EL USO DE MANIPULABLES PARA PROPICIAR LA COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO DE ECUACIONES LINEALES EN LA ESCUELA SECUNDARIA

The use of manipulatives to facilitate understanding of the meaning of linear equations in high school

EPISTEMUS
ISSN: 2007-8196 (electrónico)
ISSN: 2007-4530 (impresa)

Paola Tonanzy García Mendívil [1]
José Luis Díaz Gómez [2]
Jorge Ruperto Vargas Castro [3]

Recibido: 14 de marzo de 2016,
Aceptado: 30 de mayo de 2016

Autor de Correspondencia:
M. C. Paola Tonanzy García Mendívil
Correo: paola@mat.uson.mx

Resumen

En el presente artículo se muestra una propuesta de enseñanza donde se utiliza la balanza como un recurso didáctico para el aprendizaje de las ecuaciones lineales. El objetivo del estudio fue el de propiciar la comprensión del concepto de ecuación lineal con una incógnita y de ecuación lineal con dos variables con estudiantes de primer grado de secundaria, mediante el uso de manipulables. Este estudio considera como referente teórico el enfoque cognitivo basado en los registros de representación semiótica de Raymond Duval y las actividades diseñadas promueven la articulación de los registros de representación verbal, tabular, gráfico y algebraico. La metodología de trabajo fue el estudio de casos; por la naturaleza del trabajo los casos a estudiar fueron parejas de estudiantes. Con el uso de la balanza como instrumento de enlace se logró la conversión directa y recíproca entre los registros de representación algebraico y gráfico. Con base al análisis de resultados se encontró que la balanza constituyó un valioso recurso para lograr incidir positivamente en el aprendizaje de la noción de ecuación lineal con una incógnita y de dos variables.

Palabras clave: Ecuaciones lineales, balanza concreta, registros de representación semiótica.

Abstract

A proposal of teaching where the balance is used as an educational resource for learning the linear equations is shown in this article. The aim of the study was to promote understanding of the concept of linear equation with one unknown and linear equation with two variables with first grade students of secondary, using manipulatives. This study considers the cognitive approach based on the records of semiotic representation of Raymond Duval and the designed activities promote the articulation of the records of verbal, tabular, graphic and algebraic representation. The working methodology was the case study; by the nature of work cases studied were pairs of students. With the use of the balance as an instrument of link was achieved the direct conversion and reciprocal between the algebraic and graphical representation records. Based on the analysis results it found that the balance was a valuable resource to achieve a positive impact on learning of the notion of linear equation with one unknown and two variables.

Keywords: *Linear equations, concrete balance, semiotics representation records*

1 Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora / Correo: paola@mat.uson.mx
2 Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora / Correo: jdiaz@gauss.mat.uson.mx
3 Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora / Correo: rvargas@gauss.mat.uson.mx

INTRODUCCIÓN

En el campo de la Matemática Educativa los errores y dificultades aparecen permanentemente en las producciones de los estudiantes, el interés por conocer con profundidad el pensamiento de los estudiantes ha llevado a diversos investigadores a realizar numerosos estudios, entre los cuales podemos mencionar a Herscovics y Linchevski [1], Kieran y Filloy [2], Pérez [3], Rojano [4], Vlassis [5], entre otros y cuyos resultados ponen de manifiesto la problemática existente tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de los contenidos matemáticos. El reconocimiento de esta problemática nos ha conducido a elaborar una propuesta de enseñanza, en donde se pretende propiciar el aprendizaje de ecuaciones lineales, mediante la utilización de un recurso didáctico, particularmente se hace uso de una balanza concreta.

Se considera que los manipulables proveen un carácter exploratorio propiciando la comunicación, discusión y reflexión de los estudiantes en la resolución de problemas [6]; crean un ambiente en donde se facilita la construcción del conocimiento sin mecanizaciones, haciendo énfasis en que las ecuaciones al igual que la balanza, tienen que conservar el equilibrio o la igualdad para encontrar la solución. Cabe señalar que esta propuesta está dirigida a estudiantes de la escuela secundaria, resaltando el papel activo que debe asumir el estudiante en la construcción de su aprendizaje. En la figura 1 se puede observar una de las balanzas concretas que se utilizaron para la realización de este trabajo

Figura 1. Balanza concreta.

Para la elaboración de esta propuesta se consideró pertinente utilizar algunos elementos de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica, desarrollada por Raymond Duval [7]. Con esta teoría se busca fortalecer el aprendizaje de ecuaciones lineales a través de la interacción de los estudiantes con la balanza concreta. Las actividades didácticas están orientadas al manejo y la articulación de al menos dos registros de representación. Como lo cita Duval: "La comprensión (integradora) de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión" [7].

MARCO DE REFERENCIA

La educación básica en México, actualmente está integrada por los niveles de educación preescolar, primaria y secundaria. En México ha existido una serie de reformas en dicho niveles educativos a lo largo de los años, con el propósito de no quedar rezagado del movimiento de cambios curriculares que se están dando en el resto de las naciones, en donde se puede concebir a un individuo con un conocimiento flexible, con responsabilidad social y acorde con las decisiones que le toque asumir en el ámbito donde se desenvuelve. La última de las reformas es la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB, 2006), que viene a sustituir a la reforma curricular de 1993.

En correspondencia con las tendencias registradas a nivel mundial, el nuevo currículum de la educación básica en México se ha planteado bajo un enfoque de educación por competencias; con la intención de hacer más competente a los estudiantes no sólo en el conocimiento, sino en el desarrollo de sus habilidades, destrezas, actitudes, valores y creatividad, pues ya no es suficiente obtener sólo conocimientos, sino movilizarlos y así poder potenciar al máximo el aprendizaje a lo largo de toda su vida. Movilizar los conocimientos es aplicar lo aprendido, es decir, aplicar los conocimientos en el momento adecuado y en una situación específica. Que el estudiante no se conforme sólo con saber, sino que utilice todo lo que sabe y desarrolle competencias útiles que le permitan vivir mejor.

En el presente trabajo se revisaron los planes y programas de estudio 2011 de secundaria [8], indicados por la Secretaría de Educación Pública, en el marco de la Reforma Integral de Educación Básica (RIEB), con el fin de tomar las decisiones adecuadas para la construcción de nuestro diseño de actividades.

PROBLEMÁTICA

Iniciaremos señalando como lo menciona Esquinas [9] que: "a lo largo de la historia la diversidad de problemas con los que la humanidad se ha ido enfrentando han sido la causa de la evolución del álgebra. La duración de su desarrollo histórico es una prueba más de la complejidad y dificultad que esconde el álgebra".

Por otro lado Segura [10] menciona que en la enseñanza tradicional, son numerosos los errores en que incurren los estudiantes. Por ejemplo, presentan dificultades para usar las operaciones aritméticas más elementales en problemas verbales que involucran ecuaciones; hasta cuando saben aplicar perfectamente los algoritmos de resolución, tales errores vuelven a surgir en la introducción a la escritura literal para valores numéricos y en los comienzos del álgebra, sobre todo en igualdades y desigualdades.

Las ecuaciones lineales y los sistemas de ecuaciones lineales se estudian en primero y segundo año de secundaria en México. En primer año se espera que los estudiantes resuelvan problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado [9]. Las ecuaciones cuadráticas aparecen en tercer año, continúa en los años siguientes de enseñanza media y llegan hasta la enseñanza superior. Por eso es importante que el estudiante domine el tema de las ecuaciones lineales porque formarán parte imprescindible de otros contenidos matemáticos a lo largo de su formación académica.

La preocupación surge cuando constatamos el hecho de que muchos estudiantes de secundaria y bachillerato manifiestan serias deficiencias en torno a las ecuaciones lineales, y los artículos de investigación reportan serios problemas en el aprendizaje de este tópico [10]. También porque en nuestra experiencia docente hemos observado que un porcentaje significativo de estudiantes de nivel superior también experimentan dificultades para resolver ecuaciones lineales.

Por otro lado también se reporta que los estudiantes tienen problemas en la articulación entre registros de representación [13] [14]. De acuerdo con Duval [7], un estudiante que aprende el tema de ecuaciones tiene que tener claro que existen varias representaciones para un mismo objeto, para una misma ecuación. La aprehensión de un objeto matemático demanda entonces que éste sea identificado en sus diversas formas de representación. Además, para conocer, para entender el objeto, es necesario manipularlo, hacer manipulaciones de éste dentro de un sistema o registro de representación R. Por tanto, para enseñar las ecuaciones lineales es fundamental abordar el campo de los registros de representación.

JUSTIFICACIÓN

Investigar en el campo del Álgebra es importante ya que es una rama de la matemática que se aborda en la mayor parte de la formación académica, además existen investigaciones que han señalado las dificultades que tienen los estudiantes al tratar dichos temas. Particularmente en el concepto de ecuación se han llevado a cabo un gran número de estudios, entre los cuales se encuentran los siguientes:

Kieran y Filloy [2] mencionan la idea extendida entre los estudiantes que comienzan con el álgebra de que el signo igual es la "señal de hacer algo" antes que un símbolo de la equivalencia entre los lados izquierdo y derecho de una ecuación, se manifiesta por su renuencia inicial a aceptar proposiciones tales como $4+3 = 6+1$. El pensar que el lado derecho debería indicar el resultado - esto es, $4+3 = 7$ les permite dotar de significado a ecuaciones tales como $2x+3 = 7$, pero no a ecuaciones tales como $2x+3 = x+4$. El que los estudiantes conciban el signo igual como un mero separador entre la secuencia de operaciones y el resultado les lleva a violar las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad.

Rojano [4] por su parte, hace referencia a un estudio con estudiantes de secundaria, en el que se utilizó un modelo virtual de la balanza para la enseñanza de la resolución de ecuaciones de primer grado. La autora señala que el modelo virtual es dinámico e interactivo y en su versión ampliada (balanza con poleas) incluye la representación y resolución de ecuaciones con sustracción de términos. El principal propósito del estudio consistió en investigar en qué medida, el trabajo con la versión dinámica de la balanza ayuda a estudiantes de entre 12 y 14 años de edad a abstraer las acciones realizadas en la balanza al nivel de la sintaxis algebraica asociada a la resolución de ecuaciones lineales. Además, investigó si los sujetos eran capaces de generalizar el método de "hacer lo mismo de ambos lados de la igualdad" a modalidades de ecuaciones cada vez más complejas, incluidas aquéllas que contenían sustracción de términos con coeficientes positivos.

Vlassis [5] realizó un estudio para resolver ecuaciones lineales con una incógnita en estudiantes de una comunidad de habla francesa de Bélgica en donde el uso del modelo de la balanza los ayudó a aprender el método formal de aplicar la misma operación a los dos miembros de la ecuación. Las situaciones de aprendizaje que fueron objeto del estudio empírico, involucraron a cuarenta estudiantes en dos clases de octavo grado. El objetivo era enseñar el método de solución formal, que implicó la realización de las mismas operaciones en ambos lados de la ecuación utilizando, en particular, el modelo de equilibrio.

Vergnaud también nos menciona que el álgebra exige más a menudo que se manipulen incógnitas, lo que es no intuitivo ya que los estudiantes rechazan razonar y operar sobre incógnitas o sobre números desconocidos. Este autor plantea que el equilibrio de la balanza permite dar sentido a la vez a las propiedades de simetría y transitividad de la relación de la igualdad y a las manipulaciones algebraicas que permiten resolver las ecuaciones con valores positivos.

La falta de modelos que aporten significado a los símbolos algebraicos, es uno de los impedimentos más serios que obstaculiza los procesos de enseñanza y aprendizaje en la resolución de ecuaciones lineales. El álgebra se reduce a la manipulación de símbolos de acuerdo con reglas establecidas. Es decir, el álgebra escolar, es hoy en día, rica en sintaxis, pero pobre en significados [12].

Nuestra propuesta considera que la inclusión de un modelo como la balanza, puede dotar de significado a los símbolos, facilitando los procesos de desarrollo de aprendizaje y resolución de las ecuaciones lineales.

Figura 2. Estudiantes trabajando con la balanza.

OBJETIVOS

El objetivo del trabajo es la de propiciar la comprensión del concepto de ecuación lineal con una incógnita y de ecuación lineal con dos variables en estudiantes de primer grado de secundaria, mediante el uso de manipulables, en este caso la balanza concreta.

Y mencionamos algunos de los objetivos específicos:

1. Propiciar la comprensión del concepto y significado de solución de ecuación lineal con una incógnita.

2. Propiciar la comprensión del concepto y significado de ecuación lineal con dos variables.

3. Comprender la diferencia entre incógnita y variable.

REFERENTE TEÓRICO

El referente teórico en el que se enmarca la elaboración de este trabajo es la Teoría de los Registros de Representación Semiótica desarrollada por Raymond Duval en 1998, en la que señala que cuando hacemos matemáticas siempre utilizamos algún tipo de representación, debido a que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción o a través de una experiencia intuitiva inmediata; por lo tanto en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es inevitable emplear diversas representaciones.

El enfoque teórico de Duval señala que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

1. La formación de una representación identificable dentro de un registro dado. Por ejemplo, el enunciado de una frase, la elaboración de un dibujo o esquema, de una gráfica, la escritura de una expresión algebraica, etcétera.

2. El tratamiento de una representación, que es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna de un registro. Por ejemplo, la transformación equivalente de una expresión algebraica.

3. La conversión de una representación que es la transformación en una representación dentro de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial. Por ejemplo, la transformación de una expresión algebraica en una gráfica, o viceversa [7].

Las actividades didácticas diseñadas bajo este marco teórico promueven la articulación de los registros de representación: verbal, tabular, gráfico y algebraico y también un tratamiento adecuado en cada registro de representación, haciendo uso como recurso didáctico la balanza concreta; buscando que sea posible que los estudiantes, puedan construir el significado del concepto matemático ecuación lineal.

METODOLOGÍA

Las balanzas son construcciones físicas elaboradas de placas de acrílico con un espesor de 5 milímetros. Las piezas son recortadas utilizando un plotter láser.

La versión elegida consiste en una balanza de platillos, articulada en forma de paralelogramo, con sus elementos laterales siempre verticales y los elementos horizontales diseñados de tal manera, que cuando en los platillos se tenga el mismo peso, éstos deberán estar a la misma altura.

Este tipo de balanza, ofrece la posibilidad de manipular los objetos directamente en la balanza, lo que lleva a los estudiantes a interactuar con los elementos presentes en el aparato. Cabe señalar que por el diseño del modelo de la balanza se limita sólo a soluciones positivas y únicas.

Las correspondencias entre los elementos de la ecuación y los de la balanza son las siguientes:

Una ecuación se representa mediante una balanza en equilibrio: en los platillos del lado izquierdo de la balanza se representa el primer miembro y en los platillos del lado derecho de la balanza se representa el segundo miembro.

Los términos independientes de una ecuación se representan mediante canicas depositadas en recipientes descubiertos, los términos independientes serán números enteros.

Los términos con incógnita se representan mediante recipientes cubiertos, que representarán las cantidades a descubrir (incógnita).

La propuesta se integró por un conjunto de diecisiete hojas de trabajo, en la figura 3 se puede observar la hoja de trabajo No. 14. Cada hoja de trabajo contiene una serie de indicaciones y preguntas que orientan a la actividad matemática del estudiante. Se puso a prueba dos de las actividades de la propuesta didáctica con seis estudiantes, con el propósito de detectar potenciales errores de redacción en el planteamiento de las preguntas, en la claridad de las indicaciones y en el tiempo estimado de aplicación de la propuesta, para tener oportunidad de modificarlas con anterioridad a su puesta en escena formal.

Considerando los resultados obtenidos en el pilotaje de las actividades didácticas, se realizaron ligeras modificaciones en la estructura de las hojas de trabajo, las cuales fueron incorporadas para la implementación definitiva de la propuesta. Después de realizar las modificaciones se realizó la implementación con estudiantes.

La metodología de trabajo utilizada fue el estudio de casos, por la naturaleza del trabajo los casos a estudiar fueron parejas de estudiantes de la escuela Secundaria General No. 4, Profesor Rubén Gutiérrez Carranza, de Hermosillo Sonora, inscritos en primer grado del turno vespertino, durante el período escolar 2014-2015. De entre más de diez parejas se eligieron cinco que concluyeron todas las actividades para realizar todos los análisis que se reportan y obtener las conclusiones.

Para la aplicación de las hojas de trabajo se destinaron cinco sesiones de trabajo de tres horas cada sesión, aproximadamente. Se realizaron videograbaciones durante la aplicación de la propuesta, de manera que se pudieran recuperar las intervenciones del profesor y las respuestas de los estudiantes. A partir de la información recabada en las hojas de trabajo y de las videograbaciones, se realizó el análisis del trabajo de los estudiantes, y a partir de ese análisis se obtuvieron algunas conclusiones de las que se hará mención más adelante.

Figura 3. Estudiantes interesados en el trabajo con la balanza.

Para ecuaciones lineales con una incógnita, se utilizó una balanza como la mostrada en la figura 1, y se trabajó con ecuaciones del tipo de:

$$x = a$$
$$x + a = b$$
$$ax = b$$
$$ax + b = c$$
$$ax + b = cx + d$$

Donde a, b y c son números enteros no negativos.

Hoja de trabajo No.14

Nombre: ____ **Fecha:**_______

En la ecuación y=2x +3

1. Si *x* es la etiqueta de dos de los recipientes colocados en el platillo B y el número 3 nos indica que en el platillo B hay un tercer recipiente que contiene una cantidad de 3 canicas ya conocidas y fijas.

a) ¿ qué representa y?

____

b) Si en los platillos etiquetados con *x* no hemos colocado canicas, ¿Cuántas canicas hay que colocar en el platillo A para lograr el equilibrio? ¿ Cuánto vale *y* en este caso?

____
____
____
____

c) ¿Cuál es el valor de *y* requerido para lograr el equilibrio cuando cada recipiente etiquetado con *x* contiene 1 canica?

____
____

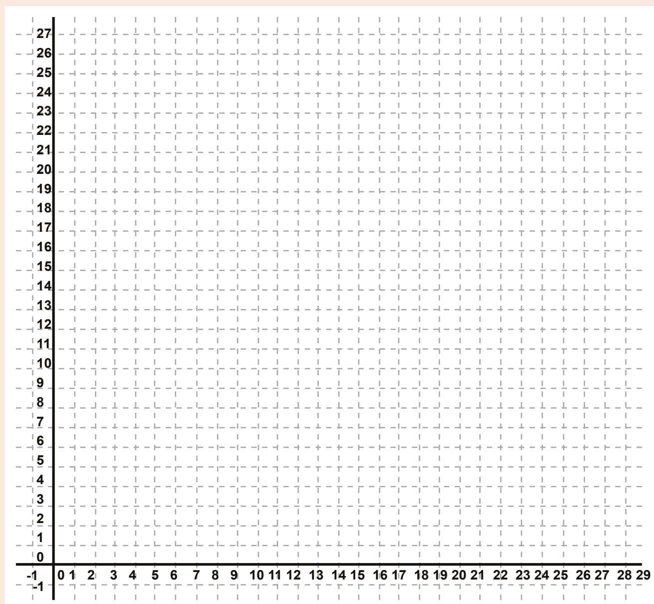
d) cada vez que agregas 1 canica a cada recipiente etiquetado con x, ¿Cuántas canicas tienes que añadir en el recipiente colocado en el platillo A para lograr el equilibrio?

____

2. Basándonos en lo que hemos experimentado hasta este momento, completa la siguiente tabla

x (cantidad de canicas colocadas en cada recipiente etiquetado con *x* en el platillo B)	*y* (cantidad de canicas colocadas en el platillo A para lograr el equilibrio)
	3
1	
2	7
3	
4	
	13
6	
7	
8	

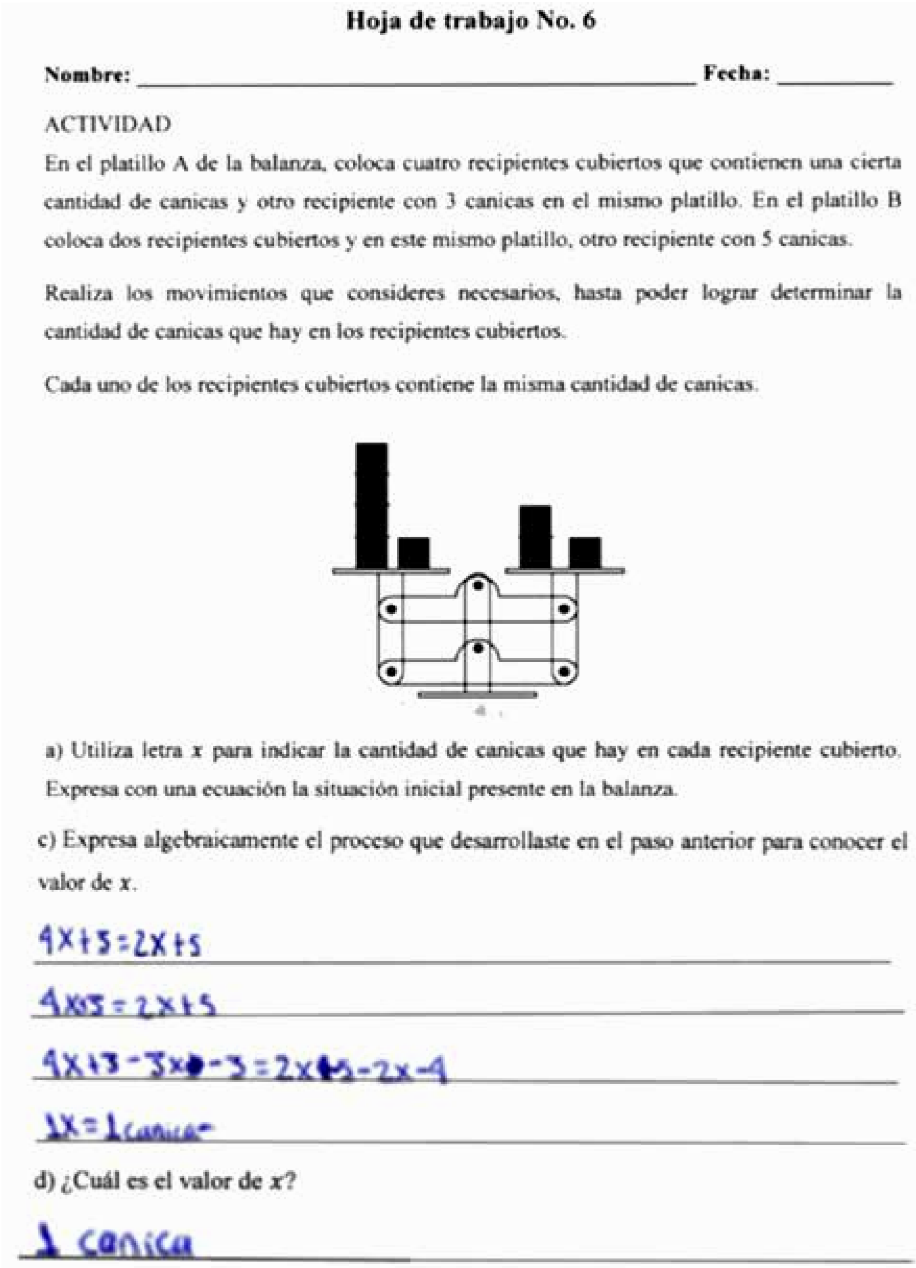
3. Grafica los puntos correspondientes a las parejas *(x,y)* de la tabla



4. Explica qué significa en la gráfica lo que respondiste en el inciso d.

Figura 3. Hoja de trabajo No. 14.

En la figura 4 se muestra un tipo de respuesta dada por un estudiante a la hoja de trabajo No. 6, en donde se puede apreciar el tratamiento que le da a la ecuación y que le permitió responder adecuadamente al final el valor de la incógnita.



Hoja de trabajo No. 6

Nombre: ______________________________ **Fecha:** __________

ACTIVIDAD

En el platillo A de la balanza, coloca cuatro recipientes cubiertos que contienen una cierta cantidad de canicas y otro recipiente con 3 canicas en el mismo platillo. En el platillo B coloca dos recipientes cubiertos y en este mismo platillo, otro recipiente con 5 canicas.

Realiza los movimientos que consideres necesarios, hasta poder lograr determinar la cantidad de canicas que hay en los recipientes cubiertos.

Cada uno de los recipientes cubiertos contiene la misma cantidad de canicas.

a) Utiliza letra *x* para indicar la cantidad de canicas que hay en cada recipiente cubierto. Expresa con una ecuación la situación inicial presente en la balanza.

c) Expresa algebraicamente el proceso que desarrollaste en el paso anterior para conocer el valor de *x*.

4X+3=2X+5

4X+3=2X+5

4X+3-3X-3=2X+5-2X-4

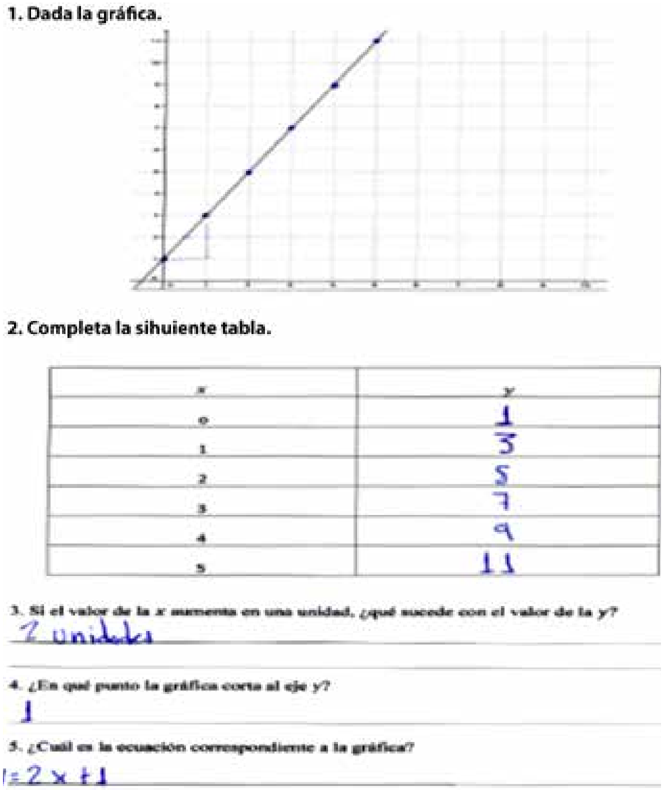
1X=1 canica

d) ¿Cuál es el valor de *x*?

1 canica

Figura 4. Hoja de trabajo No. 6.

La actividad planteada en la hoja de trabajo No. 17 (Figura 5) muestra la representación geométrica de la ecuación lineal con dos variables, y que posteriormente los estudiantes lograron llevar a cabo la conversión de esta representación al registro de representación algebraico. Como se puede observar en las siguientes respuestas dadas en la figura 5, los estudiantes desarrollaron estrategias en donde efectuaron mentalmente cálculos que les permitió transitar del registro gráfico al registro algebraico, logrando determinar el tipo de ecuación que estaba representado en la gráfica.



1. Dada la gráfica.

2. Completa la sihuiente tabla.

x	y
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11

3. Si el valor de la x aumenta en una unidad, ¿qué sucede con el valor de la y?

2 unidades

4. ¿En qué punto la gráfica corta al eje y?

1

5. ¿Cuál es la ecuación correspondiente a la gráfica?

=2x+1

Figura 5. Hoja de trabajo No. 17.

CONCLUSIONES

Con base al análisis de resultados, se considera que la balanza constituyó un valioso recurso para lograr incidir positivamente en el aprendizaje de la noción de ecuación lineal con una incógnita y de dos variables. A lo largo de las secciones de actividades, con la ayuda de la balanza y reforzado al final con el uso del software GeoGebra, los estudiantes pudieron distinguir entre la literal en su uso como incógnita o como variable, aunque al principio, para el caso de la incógnita, algunos utilizaron en libertad otros signos para representarla, como el uso del signo de interrogación.

Se logró, con el uso de la balanza como instrumento de enlace, la conversión directa y recíproca entre los registros de representación algebraico y gráfico, logro que debe destacarse, ya que en la escuela se privilegia la conversión del registro algebraico al gráfico en forma abstracta, difícilmente asimilado por los estudiantes.

Trabajar con actividades escritas y con material concreto en donde los estudiantes realizaron acciones de exploración, reflexión y análisis, resultó novedosa y estimulante para ellos.

La secuencia de actividades didácticas contribuyó al desarrollo de competencias matemáticas en el marco de la Reforma Integral de Educación Básica, puesto que el estudiante desarrolló pensamiento matemático en la medida que tradujo desde el lenguaje natural al simbólico y formal; manejó expresiones que contenían símbolos; utilizó diferentes registros de representación; expresó, representó e interpretó información matemática contenida en una situación, -tradujo la realidad a una estructura matemática mediante un modelo matemático-.

BIBLIOGRAFÍA

[1] N. Hercovics y L. Linchevski, «A cognitive gap between arithmetic and algebra,» Educational Studies in Mathematics, pp. 59-78, 1994.

[2] C. Kieran y E. Filloy Y., «El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica,» Enseñanza de las ciencias, vol. 7, nº 3, pp. 229-240, 1989.

[3] E. Pérez, «El modelo interactivo doble balanza algebraica; un recurso para la exploración de la resolución de ecuaciones de primer grado,» AMIUTEM, 2012. [En línea]. Available: www.amiutem.edu.mx. [Último acceso: 15/06/2013].

[4] M. T. Rojano, «Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos,» Números, vol. 75, pp. 5-20, 2010.

[5] J. Vlassis, «The balance model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown,» Educational Studies in Mathematics, vol. 49, pp. 341-359, 2002.

[6] G. Uicab, «Materiales tangibles. Su influencia en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas,» Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, vol. 22, pp. 1007-1013, 2009.

[7] R. Duval, «Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento,» de Investigaciones en matemática educativa II, F. Hitt, Ed., México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1998, pp. 173-201.

[8] «Plan de Estudios 2011,» Secretaría de Educación Pública, 2011. [En línea]. Available: http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/. [Último acceso: 04 05 2013].

[9] A. M. Esquinas Sancho, «Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente.,» Madrid, 2009.

[10] S. M. Segura H., «Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica,» Relime, vol. 7, nº 1, pp. 49-78, 2004.

[11] S. d. E. Pública, Programas de Estudio 2011. Guía para el maestro, vol. Matemáticas, Secretaria de Educación Pública, 2011, p. 33.

[12] G. Arroyo Ch., «Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia,» Uniciencia, vol. 28, nº 2, pp. 15-44, 2014.

[13] J. X. Peralta García, «Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal,» de XII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, Hermosillo, Sonora, México, 2002.

[14] E. E. Rechimont y M. E. Ascheri, «Registros de representación semiótica en el concepto "resolución numérica de ecuaciones polinómicas". Análisis a priori,» de Acta Latinoamericana De Matemática Educativa, 2004.

[15] R. Thom, «Modern mathematics: does it exist?,» de Developments in Mathematics Education, A. G. Howson, Ed., Cambridge University Press, 1973.

[16] A. Pérez T., A. Pérez H y H. Hernández, «Secuencia didáctica para facilitar la transición entre la aritmética y el álgebra,» Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, vol. 26, pp. 863-871, 2013.

[17] M. Socas R., «Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria,» de La educación matemática en la enseñanza secundaria, L. Rico Romero, Ed., Editorial Horsori, 1977, pp. 125- 152.

[18] A. Rabino, P. Cuello y M. De Munn, «Aprehender álgebra utilizando contextos significativos,» Revista Premisa, vol. 6, nº 22, pp. 36-42, 2004.