffing: a) dominio del tiempo, b) espacio de fase y c) dominio de frecuencia para una frecuencia de excitación de 0,115 Hz.

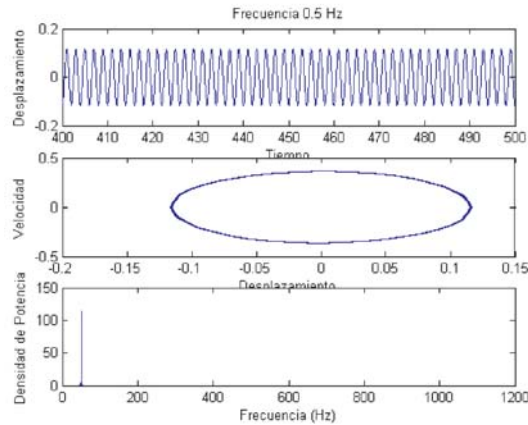
**Ecuación generalizada de Duffing con fuerza de excitación de 0,4 N y condiciones iniciales (Velocidad: 0, Desplazamiento: 0)**

Respecto a los datos presentados en la Tabla 4, el siguiente estudio se hará variando las condiciones iniciales del sistema. Puesto que los sistemas caóticos se caracterizan por ser sensibles ante pequeñas variaciones en las condiciones iniciales, se mostrará la solución de la ecuación generalizada de Duffing cuando tanto la velocidad inicial como el desplazamiento inicial son cero, tal como se indica en la Tabla 4.

**Tabla 4.** Parámetros empleados para el programa Caos. Datos utilizados en la construcción del modelo mecánico con condiciones iniciales (0,0)

Masa (kg)	Longitud de la lámina (m)	Constante de amortiguamiento (kgm <sup>2</sup> /s)	Constante de elasticidad (kgm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	Gravedad (m/s <sup>2</sup> )
0,160	0,293	7,7729x10 <sup>-4</sup>	0,4582	9,78
Fuerza de excitación (N)	Distancia (m)	Frecuencia Inicial (Hz)	Frecuencia Final (Hz)	Paso de la frecuencia
0,4	0,039	0,1	1	0,01
Tiempo inicial (s) (Parámetro fijo)	Tiempo final (s)	Paso del tiempo (Parámetro fijo)	Velocidad Inicial (m/s)	Desplazamiento Inicial (rad)
0	500	0,05	0	0

La Figura 11 es un modelo de un sistema periódico con periodo de oscilación de 2 segundos. El atractor mostrado en la gráfica del espacio de fase es un ciclo y el espectro de potencia de la señal indica que el sistema responde a una sola frecuencia.

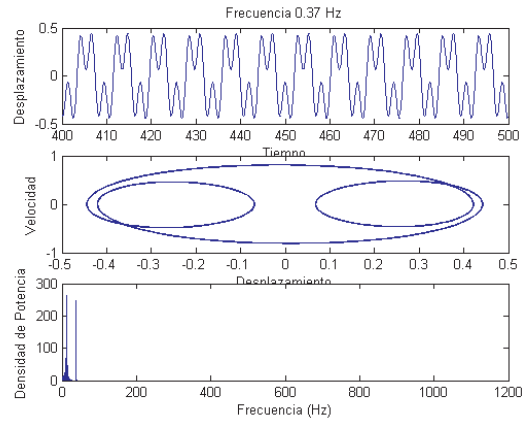


**Figura 11.** Respuesta de la ecuación generalizada de Duffing: a) dominio del tiempo, b) espacio de fase y c) dominio de frecuencia para una frecuencia de excitación de 0,5 Hz.

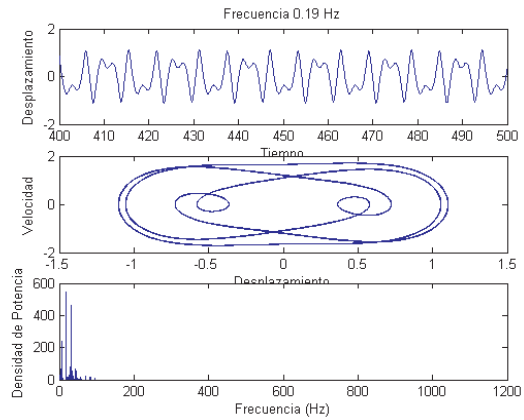
La solución de la ecuación de Duffing representada por la Figura 12 muestra como el sistema duplica cuatro veces su periodo de oscilación hasta 8 segundos. En la gráfica correspondiente a la respuesta en el espacio de fase se observa que el sistema oscila alrededor de sus tres puntos de equilibrio, mientras que el espectro de potencia de la señal presenta cuatro líneas diferentes contenidos de frecuencia.

Con las condiciones descritas en la Tabla 4 y con una frecuencia de excitación de 0,19 Hz, se observa en la Figura 13 que el sistema oscila con un periodo de 16 segundos, siendo este valor ocho veces mayor que el periodo de 2 segundos señalado en la Figura 14. Del mismo modo, la gráfica en el dominio de frecuencia ilustra como el sistema incrementa a ocho las líneas asociadas al contenido de frecuencia de la señal.

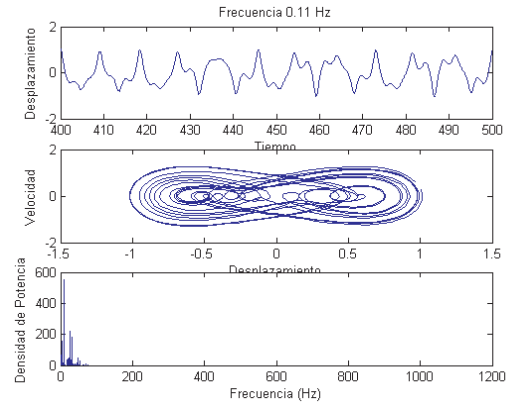
El sistema caótico correspondiente a la fuerza de 0,4 N aplicada a una frecuencia de 0,11 Hz es ilustrado en la Figura 14. Este sistema es caracterizado por su respuesta en el dominio del tiempo, la cual no presenta periodo de oscilación; así como el atractor extraño representado en el espacio de fase y el espectro de potencia que muestra el amplio contenido espectral de la señal.



**Figura 12.** Respuesta de la ecuación generalizada de Duffing en el a) dominio del tiempo, b) espacio de fase y c) dominio de frecuencia para una frecuencia de excitación de 0,37 Hz.



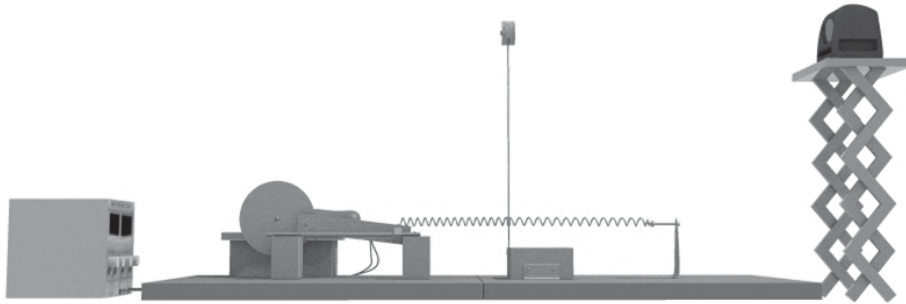
**Figura 13.** Respuesta de la ecuación generalizada de Duffing en el a) dominio del tiempo, b) espacio de fase y c) dominio de frecuencia para una frecuencia de excitación de 0,19 Hz.



**Figura 14.** Respuesta de la ecuación generalizada de Duffing: a) dominio del tiempo, b) espacio de fase y c) dominio de frecuencia para una frecuencia de excitación de 0,11 Hz

### Discusión de los resultados

En la presente investigación, la solución de la ecuación generalizada de Duffing es validada a partir de un modelo físico que consiste en un péndulo invertido con una masa en su tope superior como el mostrado en la Figura 15.



**Figura 15.** Representación del modelo físico empleado para representar el péndulo de Duffing.

Por medio del sensor de movimiento ilustrado en la Figura 15, se registró el movimiento del sistema físico y por medio de una interfaz y un software interactivo (Data Studio, PASCO) se elaboraron las correspondientes gráficas donde se presenta la respuesta del sistema en el dominio del tiempo. La Tabla 5 muestra los parámetros empleados en el modelo físico.

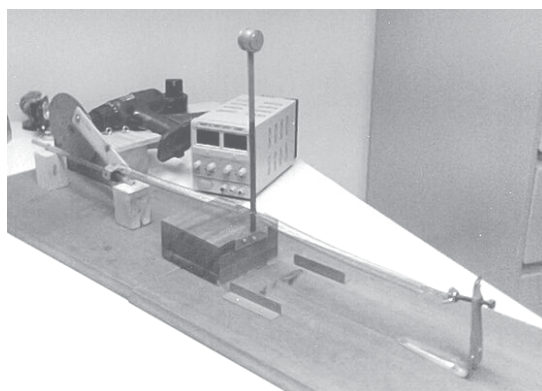
**Tabla 5.** Parámetros empleados para el modelo mecánico

Masa (kg)	Longitud de la lámina (m)	Constante de amortiguamiento ( $\text{kgm}^2/\text{s}$ )	Constante de elasticidad ( $\text{kgm}^2/\text{s}^2$ )	Fuerza de excitación (N)
0,160	0,293	$7,7729 \times 10^{-4}$	0,4582	0,4
Distancia (m)	Frecuencia de excitación (Hz)	Frecuencia de muestreo (Hz)	Velocidad Inicial (m/s)	Desplazamiento Inicial (m)
0,39	0,039	120	0	0

### Comparación del modelo matemático con el correspondiente modelo físico

Las gráficas obtenidas del sistema físico son comparadas con las generadas a partir de la solución del programa Chaos empleando Matlab con la finalidad de comprobar la correspondencia entre ambos modelos. Puesto que las amplitudes en ambos modelos están expresadas en diferentes dimensiones (radianes en el modelo teórico y metros en el modelo físico), la comparación de ambas soluciones será a partir de sus periodos de oscilación para aquellas gráficas que describan un movimiento periódico.

En la Fotografía 1 se muestra la imagen del modelo físico real empleado para representar el oscilador generalizado de Duffing.

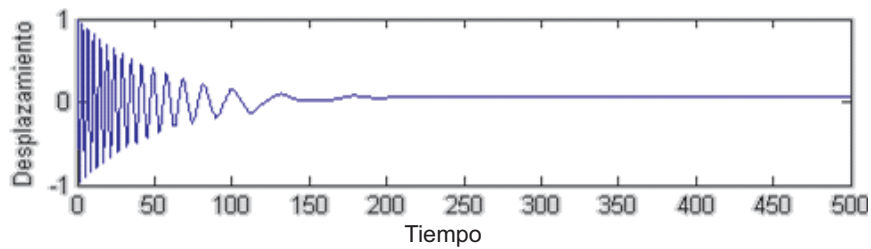


**Fotografía 1.** Imagen del modelo físico empleado para representar el péndulo de Duffing.

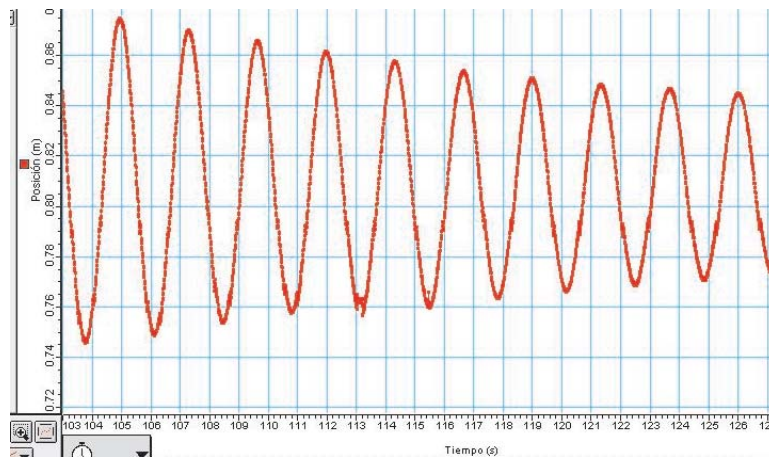


La primera validación consiste en comparar la respuesta del sistema libre amortiguado teórico con el correspondiente modelo físico. Los datos empleados en ambos sistemas se describen en la Tabla 5.

Las Figuras 16 y 17 presentan la respuesta del sistema en gráficos de posición – tiempo para los modelos matemáticos y físicos respectivamente. En ambas gráficas se puede observar que el sistema amortigua la vibración en aproximadamente 150 segundos. El periodo de oscilación de ambas señales es de 2 segundos.



**Figura 16.** Respuesta en el dominio del tiempo del sistema libre amortiguado empleando el programa Caos

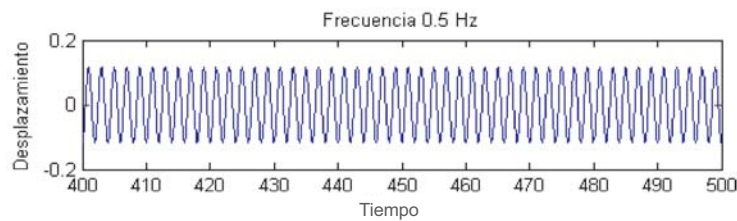


**Figura 17.** Respuesta en el dominio del tiempo a partir de los datos experimentales del oscilador libre amortiguado

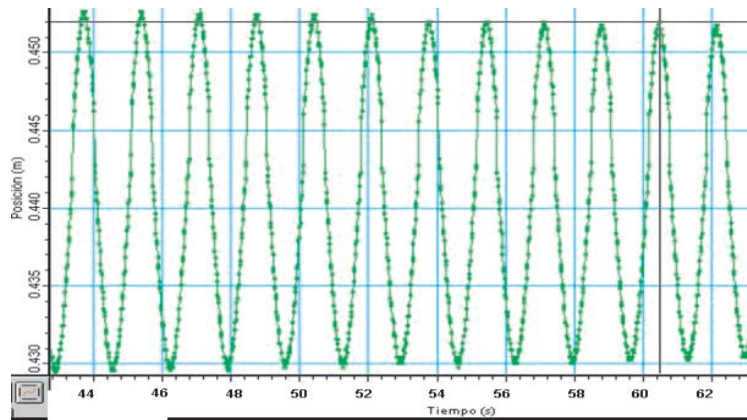
A continuación se muestra la comparación entre las gráficas empleando Matlab con los datos descritos en la Tabla 8 correspondiente a la ecuación de Duffing generalizada y las gráficas en el dominio del tiempo obtenidas del registro de datos experimentales del modelo físico empleando los parámetros de la Tabla 5.

A partir de los datos indicados en la Tabla 4 y ajustando el voltaje de entrada del mecanismo en el modelo físico, se obtiene una frecuencia de excitación de 0,5 Hz. La Figura 19 muestra el movimiento del péndulo registrado por el sensor de movimiento a través de su respuesta en el dominio del tiempo.

El periodo de oscilación de la Figura 18 es de 2 segundos. Sin embargo, la correspondiente solución empleado el modelo físico en la Figura 19 muestra un periodo de aproximadamente 1,6 segundos, lo cual representa una diferencia de 0,4 segundos.



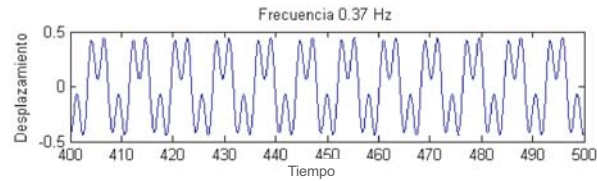
**Figura 18.** Respuesta en el dominio del tiempo de la ecuación generalizada de Duffing empleando el programa Caos. Frecuencia de excitación: 0,5 Hz



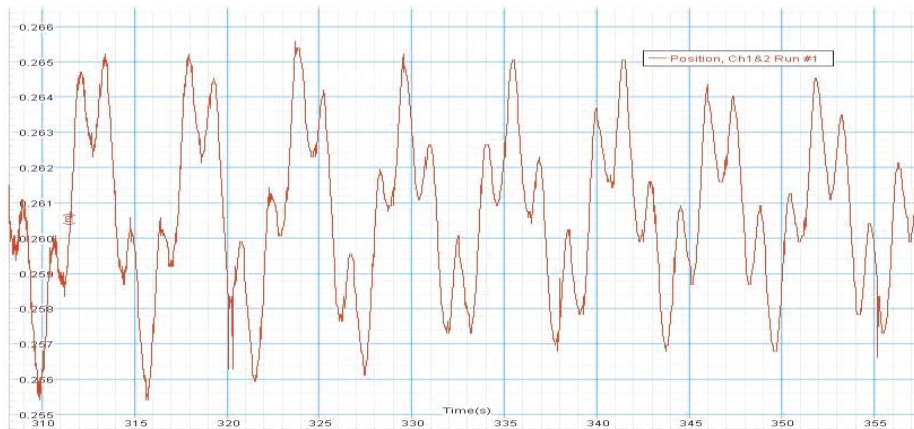
**Figura 19.** Respuesta en el dominio del tiempo a partir de datos experimentales del modelo físico. Frecuencia de excitación: 0,5 Hz

Al variar la frecuencia de excitación hasta 0,37, se observa en la Figura 20 que el sistema oscila con un periodo de 8 segundos, es decir, un periodo cuatro veces mayor al obtenido cuando la frecuencia de excitación era de 0,5 Hz.

La respuesta en el dominio del tiempo del sistema físico de la Figura 21 oscila con un periodo de 6,3 segundos lo cual representa aproximadamente cuatro veces el periodo inicial descrito por la Figura 19. Al comparar el periodo de oscilación del modelo matemático (8 segundos) con el periodo del modelo físico (6,3 segundos) se observa una diferencia de 1,7 segundos.

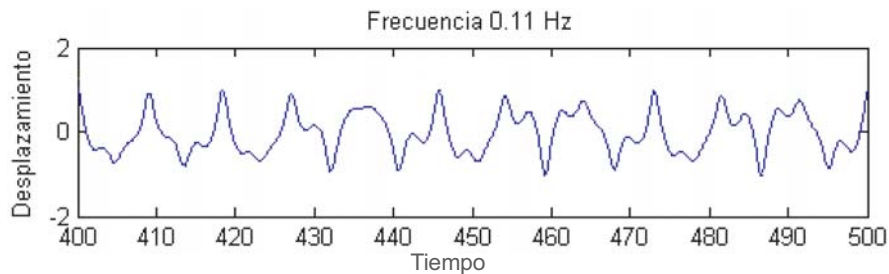


**Figura 20.** Respuesta en el dominio del tiempo de la ecuación generalizada de Duffing empleando el programa Chaos. Frecuencia de excitación: 0,37 Hz.



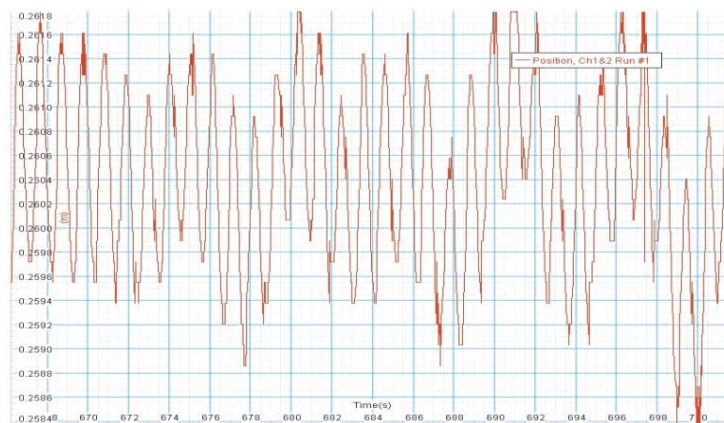
**Figura 21.** Respuesta en el dominio del tiempo a partir de datos experimentales del modelo físico. Frecuencia de excitación: 0,37 Hz.

La Figura 21 representa el comportamiento caótico del sistema cuando la frecuencia de excitación en la ecuación generalizada de Duffing es de 0,11 Hz. En la gráfica desplazamiento-tiempo de la Figura 22 no se observa ningún patrón de movimiento, es decir, que el sistema no tiene periodo de oscilación.



**Figura 22.** Respuesta en el dominio del tiempo de la ecuación generalizada de Duffing empleando el programa Chaos. Frecuencia de excitación: 0,11 Hz

Cuando el sistema físico se hace oscilar con una fuerza de excitación de 0,11 Hz, este se comporta de manera caótica como lo indica la Figura 23. Puesto que los sistemas en caos no muestran periodo de oscilación, la comparación con el correspondiente modelo matemático se hace de forma cualitativa. Ambos sistemas exhiben un movimiento caótico ante la misma frecuencia de excitación; sin embargo, el comportamiento descrito por las gráficas de desplazamiento versus tiempo de ambos sistemas, difiere significativamente en cuanto al historial de movimiento que ellos describen cuando su frecuencia de excitación es de 0,11 Hz.



**Figura 23.** Respuesta en el dominio del tiempo a partir de datos experimentales del modelo físico. Frecuencia de excitación: 0,11 Hz.

## Conclusiones

El modelado de sistemas físicos reales a partir de modelos matemáticos representa una herramienta de gran aplicabilidad puesto que permite la observación de un sinnúmero de situaciones que desde el punto de vista práctico puede resultar en una significativa inversión de recursos, así como otras dificultades técnicas. Es por ello que la simulación con modelos matemáticos se ha convertido en la principal alternativa de los científicos e ingenieros en el campo de la investigación y el diseño. No obstante, para que estos modelos teóricos resulten útiles, deben describir de manera aceptable el modelo físico que se pretende representar.

A partir del análisis de los resultados obtenidos en la simulación de un oscilador de Duffing al cual se le ha variado se frecuencia de excitación, es posible obtener las siguientes conclusiones:

- El programa Caos empleado para simular de manera teórica el comportamiento de un oscilador generalizado de Duffing para diversas frecuencias de excitación muestra correspondencia con el comportamiento del sistema mecánico

libre amortiguado, tanto en la respuesta del sistema teórico como del físico real el periodo de oscilación fue de 2 segundos.

- No todos los sistemas descritos a partir de una ecuación diferencial no lineal se comportan de manera caótica. Algunos de estos sistemas son susceptibles en mayor o menor medida a comportarse como un sistema en caos si se logra una adecuada combinación de parámetros y en determinadas condiciones iniciales.
- El comportamiento de un sistema descrito por una ecuación diferencial representa un modelo determinístico. Este tipo de sistemas pueden ser estudiados a través de su respuesta en el espacio de fase, dominio en el tiempo y dominio de frecuencia. Estas gráficas permiten obtener criterios y valores tanto cualitativos como cuantitativos que sirven de base para caracterizar y comparar los sistemas.
- En la presente investigación, el criterio empleado para llegar al caos fue la duplicación de periodos. Esta duplicación sólo fue obtenida por medio de reducciones sucesivas de la frecuencia de excitación del sistema. En el modelo matemático, las duplicaciones se obtienen de forma empírica al fijar ciertos parámetros en la ecuación generalizada de Duffing y reducir la frecuencia de excitación en un determinado rango de valores.
- El modelo matemático ofrece la ventaja de lograr un mayor rango de variación de los parámetros en la ecuación diferencial. Sin embargo, la obtención del caos a nivel teórico puede no resultar posible de alcanzar en la práctica debido a la imposibilidad de reproducir dichos parámetros. Tal es el caso de la frecuencia de excitación, la cual, desde el punto de vista mecánico sólo se logró generar un rango de variación entre 0,1 y 1,5 Hz. Esta situación trae como consecuencia un menor intervalo de estudio en la práctica puesto, que el comportamiento caótico fue obtenido a frecuencias relativamente bajas (valores cercanos a 0,1 Hz).
- Debido a la sensibilidad de los sistemas no lineales a pequeñas variaciones en sus condiciones iniciales, en la práctica resulta difícil la reproducción (con un alto grado de precisión) de los parámetros físicos sin que estas variaciones alteren el comportamiento del sistema.
- Se demostró que la duplicación de periodos hasta llegar al caos se alcanza tanto en el modelo matemático como en el físico. Tal como se observa en las Figuras 18 a la 23, ambos sistemas responden por medio de una duplicación de periodos ante la misma variación en la frecuencia de excitación.
- La no correspondencia de los periodos de oscilación entre el modelo matemático y el físico real se debe principalmente a los siguientes factores:
- La determinación del valor de la constante de elasticidad ( $k$ ) se basó en la suposición de que la lámina de acero deflejaría describiendo un arco circular (Figura 4) aun cuando en la práctica esto no sucede así exactamente. Igual-

mente, la consideración de que el torque ( $\tau_0$ ) es proporcional al ángulo  $\theta$  (ecuación 5) es sólo válida para oscilaciones con amplitudes pequeñas.

- En el modelo teórico, sólo se considera la masa ubicada en el tope de la lámina y no la masa de la propia lámina, ya que esta última es despreciable en comparación con la ubicada en la parte superior.
- Los datos experimentales fueron obtenidos a partir de un sensor de movimiento diseñado para registrar movimientos de traslación rectilíneos como el de un sistema masa – resorte. En esta investigación, el objeto a censar es la masa ubicada en el tope de la lámina. Para oscilaciones pequeñas, esta masa describe una trayectoria aproximadamente recta, sin embargo, para rangos de oscilador mayor, la trayectoria se asemeja a un arco circular y el sensor no registra el movimiento en cuestión.

## Referencias bibliográficas

- Balachandran, Balakumar; Nayfeh, Ali (2004). **Applied nonlinear dynamics**. República Federal de Alemania: Editorial: Wiley -Vch. Interscience. p.p (663)
- Dúchense B, Fischer W., Gray G. y Jeffrey R. (1991). Chaos in the motion of an inverted pendulum: An undergraduate laboratory experiment. **American Association of Physics Teachers**. Vol 59, N° 11. Noviembre de 1991 (pp. 987-992).
- Giancoli, Douglas (2008). **Physics: Principles with Applications with Masteringphysics(r)**. Nueva York-USA: Editorial ADDISON WESLEY Publishing Company. Sexta Edición. (pp. 1040)
- Briggs, J. y Peat, D. (1994). **Espejo y Reflejo: Del caos al orden**. Barcelona – España: Editorial: Gedisa. Volumen 10. Segunda edición. (pp. 228)
- Sánchez, D. y González, R. (2011). **Cálculo de elementos estructurales**. Barcelona – España. Editorial La Factoría. Primera edición. (pp. 14-73)
- Asfar K. y Masoud K. (2002). Damping of parametrically excited single-degree-of-freedom systems. Mechanical Engineering Department, Jordan University of Science and Technology, Revista Electrónica. Consultada el 5 de mayo de 2012.