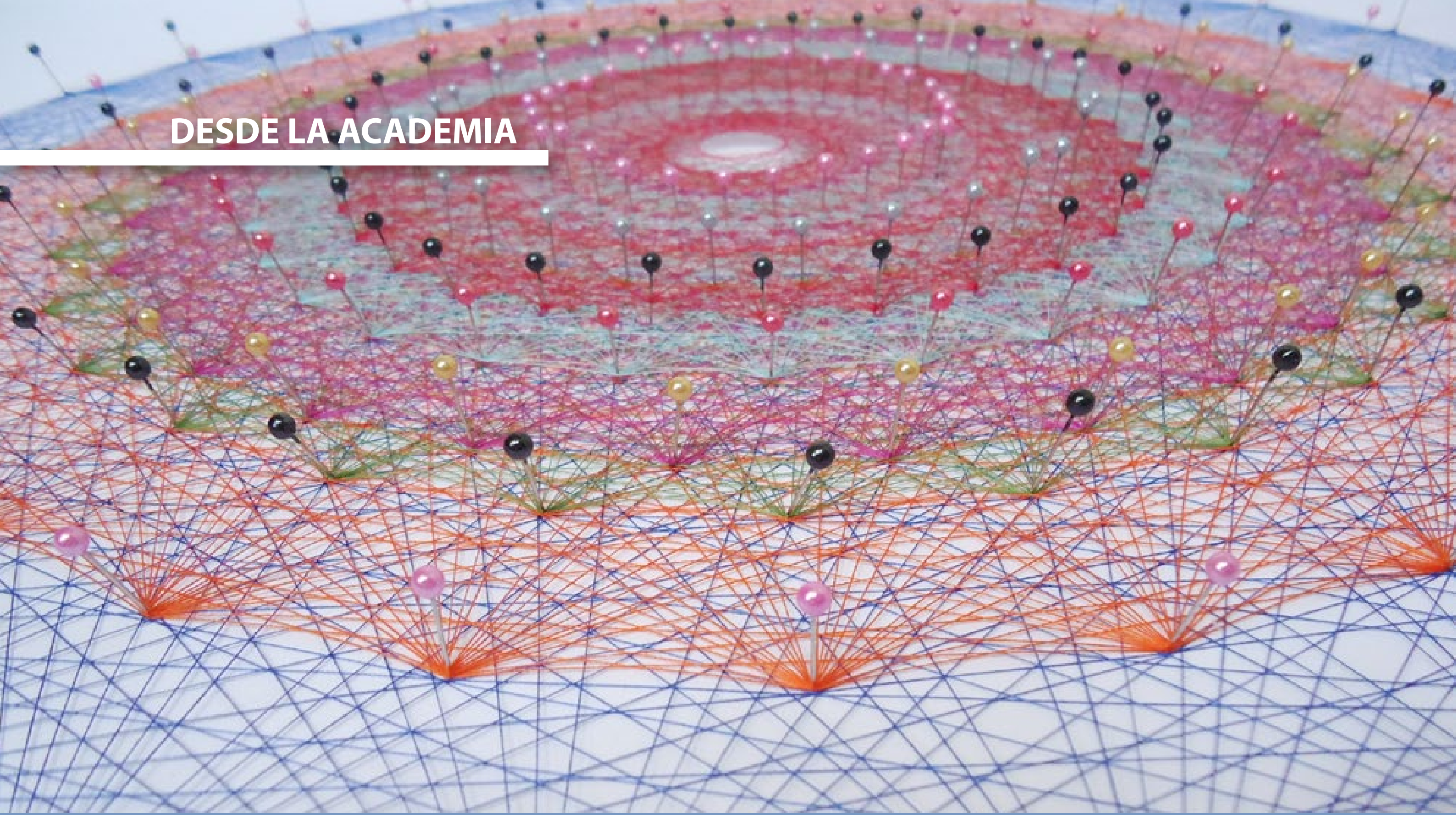


EL GRUPO FUNDAMENTAL

CARLOS A. ROBLES CORBALÁ*, RAFAEL R. RAMOS FIGUEROA.

RESUMEN

En este artículo se aborda un problema clásico para poder detectar si dos espacios topológicos son homeomorfos o no. Para lo cual a cada espacio topológico se le asocia un grupo algebraico, de tal suerte que si los espacios son homeomorfos, entonces los grupos asociados serán isomorfos. Se presenta una construcción del grupo fundamental de un espacio topológico y se enfoca en demostrar que efectivamente es un grupo.

Palabras clave: Topología, álgebra, homotopía.

ABSTRACT

In this article we will be taking on a classical problem in topology, which is to determine if two given topological spaces are homeomorphic or not. To solve this problem we will associate an algebraic group to each topological space, such that if the spaces are homeomorphic then the associated groups will be isomorphic. We will construct the fundamental group of a topological space and we focus on proving that it is indeed a group.

Keywords: *Topology, algebra, homotopy.*

M.C. CARLOS ALBERTO ROBLES CORBALÁ
Correo: crobles@gauss.mat.uson.mx
DR. RAFAEL ROBERTO RAMOS FIGUEROA
Correo: rramos@gauss.mat.uson.mx
Depto. de Matemáticas, Universidad de Sonora

*Autor para correspondencia: M.C. Carlos Alberto Robles Corbalá
Correo electrónico: crobles@gauss.mat.uson.mx
Recibido: 18 de septiembre de 2015
Aceptado: 30 de noviembre de 2015
ISSN: 2007-4530

INTRODUCCIÓN

En el trabajo de Cisneros y otros [1] se menciona que en matemáticas, uno de los problemas principales consiste en clasificar los objetos de estudio. Para ello, generalmente se define una noción de equivalencia (dependiendo de las propiedades que interesen) entre dichos objetos y un problema fundamental,que consiste en dados dos objetos, determinar si son equivalentes o no. Por ejemplo, en geometría plana, si las propiedades que interesan son el tamaño y la forma, la noción de equivalencia estaría dada por el concepto de congruencia, así dos objetos (polígonos por ejemplo) serán equivalentes, si y sólo si, éstos son congruentes, es decir, si tienen la misma forma y tamaño. Si lo que nos interesa es únicamente la forma, la noción de equivalencia será la de semejanza y de esta manera, dos objetos serán equivalentes, si son proporcionales, no importando así su tamaño.

En el caso de la topología, la noción de equivalencia es la de homeomorfismo: dos espacios topológicos X y Y son homeomorfos (o equivalentes), si existe una función continua f de X en Y y una función continua g de Y en X, tales que $g \circ f$ y $f \circ g$ son las funciones identidad en X y en Y, respectivamente. En tal caso se dice que f es un homeomorfismo. Intuitivamente, esto quiere decir que podemos "deformar continuamente" uno de los espacios hasta obtener el otro. El problema de determinar si dos espacios son homeomorfos o no, utilizando directamente la definición de homeomorfismo, puede ser muy difícil. Para probar que son homeomorfos, tenemos que dar un homeomorfismo entre ellos, lo cuál puede no ser fácil. Por otro lado, para probar que no lo son, se tiene que demostrar que no existe ningún homeomorfismo entre ellos, lo cuál puede ser aún más difícil. Otra forma más fácil de atacar el problema, consiste en buscar propiedades de los espacios topológicos que se preserven bajo homeomorfismo, de esta manera, si uno de los espacios posee dicha propiedad y otro no, entonces no pueden ser homeomorfos. Ejemplos de dichas propiedades son la conexidad y la compacidad.

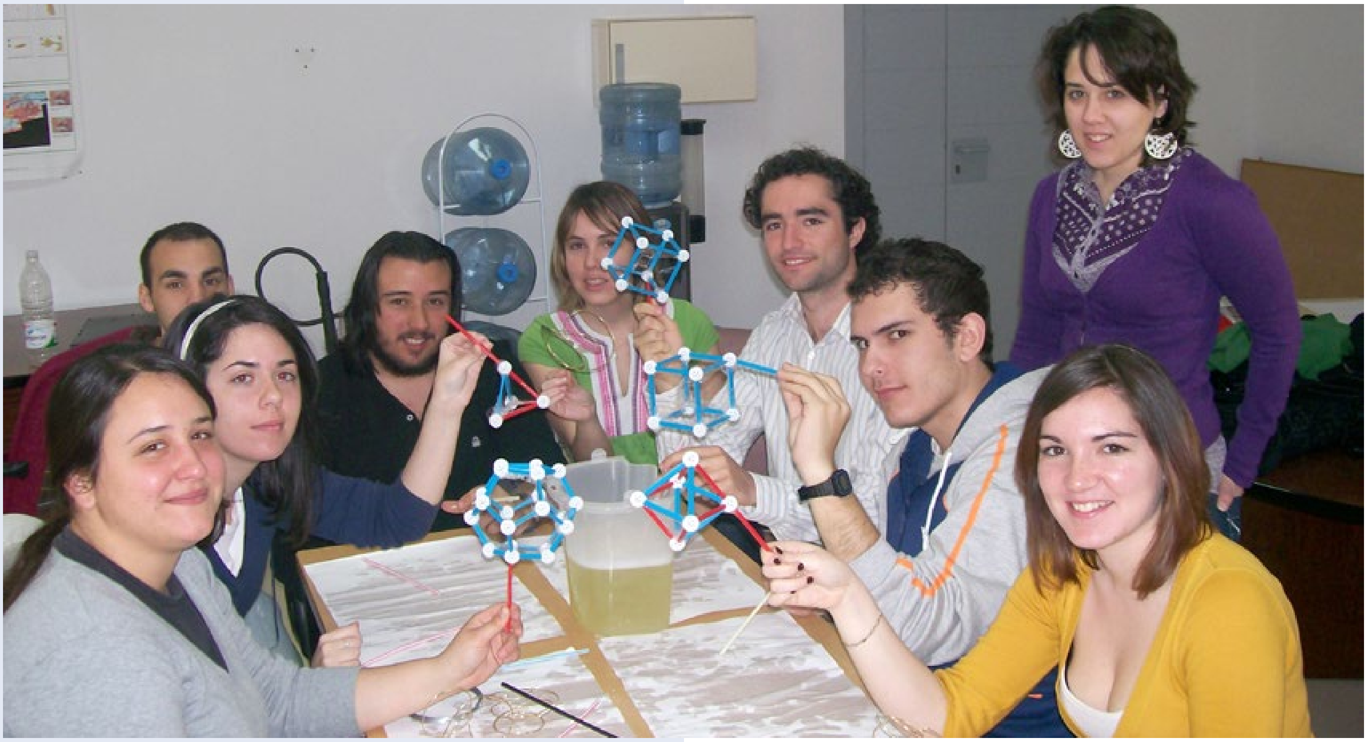
Se muestran algunos ejemplos de esta técnica. Usando el concepto de compacidad se puede ver que la recta real $\mathbb{R}$ y el círculo unitario S^1 no son homeomorfos, ya que S^1 es un espacio compacto, lo que equivale a decir que como subconjunto del plano euclidiano es cerrado y acotado, mientras que $\mathbb{R}$ no es compacto por no ser acotado.

Ahora use el concepto de conexidad. Intuitivamente, el que un espacio sea conexo significa que consta de un solo "pedazo". Denote por $\mathbb{R}^n$ al espacio euclidiano n-dimensional. Vea que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ $con\, n \geq 2$, no son homeomorfos. A primera vista, parece que la conexidad no ayuda a probar la afirmación, ya que ambos, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ son conexos, pero se vale del siguiente truco: suponga que existe un homeomorfismo φ entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$, si quita un punto p de $\mathbb{R}$ y su imagen bajo φ en $\mathbb{R}^n$ entonces seguirá teniendo un homeomorfismo entre $\mathbb{R}\backslash\{p\}$ y $\mathbb{R}^n\backslash\,\{\varphi(p)\}$. Esto es imposible, ya que al quitarle un punto a $\mathbb{R}$ éste se separa en dos "pedazos", es decir, deja de ser conexo, mientras que $\mathbb{R}^n$ menos un punto, no se separa. Por lo tanto, se concluye que no puede existir un homeomorfismo entre dichos espacios. Sin embargo, esta técnica no sirve para ver en general que $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, con $n \neq m$ y $n, m \geq 2$, no son homeomorfos, ya que $\mathbb{R}^n\backslash\{p\}$ es siempre conexo para $n \geq 2$. Para ello fueron necesarias nuevas técnicas. La búsqueda de dichas técnicas dio origen a la topología algebraica, en dicha área aparece un concepto fundamental más débil que el de homeomorfismo, a saber, el concepto de equivalencia homotópica.

Para entender dicho concepto es necesario primero establecer el concepto de homotopía entre funciones: se dirá que dos funciones h y k de un espacio W en un espacio Z son homótopas si "se puede deformar continuamente h en k". Este concepto se definirá con rigor más adelante en este artículo. Una vez establecido este concepto, se dice que X y Y son espacios homotópicamente equivalentes, si existe una función continua f de X en Y, y una función continua g de Y en X, tales que $g \circ f$ es homótopa a la función identidad en X, y $f \circ g$ es homótopa a la función identidad en Y. En tal caso, se dirá que f es una equivalencia homotópica.

Dos espacios homeomorfos siempre son homotópicamente equivalentes, sin embargo el recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, la circunferencia es homotópicamente equivalente al cilindro, así como $\mathbb{R}^n$ es homotópicamente equivalente a un punto. Más sin embargo, la circunferencia no es homeomorfa al cilindro, ni $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a un punto.

La idea principal en la topología algebraica es la de invariante homotópico, la cual consiste en que a cada espacio topológico X se le asocia un objeto algebraico $h(X)$ (grupo, espacio vectorial, módulo, etcétera) y a cada función continua f entre dos espacios topológicos X e Y, se le asocia una función $h(f)\colon h(X) \to h(Y)$ que preserva la estructura algebraica en cuestión, de tal manera que si X e Y son homotópicamente equivalentes, entonces $h(X)$ y $h(Y)$ son isomorfos, es decir, $h(X)$ y $h(Y)$ son equivalentes como objetos algebraicos. Por lo tanto, si dos espacios X e



Y son tales que $h(X)$ no es isomorfo a $h(Y)$ entonces X y Y no pueden ser homotópicamente equivalentes y de aquí que son no homeomorfos.

Algunos ejemplos de invariantes homotópicos son los grupos de homotopía, los grupos de homología y los anillos de cohomología.

En el libro de texto clásico [2] se encuentra:"Sin embargo en ocasiones las propiedades topológicas como compacidad, conexidad, conexidad local, y metrizabilidad no son suficientes para demostrar que dos espacios no son homeomorfos.

Por esto, debemos introducir nuevas propiedades y nuevas técnicas. Una de las propiedades más usuales es la de ser simplemente conexo, a grandes rasgos; decimos que un espacio X es simplemente conexo si toda curva cerrada en X puede contraerse a un punto en X. Así por ejemplo, la propiedad de conexidad simple va a distinguir entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$; en efecto, quitando un punto de $\mathbb{R}^3$ el espacio obtenido sigue siendo simplemente conexo, pero al quitar un punto de $\mathbb{R}^2$ sucede lo contrario. Esta propiedad también va a distinguir entre S^2 (que es simplemente conexo) y el toro (que no lo es). Sin embargo, no va a distinguir entre dos espacios en donde ninguno de los dos sea simplemente conexo".

Otras excelentes referencias para los conceptos básicos de topología general como compacidad, conexidad, homeomorfismo, etcétera son las referencias [3], [4] y [2].

EL GRUPO FUNDAMENTAL

Un grupo es un conjunto G con una operación binaria asociativa, tal que, en el conjunto G existe un elemento identidad e; y todo elemento de G posee un elemento inverso en G. Dados dos grupos G y H, un homomorfismo F de G en H es una función de G en H que cumple que F(ab)=F(a)F(b) para todo a y b en G.Un homomorfismo biyectivo es llamado isomorfismo.

Existe una idea más general que el concepto de conexidad simple, una idea que incluye la conexidad simple como un caso particular. Ésta involucra cierto grupo conocido como grupo fundamental del espacio.

Una idea intuitiva que puede inspirar la construcción del grupo fundamental es la siguiente. Imaginemos que estamos parados sobre una superficie plana S la cual es muy grandepero de poco grosor y tiene agujeros. Sin embargo tenemos mala vista y queremos detectar los agujeros sin movernos del lugar. Por alguna extraña razón disponemos de muchos segmentos de cuerdas sumamente elásticas que se pueden estirar o contraer de tamaño tanto como queramos. Clavamos una cuña cerca de donde estamos parados y fijamos el punto inicial y final de cada segmento de cuerda a la cuña, obteniendo así lazos. Enseguida, lanzamos dichos lazos al azar sobre la superficie con gran fuerza para que las cuerdas se estiren y después, con el fin de detectar los agujeros, comenzamos a contraer las cuerdas elásticas hacia la cuña. Si no hay ningún agujero entonces el lazo elástico se contraerá hasta el punto donde está la cuña. Si no es así,entonces la cuerda elástica se atorará y detectaremos que existe un agujero. Aún más, observamos que si lanzamos muchísimos lazos de distintos modos, también obtendríamos distintas configuraciones, por ejemplo un lazo podría rodear más de un agujero, o un lazo podría rodear más de una vez a la cuña y encerrar varios agujeros al mismo tiempo. Podemos definir una operación de concatenación de dos lazos a y b definiendo el nuevo lazo ab recorriendo primero el lazo a y después el lazo b. Dicho lazo ab tendría por punto inicial y final de nuevo el punto que señala la cuña. Para simplificar podríamos considerar dos lazos como equivalentes si uno de ellos se puede deformar continuamente en el otro, manteniendo fijos los puntos inicial y final de la cuerda que es donde se encuentra la cuña y al mismo tiempo pidiendo que la cuerda permanezca sobre la superficie durante toda la deformación. Podríamos definir el inverso de un lazo como el mismo lazo pero recorrido en sentido contrario. Se puede probar que lo que se obtiene al definir el producto de clases de equivalencia de lazos del modo anterior, es un grupo, y se conoce como el grupo fundamental asociado a la superficie S. En este caso la clase de equivalencia del lazo que consiste en un solo punto (el punto donde se encuentra la cuña) es la identidad del grupo.

En lo que resta de este artículo se formalizan estas ideas y se analizan algunas de las propiedades más importantes del grupo fundamental.

Puede probarse además que dos espacios que son homeomorfos tienen grupos fundamentales isomorfos. Y la condición de conexidad simple es precisamente la condición de que el grupo fundamental de X sea el grupo trivial (elgrupo con un solo elemento).

Excelentes referencias para conceptos introductorios de topología algebraica como homotopía y grupo fundamental son [5] y [6].

A continuación se construirá el grupo fundamental de un espacio topológico X.

Homotopía de caminos

Si X es un espacio topológico, I es el intervalo cerrado $[0,1]$ y $\alpha: I \to X$ una aplicación continua, entonces llamaremos α a un camino. Si además $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ entonces le llamaremos lazo basado en x_0. Además $\tau, \sigma: I \to X$ si son caminos tales que:

$$\begin{aligned} \alpha(0) = \tau(0) = x_0 \\ \alpha(1) = \tau(1) = x_1 \end{aligned} \qquad (1)$$

se dirá que τ y σ son homotópas relativas al $\{0,1\}$ (se denota esto por $\sigma \simeq_{rel\{0,1\}} \tau$) si existe una aplicación continua $F: I \times I \to X$ tal que para cualquier $s, t \in I$ se cumple:

$$\begin{aligned} F(s,0) &= \sigma(s) \\ F(s,1) &= \tau(s) \\ F(0,t) &= x_0 \\ F(1,t) &= x_1 \end{aligned} \qquad (2)$$

Lo cual significa que se puede deformar continuamente un camino en el otro dejando fijos sus puntos extremos. Se llama a F una homotopía de σ a τ y se le denota por $F: \sigma \simeq_{rel\{0,1\}} \tau$.

Se puede interpretar la definición de homotopía F entre caminos de la siguiente manera. Para cada t fijo se tiene una función F_t : I→ X , y así al variar t en I se obtiene una familia de caminos que "varía

continuamente” respecto al parámetro t. En la figura 1 se ilustran algunos de los caminos F_t.

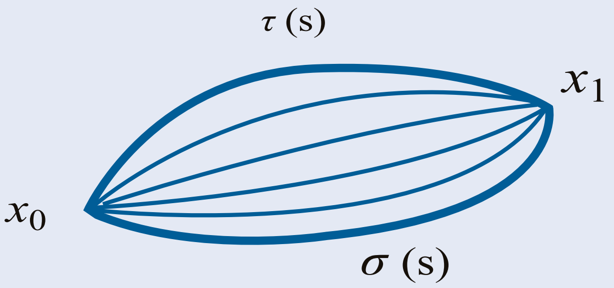


Figura 1. Homotopía de σ a τ.

Proposición 1. La relación $\simeq_{rel\{0,1\}}$ es una relación de equivalencia.

La demostración de esta proposición puede ser encontrada en [5] en la página 119.

Multiplicación de caminos

Si $\sigma, \tau: I \to X$ son caminos en X tal que el punto inicial de σ es $\sigma(0) = x_0$, $\sigma(1) = \tau(0) = x_1$, $\tau(1) = x_2$.Se define el nuevo camino producto $\sigma\tau$ recorriendo el camino σ seguido del camino τ, ambos recorridos al doble de la velocidad original, lo cual es descrito explícitamente por la siguiente fórmula:

$$\sigma\tau(t) = \begin{cases} \sigma(2t), \ldots - & si\ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \tau(2t-1), & si\ \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \qquad (3)$$

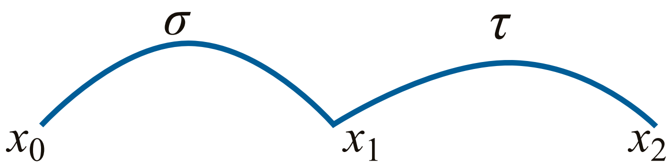
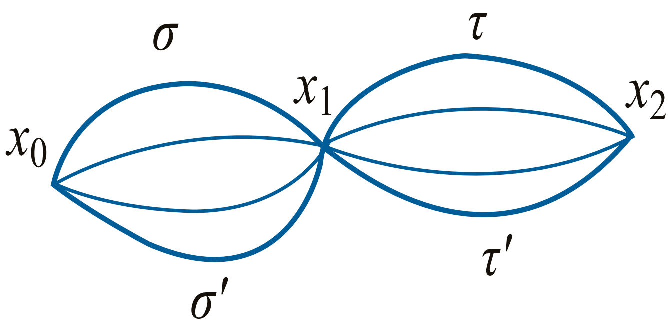


Figura 2. Multiplicación de σ y τ.

La siguiente proposición muestra que la multiplicación de caminos es compatible con la relación de equivalencia entre caminos.

Proposición 2. Si $F: \sigma \simeq_{rel\{0,1\}} \sigma'$ y $G: \tau \simeq_{rel\{0,1\}} \tau'$ entonces $\sigma\tau \simeq_{rel\{0,1\}} \sigma'\tau'$.

La demostración de esta proposición puede ser encontrada en la página 126 de [5].



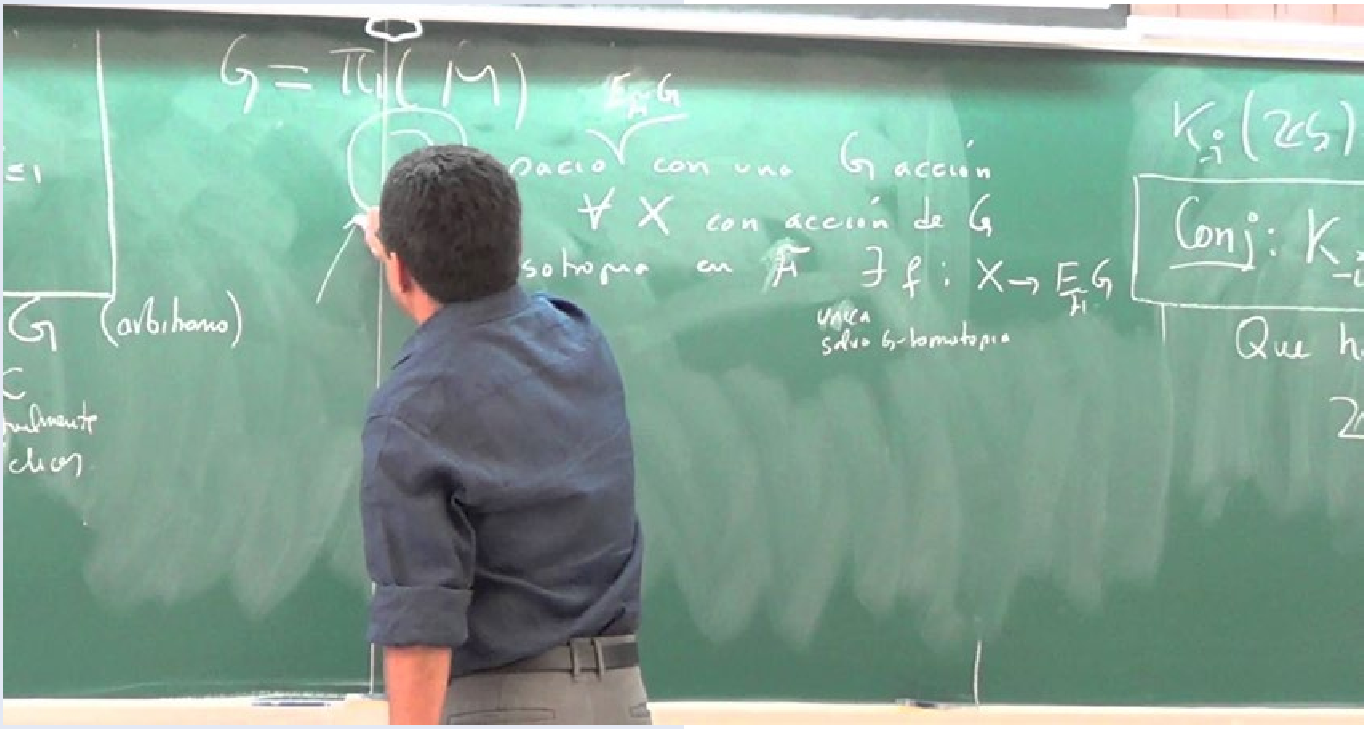


Figura 3. Homotopía de $\sigma\tau$ a $\sigma'\tau'$.

Se presenta a continuación el resultado más importante de este artículo.

Teorema 1. Sea $\pi(X, x_0)$ el conjunto de las clases de homotopía de lazos en X con punto base X_O, con la multiplicación de clases definida por:

$$[\sigma][\tau] = [\sigma\tau] \tag{4}$$

$\pi(X, x_0)$ es un grupo con elemento neutro $[\varepsilon_{x_0}]$, y el inverso de $[\sigma]$ es $[\sigma^{-1}]$, donde ε_{x_0} es el camino constante en x_0 y $\sigma^{-1}(s) = \sigma(1-s)$.
$\pi(X, x_0)$ A se le llama el grupo fundamental de X en x_O.

Es común denotar al grupo fundamental de un espacio X basado en un punto x_O por $\pi_1(X, x_0)$, sin embargo, por simplicidad se omite el subíndice 1 que aparece debajo de la letra π .

Demostración. La demostración completa de este teorema se puede encontrar en **[5]** en la página 129. Sólo se comprobará que $[\sigma]^{-1} = [\sigma^{-1}]$. Para ello, se demostrará primero que $[\sigma][\sigma^{-1}] = [\varepsilon_{x_0}]$. Para cada $t_0 \in [0,1]$ fijo, se definió la trayectoria $F(s, t_0)$ que se deduce de la figura 4.

$$F(s,t_0) = \begin{cases} \sigma(2s), - \cdots - - \; - - si \; 0 \le s \le \dfrac{t_0}{2} - - \\ \sigma(t_0), - - - - - - .. si \; \dfrac{t_0}{2} \le s \le \dfrac{2-t_0}{2} \\ \sigma^{-1}(2s-1), - \cdots . \; si \; \dfrac{2-t_0}{2} \le s \le 1 \end{cases} \tag{5}$$

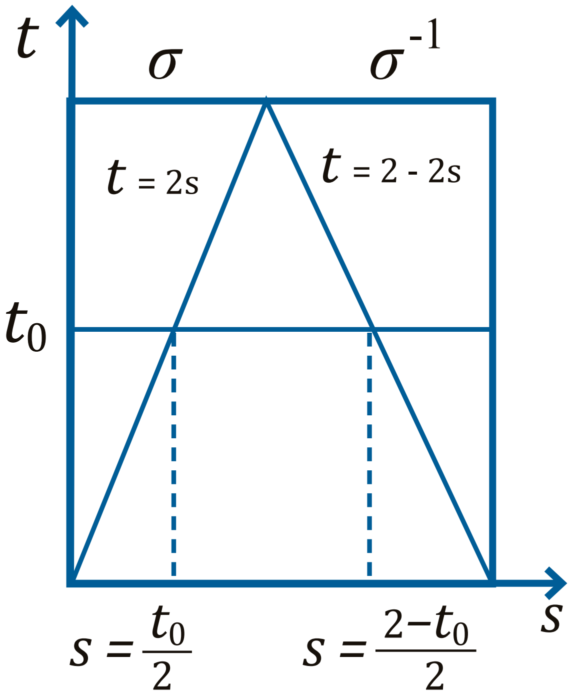


Figura 4. Inverso.

Al variar s y t en I se obtiene la función $F: I \times I \to X$

$$F(s,t) = \begin{cases} \sigma(2s), - - - .. \quad si \; 0 \le s \le \dfrac{t}{2} - - \\ \sigma(t), \quad si \; \dfrac{t}{2} \le s \le \dfrac{2-t}{2} \\ \sigma^{-1}(2s-1), \quad si \; \dfrac{2-t}{2} \le s \le 1 \end{cases} \tag{6}$$

F está bien definida pues:

$$\begin{gathered} \sigma\left(2\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \sigma(t) \\ \sigma^{-1}\left(2\left(\frac{2-t}{2}\right) - 1\right) = \sigma^{-1}(1-t) = \sigma(t) \end{gathered} \tag{7}$$

F es continua por el lema del pegado (el cual se puede consultar en [5] como el lema 12.2 en la página 100). F es una homotopía de ε_{x_0} a $\sigma\sigma^{-1}$ como se comprueba a continuación:

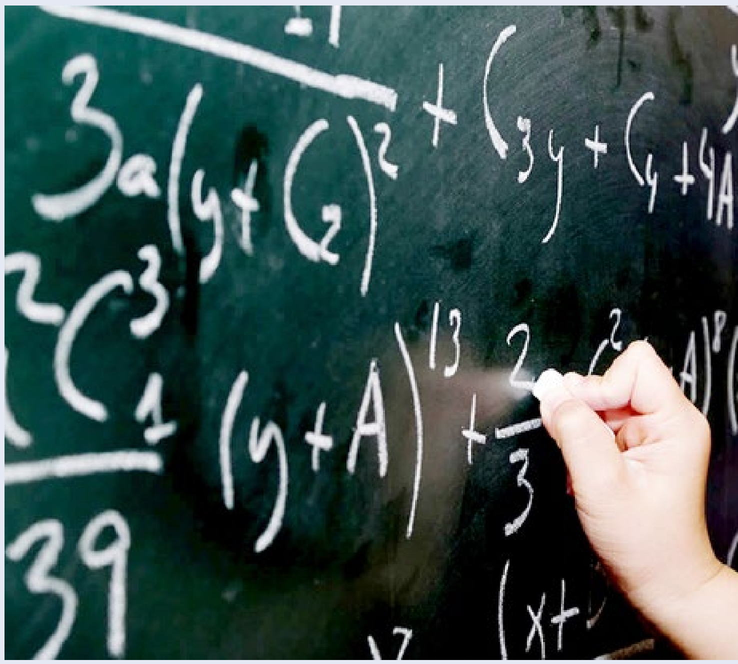
$$F(s,0) = \sigma(0) = \varepsilon_{x_0}(s)$$

$$F(s,1) = \begin{cases} \sigma(2s), \quad si \; 0 \le s \le \dfrac{1}{2} \\ \sigma^{-1}(2s-1), \quad si \; \dfrac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} = \sigma\sigma^{-1}(s) \tag{8}$$

$$F(0,t) = \sigma(0) = x_0 \text{ y } F(1,t) = \sigma^{-1}(1) = x_0$$

Entonces $[\varepsilon_{x_0}] = [\sigma\sigma^{-1}]$, análogamente $[\varepsilon_{x_0}] = [\sigma^{-1}\sigma]$ y se concluye que $[\sigma]^{-1} = [\sigma^{-1}]$.

Efectos de una aplicación continua sobre $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{X}, \mathbf{x_0})$



Se verá ahora el efecto que tiene una aplicación continua entre espacios topológicos sobre los grupos fundamentales. Suponga que $\varphi: X \to Y$ es una aplicación continua, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1) Si f es un camino en X entonces $\varphi \circ f$ es un camino en Y,
2) Si $f \simeq_{rel\{0,1\}} g$, entonces $\varphi \circ f \simeq_{rel\{0,1\}} \varphi \circ g$,
3) Si f es un lazo en X con punto base $x \in X$, entonces $\varphi \circ f$ es un lazo en Y con punto base $\varphi(x)$.
Se define ahora:

$$\varphi_* : \pi(X,x) \to \pi(Y,\varphi(x)) \qquad (9)$$

dada por $\varphi_*[f] = [\varphi f]$. La cual por las afirmaciones anteriores está bien definida.

Proposición 3. La aplicación $\varphi_* : \pi(X,x) \to \pi(Y,\varphi(x))$ es un homomorfismo de grupos, el cual se llama el homomorfismo inducido por φ.

La demostración de esta proposición se puede encontrar en [5]en la página 136.

Para enunciar el siguiente teorema se necesita definir el concepto de homotopía entre funciones. Se dice que dos funciones f y g de Y en X son homótopassi existe una aplicación continua $F: Y$ x $I \to X$ tal que para cualquier $y \in Y$ se cumple:

$$F(y,0) = f(y)$$
$$F(y,1) = g(y)$$

Además, si y_0 es un punto en Y y $F(y_0,t) = f(y_0) = g(y_0)$ para todo t en I, entonces diremos que f y g son homótopas relativas a y_0. Y será denotado por $f \simeq_{rel\{x\}} g$.

Teorema 2.
1) Si $\varphi: X \to Y$ y $\psi: Y \to Z$ son aplicaciones continuas, entonces:

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*.$$

2) Si $1: X \to X$ es la identidad en X, entonces 1_* es el homomorfismo identidad de $\pi(X,x)$.
3) Si $\varphi \simeq_{rel\{x\}} \psi$, entonces $\varphi_* = \psi_*: \pi(X,x) \to \pi(Y,\varphi(x))$; es decir, los homomorfismos inducidos son el mismo.

Las propiedades 1) y 2) del teorema 2 son fundamentales y significan que π es un funtor, mientras que la propiedad 3) establece la invarianza bajo homotopía. En consecuencia, al aplicar π a un diagrama conmutativo en la categoría de espacios topológicos, será "transformado" en un diagrama conmutativo que se verá idéntico al diagrama original pero ahora en la categoría de grupos.

Corolario 1. Sea $\phi: X \to Y$ un homeomorfismo, entonces $\phi_*: \pi(X,x) \to \pi(Y,\phi(x))$ es un isomorfismo.

El siguiente resultado muestra que si el espacio X es conexo por caminos, entonces su grupo fundamental es esencialmente independiente de la elección del punto base.

Teorema3. Si X es un espacio conexo por caminos entonces $\pi(X,x)$ y $\pi(X,y)$ son grupos isomorfos para todo par de puntos $x,\ y \in X$, donde un isomorfismo se define de la siguiente manera: se considera cualquier trayectoria f de x a y, entonces a la clase del camino σ en $\pi(X,x)$ se le asocia la clase del caminodado por el producto $f^{-1}\sigma f$.

Dado que ya se ha definido formalmente qué significa que dos funciones sean homótopas, ya se está en condiciones de precisar qué significa que dos espacios topológicos X y Y son homotópicamente equivalentes. Como se mencionó en la introducción, esto ocurre si existe una función f de X en Y que tiene un inversa homótopa g. Esto es, si $f \circ g$ es homótopa a la identidad en Y, y $f \circ g$ es homótopa a la identidad en X.

El siguiente resultado muestra la relación que existe entre los homomorfismos inducidos por una equivalencia homotópica entre espacios topológicos.

Teorema 4. Si $\phi\colon X \to Y$ es una equivalencia homotópica, $\phi_*\colon \pi(X,x) \to \pi(Y,\phi(x))$ es un isomorfismo para todo $x \in X$.

Esta demostración se encuentra en [5] en la página 139.

Definición 4. Un espacio topológico es simplemente conexo si es conexo por caminos y $\pi(X,x) = \{1\}$ para todo $x \in X$.

Se dice que un espacio X es contraíble si X es homotópicamente equivalente a un punto.

Corolario 2. Todo espacio contraíble es simplemente conexo.

Por ejemplo, la esfera de dimensión dos es un espacio simplemente conexo, sin embargo, no es un espacio contraíble.

El grupo fundamental del círculo

Ahora vea intuitivamente que el grupo fundamental de la circunferencia S^1 es el grupo cíclico infinito $\mathbb{Z}$: un lazo f en la circunferencia S^1 en el plano complejo centrada en cero, con punto base en 1 da un cierto número de vueltas alrededor de la circunferencia, por ejemplo si se considera la circunferencia unitaria centrada en el origen del plano complejo, entonces la función $f(t) = e^{2\pi int}$ es tal que f "enrolla" n veces el intervalo I en la circunferencia S^1 en sentido contrario a las manecillas del reloj, es decir, si se empieza en $f(0)$ y se considera $f(t)$ cuando t crece, por cada vuelta dada a la circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj se anota un tanto positivo, y por cada vuelta dada en sentido de las manecillas del reloj se anota un tanto negativo. La suma de los tantos anotados es el número de vueltas o grado de f. Así pues, a cada camino cerrado f con punto base $1 \in S^1$ se le asocia un entero. Lo anterior nos permite establecer la siguiente relación de equivalencia: dos lazos son equivalentes (homotópicos relativos al $\{0,1\}$), si y sólo si, tienen el mismo grado. Por último, para cada entero existe un lazo que da vueltas en la circunferencia, precisamente el dado por la función f descrita anteriormente.La demostración completa se puede encontrar en [5] a partir de la página 135.

Como un comentario final, las herramientas desarrolladas en este artículo se aplican para dar demostraciones alternativas de teoremas clásicos en las matemáticas, como el teorema fundamental del álgebra, y en el teorema de punto fijo de Brouwer ([5], páginas 140 y 141). Asimismo, el grupo fundamental es una herramienta básica en el estudio de las variedades de dimensiones bajas y en la teoría de nudos.

BIBLIOGRAFÍA

1) J.L Cisneros, G. Hinojosa, C. Robles, "El Teorema de Borsuk-Ulam", Cubo Matemática Educacional, Vol. 3, No. 2, 2001.
2) J. R. Munkres, Topología, Pearson Educación, S.A. Madrid, 2a Edición, 2002.
3) F. Casarrubias, A. Tamariz, "Elementos de Topología General", Aportaciones Matemáticas, 1ª.Edición, 2012.
4) J. Dugundji, "Topology", Allyn and Bacon, Inc., 1966.
5) C.Kosniowski, A first course in algebraic topology, Cambridge University Press, 1980.
6) W. S. Massey, "Algebraic Topology: An Introduction", Springer, 1990.