CREENCIAS Y CONCEPCIONES DE LOS PROFESORES DE SECUNDARIA SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS ISOMETRÍAS. EL CASO DE LA REFLEXIÓN

MARÍA MERCEDES CHACARA MONTES*, CRUZ EVELIA SOSA CARRILLO

RESUMEN

Esta investigación de la Enseñanza de la Geometría se desarrolla con un estudio exploratorio de profesores de Matemáticas de secundaria. Su objetivo es detectar creencias y concepciones del profesor, respecto al concepto de isometría en particular el de "reflexión".

Para detectar creencias y concepciones del profesor fue necesario adecuar un modelo teórico que nos permitiera diseñar un instrumento diagnóstico y nuestra intervención. El diseño del modelo se basó en la teoría de Van Hiele y la Taxonomía SÓLO (Estructura del resultado observado del aprendizaje), denominándolo "Niveles de Razonamiento-Calidad".

Se realizó un análisis cuantitativo y cualitativo de los resultados obtenidos encontrando variables relacionadas con la Formación Profesional y el manejo de los conceptos del profesor, por lo que recurrimos a la Técnica Multivariante por Discriminante.

Las isometrías representan un reto en su enseñanza porque además de la dificultad teórica de los conceptos relacionados está implicado el movimiento.

Palabras clave: Isometría, reflexión, creencias y razonamiento.

ABSTRACT

This research was developed in the context of teaching geometry through an exploratory study with high school mathematics teachers.This research was done in order to know the beliefs and conceptions of the teacher about the isometry concept, particularly the "reflection".

To detect beliefs and conceptions in the teacher it was necessaryto adapt a model that allowed us to design a diagnostic instrument and our intervention. The design of that model is based on the theory of Van Hiele and the SÓLO Taxonomy (Structure of Observed Learning Outcomes), the model was called "Levels of Reasoning –Quality".

In this work, we did a qualitative and quantitative analysis of the results of the exploratory study, and found variables related with the Professional training and the management of concepts by the teachers. We use for that analysis statistics multivariate techniques.

The isometry concept is a challenge for teachers and students, because it is theoretically difficult and involves movement.

Keywords: Isometry, reflection, beliefs, reasoning.

M.C. MARÍA MERCEDES CHACARA MONTES
Depto. de Matemáticas, Universidad de Sonora
Correo: meche@gauss.mat.uson.mx
DRA.CRUZ EVELIA SOSA CARRILLO
Instituto Tecnológico de Estudios
Superiores de Monterrey
Correo: evsosa@itesm.mx

*Autor para correspondencia: M.C. María Mercedes Chacara Montes
Correo electrónico: meche@gauss.mat.uson.mx
Recibido: 15 de Marzo del 2015
Aceptado: 22 de Mayo del 2015
ISSN: 2007-4530

INTRODUCCIÓN

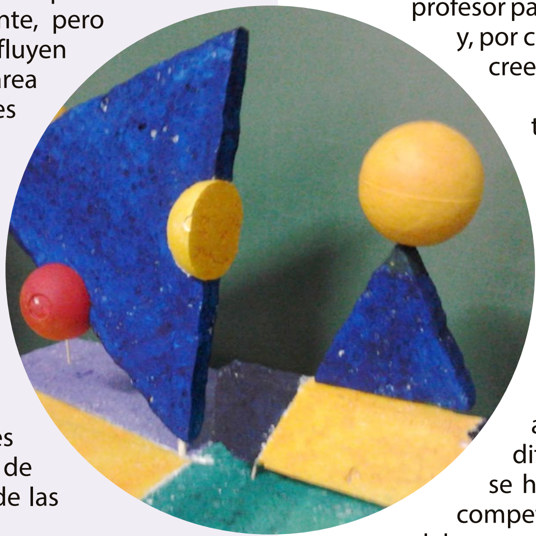
Este trabajo forma parte de una investigación amplia, que tiene como objetivo general detectar dificultades didácticas generadas por creencias y concepciones del profesor de Matemáticas de Secundaria, respecto al concepto de isometría en particular la reflexión como un caso particular de ésta. Se trata además de analizar y documentar el cambio positivo que sufren esas concepciones y creencias, después de una secuencia didáctica, estratégicamente diseñada, basada en los lineamientos del nuevo Modelo Niveles de Razonamiento-Calidad (una adecuación de las características de los niveles de Van Hiele desde la perspectiva de los objetivos geométricos y de la Taxonomía SÓLO). De esta forma se da a conocer una parte de nuestra investigación: El modelo como aportación y los resultados del estudio exploratorio.

CREENCIAS Y CONCEPCIONES

Denominamos creencias a las ideas "poco elaboradas", generales o específicas, que forman parte del conocimiento que posee el docente, pero carecen de rigor matemático, e influyen de manera directa en su tarea docente. A estas creencias se les asigna suficiente validez, verdad o credibilidad como para guiar el pensamiento y la conducta.

La concepción consiste en la estructura ordenada y sistémica que cada profesor de Matemáticas establece en el conjunto de sus conocimientos, con el fin de transmitirlos a sus estudiantes [1].

Las creencias y concepciones que posee el profesor influyen de manera directa en el aprendizaje de las Matemáticas.



Esta problemática se puede observar en los resultados por Escuela Evaluada 2011 del Estado de Sinaloa donde el tema que menor porcentaje de aciertos presenta es el de isometrías (transformaciones geométricas) [2].

En este marco referencial y en atención al problema de la enseñanza de las isometrías, destacaremos que una de nuestras hipótesis es: "el profesor confunde el concepto de Simetría con una de las transformaciones isométricas (Reflexión)". Hecho que observamos en nuestras experiencias y en trabajos previos ([3], [4]). En Europa, por ejemplo, ante la uniformización de los currículos en las últimas décadas han surgido investigaciones enfocadas en la enseñanza de las transformaciones geométricas; en ellas se destacan las dificultades de llamar simetría axial a la reflexión (incluso en libros de texto) pues trae como consecuencia que el profesor confunda la simetría con movimiento [5]. Nuestra concepción de la simetría es la usada en matemáticas superiores y en otras disciplinas como Física, Química, Geología, etc. En nuestro ámbito existen libros, incluso de niveles básicos en Estados Unidos, que usan el concepto matemáticamente correcto de simetría ([6], [7], [8]).

Por lo anterior, en este trabajo, damos especial énfasis a la reflexión con respecto a un eje. Esta isometría tiene la propiedad de generar a todas las demás isometrías por composición de reflexiones.

MODELO NIVELES DE RAZONAMIENTO - CALIDAD

Fue necesario revisar la importancia y la evolución histórica de las transformaciones geométricas, para adoptar algunas hipótesis sobre las dificultades en la enseñanza y diseñar un modelo que permitiera:

a) Explorar las concepciones y las creencias sobre el concepto de isometría (con énfasis en la reflexión).
b) Clasificar a cada profesor (en algún nivel de Razonamiento) y evaluar su progreso. La evolución del razonamiento en el profesor y la calidad del mismo.
c) Apoyar en el diseño de actividades que permitan al profesor pasar al siguiente nivel de razonamiento y, por consecuencia, reducir las dificultades y creencias sobre el concepto de isometría.

El modelo es una fusión de dos teorías: el Modelo de Van Hiele y la Taxonomía SÓLO (ambos de origen piagetiano) basado de manera puntual y en lo expuesto en [9], [10] y [11], y una adecuación para el trabajo con profesores. Denominándolo: Niveles de Razonamiento-Calidad.

Debido al trabajo con profesores fue importante realizar adecuaciones, por ejemplo, en los diferentes niveles de razonamiento se hacen de manera implícita y explicita competencias profesionales que un profesor debe poseer como es el manejo de los conceptos y la competencia relacionada con los diversos mecanismos para reproducir figuras (como producto de ciertos movimientos): dibujar, construir con material manipulativo (espejos, doblado de papel, mosaicos, etc.) o software de Geometría Dinámica. Además en el modelo Niveles de Razonamiento-Calidad se muestran los objetivos geométricos que el profesor debe alcanzar con cierto nivel y calidad, los cuales implican diferentes tipos de situaciones cognitivas y de procedimiento.

Así, de acuerdo al modelo Niveles de Razonamiento-Calidad, un profesor podría estar en algunos de estos niveles: Nivel 1 (Reconocimiento), Nivel 2 (Análisis), Nivel 3 (Clasificación) y Nivel 4 (Prueba). Donde la calidad que se encuentra en cada nivel está dada a través de otros subniveles: Pre-estructural, Uni-estructural, Multi-estructural, Relacional y de Abstracción, como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Descripción de los objetivos geométricos por Nivel y calidad.

Nivel 1 de Razonamiento	Descripción
Reconocimiento	En general, los conceptos son considerados de forma global, no se tienen en cuenta ni elementos ni propiedades, pudiendo incluir en las descripciones atributos irrelevantes. En este nivel no generaliza características de una figura a otras de su misma clase.
Calidad de Respuesta en el Nivel 1	
Pre-estructural: -Se conocen conceptos y propiedades asociados, como elementos nominales. Por ejemplo: reflejo, espejo. - Se incluyen generalizaciones de atributos irrelevantes tales como que el espejo es vertical siempre. - Con un espejo puede observar reflejos de figuras y objetos. - Intenta dibujar el reflejo de una figura. **Uni-estructural:** Reconoce que hay un movimiento o reconoce que hay un eje. **Multi-estructural:** Reconoce que hay un movimiento y un eje relacionado con ese movimiento. **Relacional:** - Elije un punto de la figura y encuentra su reflejo (con material concreto). - Relaciona el movimiento con el eje. -Dado un conjunto de figuras trata de identificar las que pueden tomarse una como imagen reflejada de la otra con respecto a un eje (espejo imaginario). Trata de justificar sus respuestas. **Abstracción:** Hasta el momento intenta concluir tomando en cuenta lo experimentado, es decir: Sobre las características que no varían (permanecen invariantes) entre el objeto (o figura) y su reflejo. Y la forma en que están colocadas las figuras y sus reflejos.	
Nivel 2 de Razonamiento	Descripción
Análisis	El profesor debe comprender la importancia de emplear una definición de un objeto matemático. Poder delimitar, es decir, poder expresar las propiedades del objeto matemático que lo distinguen de los demás. El profesor en este momento, identifica y generaliza propiedades informalmente, pero no establece relaciones entre ellas y todo descubrimiento o verificación lo hace a través de la experimentación; por otra parte, los conceptos los define dando ciertos detalles de propiedades, agregando algunas innecesarias u omitiendo otras imprescindibles.
Calidad de respuesta en el Nivel 2	
Pre-estructural: - Comprende que debe atender una definición del objeto geométrico. No trata de apropiarse del objeto sólo a través del sentido común. -Intenta experimentar con diferentes puntos de la figura. -Intenta dibujar el reflejo de otra figura con ejes distintos al vertical. **Uni-estructural:** Enuncia que al reflejar las figuras mantienen sus características (invariantes) pero además de manera informal comenta que el eje de reflexión (espejo imaginario o doblez de papel) se encuentra en medio de la figura original y su reflejo. **Multi-estructural:** -Al unir con una línea un punto de la figura y el reflejo de éste, inicia las mediciones del punto original al eje y del eje al punto reflejado. De la misma forma lo intenta para más puntos de la figura. -Observan detalles con respecto al punto anterior, es decir, identifican que se conservan las características de la figura. Por ejemplo, lados, ángulos etc. - Identifica que un punto de la figura original tiene igual distancia al eje de reflexión que su homólogo en la figura reflejada. **Relacional:** Relaciona informalmente las estructuras identificadas. Por ejemplo, puede comprender (en algunos casos particulares prototípicos) que la figura conserva su tamaño y forma, pero que además la transformación de usar el eje de reflexión (espejo) tiene características propias: en una reflexión cada punto del objeto original tiene su homólogo a igual distancia respecto del eje y que además el segmento de recta que une el punto original de su homologo es perpendicular al eje de reflexión (espejo). **Abstracción:** Generaliza que la Reflexión es una transformación Isométrica (o movimiento isométrico por lo que siempre la figura conserva su tamaño y forma) , indica la importancia de la existencia del eje de reflexión, de la equidistancia de un punto de la figura original (p) al eje y de este al punto reflejado(p´), y la perpendicularidad (del segmento pp’ con respecto al eje de reflexión) -Logra establecer una definición con sus propias palabras, no necesariamente correcta, pero con una estructura formal. Tal vez enuncie un conjunto mínimo de condiciones para decir que una figura sea reflejo de otra.	
Nivel 3 de Razonamiento	Descripción
Clasificación	El profesor realiza clasificaciones de los objetos geométricos y descubre nuevas propiedades o relaciona las ya conocidas por medio del razonamiento informal. Puede dar argumentos deductivos informales para demostrar sus conjeturas. Describe los objetos geométricos de manera formal, es decir, que comprende el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.

<table>
<tr><td colspan="2">Calidad de respuesta en el nivel</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pre-estructural:
-Dada una figura y su reflejo encuentra el eje de reflexión.
- De manera informal comenta que el eje es único.
- Uniestructural:
- Intenta justificar de manera puntual: que dado un punto P y su reflejo P’ existe sólo un eje de reflexión (el cual es mediatriz del segmento de recta PP’).
- Puede realizar una reflexión seguida de otra (con ejes paralelos y no paralelos). Todavía no la identifica como una composición de reflexiones.
- Observa que una composición de reflexiones no es otra reflexión:
- Una composición de reflexiones cuyos ejes son paralelos es otra transformación llamada traslación.
-Una composición cuyos ejes no son paralelos es otra transformación llamada rotación cuyo centro es el punto de corte entre los ejes y cuyo ángulo es el doble del ángulo formado por los ejes. Aunque a la composición de reflexiones no la nombre como tal, sino como una reflexión seguida de otra.
Multiestructural: Enuncia lo vivenciado al trabajar una reflexión seguida de otra con ejes paralelos y no paralelos. No logra generalizar la relación entre las isometrías.
Relacional:
-Observa que una reflexión es un movimiento isométrico (una transformación), al igual que la rotación y la traslación. Las cuales conservan tamaño y forma en las figuras.
-Relaciona la reflexión con las otras isometrías (rotación y traslación).
Abstracción:
Logra una definición formal de reflexión (dadas varias propiedades o condiciones, selecciona un conjunto mínimo de manera que definan una reflexión).
Logra un resumen de lo observado, generalizando que la reflexión tiene la propiedad de generar las demás isometrías.</td></tr>
<tr><td>Nivel 4 de Razonamiento</td><td>Descripción</td></tr>
<tr><td>Prueba</td><td>El profesor realiza razonamientos lógicos formales, relacionando implicaciones simples para llegar desde la hipótesis hasta la tesis. Acepta la existencia de definiciones equivalentes y de demostraciones alternativas. Comprende la estructura axiomática de las matemáticas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Calidad de respuesta en el nivel 4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Preestructural:
-Intenta experimentar, no sólo con una figura, sino con otras figuras bidimensionales como los mosaicos o teselaciones: Dadas ciertas parejas de teselaciones (en acetatos) el profesor realizará diferentes movimientos. Tratando de encontrar que transformación deja invariante el espacio bidimensional.
Uniestructural:
- Describe detalladamente las transformaciones que dejan invariantes las configuraciones definidas por las respectivas teselaciones.
- Intenta la reflexión de una figura más compleja que los objetos geométricos prototípicos, (teselaciones) sin evaluar el espacio resultante.
Multiestructural: Intenta la reflexión de un mosaico o teselación, experimentando diferentes ejes (vertical y horizontal). Observando que al reflejar con cierto eje la configuración de la teselación no permanece invariante.
Relacional: En cualquier situación, tal como reflejar una figura o comparar reflexiones dadas, identifica que ciertas reflexiones dejan el espacio bidimensional invariante. Explica, que por lo menos en un ejemplo (de las parejas de teselaciones o mosaicos) en donde al aplicar una reflexión la configuración la teselación no permanece invariante.
Abstracción:
El profesor inicia la comprensión de la relación reflexión – simetría de manera formal. Comprenden a los conceptos de reflexión y simetría como objetos diferentes, aunque estén relacionados. Pudiendo enunciar que no toda reflexión genera una simetría, y que una simetría puede generarse o no por otras transformaciones.
Intenta una definición de simetría.</td></tr>
</table>

LA MUESTRA

Con base en el modelo se diseñó el instrumento diagnóstico y se aplicó a un grupo de 23 profesores de secundaria (en activo) del Estado de Sinaloa. Todos estaban inscritos en un diplomado sobre Didáctica y Contenidos Matemáticos, por parte de la Secretaría de Formación Continua de la Secretaría de Educación Pública.

El perfil profesional de los profesores de la muestra es heterogéneo, como resultado de la convocatoria nacional para el otorgamiento de plazas docentes de la SEP. Se dispuso de profesores con diferentes licenciaturas y con la Formación Matemática. Entendiendo por Formación Matemática poseer la especialidad en Matemáticas o Educación Matemática (licenciatura o maestría).

CUESTIONARIO DIAGNÓSTICO

Nombre____

Formación profesional ________________ Antigüedad ____________

Lugar donde labora___________________________

1) ¿Consideras importante hablar de movimientos en geometría?, justifique su respuesta.

2) ¿Qué tipo de transformaciones abordas en la clase de geometría?

3) ¿Manejas en clase el concepto de homotecia?, ¿Cómo introduces el concepto? Menciona algunos materiales de apoyo para este concepto.

4) ¿Cómo les presentas el concepto de isometría a tus alumnos? ¿Qué movimientos isométricos les mencionas?

5) ¿Cómo relacionas el concepto de isometría con el de simetría?

En las preguntas 6 y 7 marque y justifica tu respuesta.

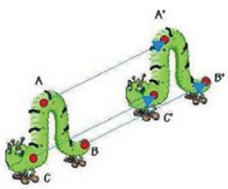
6) En tus clases se realizan actividades usando algún material manipulativo como el geoplano, el tangram, espejos, doblez de papel etc.
   a) Nunca b) Habitualmente c) De manera ocasional
7) ¿Usas algún software de geometría dinámica para la enseñanza de las transformaciones geométricas?
   b) Nunca b) Habitualmente c) De manera ocasional

8) Dadas las siguientes figuras comenta:

a) ¿Qué tipo de transformación o movimiento sufrió cada una de ellas?

b) ¿Observas en las tres figuras características que no varían después de sufrir una transformación? ¿Cuáles?

FIGURA 1



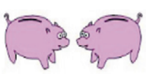


FIGURA 2

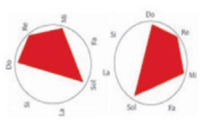
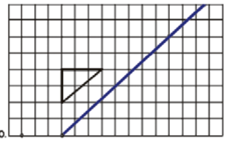


FIGURA 3

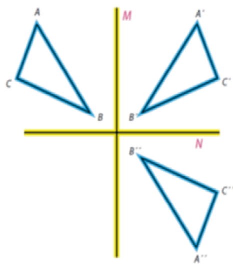
9) Dibuja una figura y una linea recta sobre una hoja de papel, obtén la imagen reflejada de dicha figura, como si la linea fuera el espejo. Has una descripción del procedimiento que realizaste.
   a. Haciendo uso de la figura anterior toma solo punto de la figura original y llámale p y al reflejo de ese punto llámale p'.
   b. Mediante un segmento de recta une los puntos p y p´. Mide la distancia del punto p al espejo y del espejo a p'. ¿cómo son esas distancias?
   c. ¿Cómo es ese segmento con respecto a la línea de su espejo?

10) Intenta dar una definición formal de la transformación geométrica que has experimentado en los incisos anteriores.

11) Dada la siguiente figura trata de dibujar su reflejo con respecto al eje dado.



12) El triángulo $A''B''C''$ se obtuvo al hacer dos reflexiones del triángulo ABC respecto a las rectas perpendiculares M y N respectivamente, como se muestra a continuación.

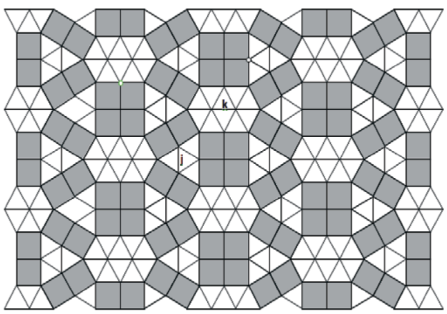


¿Qué transformación tuvo el triángulo ABC al hacer estas dos reflexiones?

a. Se obtuvo una traslación del triángulo
b. Se obtuvo una rotación de 180º del triángulo.
c. Se obtuvo un triángulo $A''B''C''$ simétrico con respecto a la recta M.
d. Se obtuvo una rotación del triángulo menor de 180º.

13) Dado el siguiente recubrimiento del espacio, ¿Qué transformación deja invariante este espacio bidimensional? Puedes experimentar con las transparencias que se te proporcionan.

14) Dado el siguiente espacio trata de experimentar haciendo una reflexión con el eje **k** (horizontal) y el eje **j** (vertical).



Anota tus observaciones, trata de hacer un resumen tomando en cuenta las siguientes preguntas. ¿La imagen de cualquier figura reflejada es siempre una simetría? Es decir, ¿Toda reflexión hace que el espacio permanezca invariante?

CREENCIAS Y DIFICULTADES DETECTADAS EN LOS PROFESORES DE LA MUESTRA

Ubicados los profesores en algún nivel de Razonamiento-Calidad se procedió al análisis descriptivo y resumimos:

- El 60.87% de la muestra confunde el concepto de reflexión con el de simetría.
- El 60.87% de los profesores no detectan las características que permanecen invariantes.
- No logra distinguir la importancia de la perpendicularidad como condición para que una figura sea reflejo de otra. (El 30.43% de la muestra).
- Sólo el 30.3% de los profesores logra una definición formal de reflexión.
- El 30.4% de los profesores se le dificulta trabajar con ejes oblicuos. Por la tendencia a trabajar sólo con ejes verticales y horizontales.
- El 43.48% no tiene claro el resultado de aplicarle una reflexión seguida de otra reflexión a una figura (composición de reflexiones).
- Dado que no se tiene claro el concepto de reflexión, al realizar la composición de reflexiones con ejes perpendiculares afirman que la transformación obtenida es una figura simétrica con la primera, con respecto al eje vertical, como sucedió con el 17.4% de la muestra.
- Un 21.73% de profesores en el reactivo 14, que contiene teselaciones, se limita a describir cómo está construida la teselación.

VARIABLES DEFINIDAS PARA EL ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Las variables representan características del profesor tanto de formación académica como de manejo de contenidos: Género, antigüedad, formación matemática (FM), número de respuestas correctas (RC), número de respuestas incorrectas (RI), respuestas parcialmente correctas (PC), nivel de razonamiento (NR), nombra de manera correcta a la "reflexión" (REF), identifica equidistancia (IE), identifica perpendicularidad (IP), logra definición formal de reflexión (LDR), trabaja con teselaciones (TT), identifica propiedades invariantes (PI), refleja con ejes oblicuos (REO), concluye que no siempre una reflexión es una simetría (CNRS).

RESULTADOS DE LAS PRUEBAS DE INDEPENDENCIA ENTRE LAS VARIABLES

Existen variables de gran importancia por lo que fue necesario evaluar la relación e independencia entre ellas. Se realizaron pruebas de Chi-cuadrado. Sólo mostramos el análisis completo de una prueba (Tablas 2 y 3).

En resumen, la muestra parece arrojar evidencia de que:

Las variables "nombrar de manera correcta la reflexión" (REF) y "lograr definición formal de reflexión" (LDR) no son independientes (Figura 1).

Tabla 2. Profesores que cumplen con REF y LDR.

Tabla de contingencia, Nombra de manera correcta la reflexión Logra definición formal de reflexión

		LOGRA DEFINICIÓN FORMAL DE REFLEXIÓN		Total
		NO	SI	
NOMBRA DE MANERA CORRECTA LA REFLEXIÓN	No	6	6	12
	SI	10	1	11
Total		16	7	23

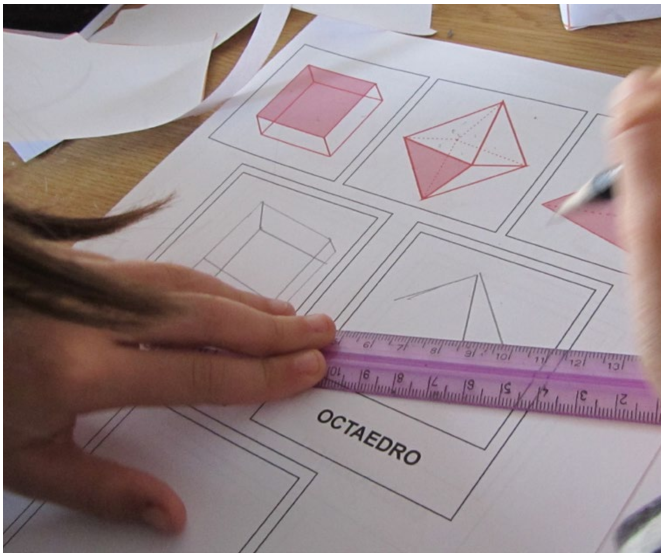
Tabla 3. Prueba de independencia entre REF y LDR.

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
chi-cuadrado de Pearson	4.537[a]	1	.033		
Corrección por continuidad[b]	2.810	1	.094		
Razón de verosimilitudes	4.930	1	.026		
Estadístico exacto de Fisher				.069	.045
Asociación lineal por lineal	4.339	1	.037		
N de casos válidos	23				

a. 2 casillas (50.0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 3.35
b. Calculado sólo para una tabla de 2x2

Ho: Las variables "nombrar de manera correcta la reflexión" (REF) y "logra definición formal de reflexión" (LDR) son independientes.



H1: Las variables "nombrar de manera correcta la reflexión" (REF) y "logra definición formal de reflexión" (LDR) no son independientes.

Observando en la tabla 3, el p-valor, el cual fue 0.033 se rechaza Ho si consideramos α=0.05, por lo que la muestra parece arrojar evidencia de que la variable REF y la variable LDR no son independientes.

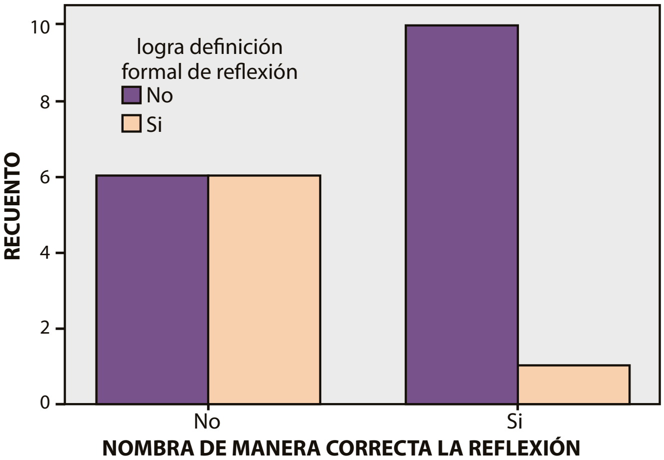


Figura 1. Profesores que nombran de manera correcta la reflexión y logran una definición formal de reflexión.

2) No hay evidencia como para negar la independencia entre las variables FM y LDR.
3) De la identificación de la equidistancia no se desprende que los profesores puedan identificar la reflexión. Un reducido número de profesores (2 de 23) no pudieron identificar la equidistancia y tampoco lograron identificar la reflexión, pero hay un caso curioso en el cual una persona nombra de manera correcta la reflexión y no identifica equidistancia.
4) Las variables "nombrar de manera correcta la reflexión" (REF) e "identificar equidistancia" (IE) son independientes.
5) Las variables "nombrar de manera correcta la reflexión" (REF) y la variable "identificar perpendicularidad" (IP) son independientes.
6) Si un profesor no logra identificar la equidistancia, entonces no es capaz de discriminar una reflexión de una simetría.
7) Las variables "el concluir que no siempre una reflexión es una simetría" (CNRS) y la variable "trabajar con teselaciones" (TT) no son independientes.

ANÁLISIS MULTIVARIANTE POR DISCRIMINANTE

Se realizó un análisis multivariado por discriminante utilizando el software SPSS [12]. La variable cualitativa que se utiliza para discriminar entre grupos es Nivel de Razonamiento (NR), cuyos valores se clasificaron en cuatro grupos (Figura 2).

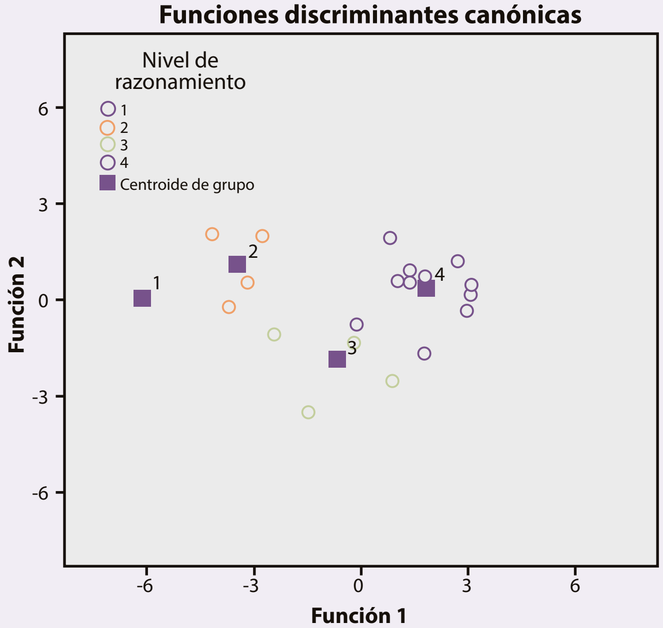


Figura 2. Presentación de los centroides. Los cuales representan cada nivel de razonamiento.

El análisis respondió algunos de nuestros cuestionamientos, como el hecho de que la variable "formación matemática" (FM) tiene mayor nivel de importancia, mientras que la variable "logra dar una definición de reflexión" (LDR) tiene menor peso. El hecho de que el profesor identifique las propiedades de reflexión (perpendicularidad o equidistancia) no necesariamente lo conduce a plasmar en su hoja de trabajo una definición formal, y la imposibilidad de plasmar una definición formal no es una limitante para que continúe trabajando correctamente en las siguientes actividades que lo llevan a un nivel superior de Razonamiento-Calidad.

La matriz de estructura mostrada en la tabla 4 identifica la carga o correlación entre cada variable independiente y cada función. En la matriz de estructura está señalada con asterisco la mejor contribución, de cada variable, a cada función discriminante.

Tabla 4. Correlación entre cada variable independiente y cada función.

Matriz de estructura

	Función		
	1	2	3
Refleja respecto a ejes oblicuos	.481*	-.412	-.274
Formación matemática	.150*	-.128	-.085
Nombra correctamente a la reflexión	.143*	.032	.022
Trabaja con teselaciones	.264	.712*	-.044
Indentifica perpendicularidad	.212	-.469*	.178
Indentifica propiedades invariantes	.139	-.291*	-.020
Indentifica equidistancia	.202	-.213	.713*
Concluye que no siempre una reflexión es una simetría	.202	.231	-.253*
Logra definición formal de reflexión	.036	-.095	.163*

Correlaciones intra-grupo combinadas entre las variables discriminantes y las funciones discriminantes canónicas tipificadas.

Variables ordenadas por el tamaño de la correlación con la función.
* Mayor correlación absoluta entre cada variable y cualquier función discriminante.

El análisis por discriminante evaluó la clasificación que se hizo anticipadamente. Como puede observarse en la tabla 5, solamente un caso estuvo mal asignado, es decir, el 95.7% de los casos se discriminaron correctamente. La función discriminante que se obtiene permite ubicar a un nuevo caso en algún Nivel de Razonamiento-Calidad.

Tabla 5. Evaluación de la clasificación realizada por el investigador.

Resultado de la clasificación

			Grupo de pertenencia pronosticado				
		Nivel de razonamiento	1	2	3	4	3
Original	Recuento	1	1	0	0	0	1
		2	0	4	0	0	4
		3	0	0	5	0	5
		4	0	0	1	12	13
	%	1	100.0	.0	.0	.0	100.0
		2	.0	100.0	.0	.0	100.0
		3	.0	.0	100.0	.0	100.0
		4	.0	.0	7.7	92.3	100.0

a. Clasificados correctamenteel 95.7% de los casos agrupados originales.

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

El modelo Niveles de Razonamiento-Calidad es un instrumento que permitió hacer una clasificación de las creencias y conocimientos de los profesores de acuerdo al razonamiento que muestran hacia algunos cuestionamientos y la calidad del mismo. En este proceso, se puede apreciar el uso de creencias y concepciones erróneas, lo que lleva a un profesor a identificar sólo casos particulares de un concepto matemático. Por ejemplo, el hecho de tener la misma concepción de reflexión que de simetría (confunde la simetría con un movimiento) le impide estar en posición de comprender a la simetría como un rasgo característico de formas geométricas, sistemas o ecuaciones, relacionado con su invariancia bajo ciertas transformaciones o movimientos. De acuerdo a los resultados: el profesor podría, mediante una secuencia didáctica, de manera general que el conocimiento de diferentes transformaciones geométricas es un modo de comprender diferentes geometrías, en el sentido del programa de Erlangen estudio de Felix Klein en 1872 ver [13]. Esta secuencia podría también reducir las dificultades provocadas por sus creencias, su diseño y puesta en escena forma parte de una siguiente fase de nuestra investigación.

BIBLIOGRAFÍA

1) L. Contreras y J. Carrillo, Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. Educación de Matemática. 7, 3, pp.26 – 37, 1995.
2) SEP, Subsecretaría de Educación Básica, 2011. http://dgdgie.basica.sep.gob.mx/consultemos.
3) M. Chacara, Las nociones de isometría y simetría en el plano, estudiadas a través del Modelo de Van Hiele, enriquecido con principios constructivistas. Tesis de Maestría, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora. México. 2004.
4) J.R. Vargas, M.E. Parra, y J.L. Díaz. Errores conceptuales institucionalizados en Matemáticas. EPISTEMUS, vol.17, pp.56-62, 2014.
5) X. Thaqi, Aprender a enseñar transformaciones geométricas en Primaria desde una perspectiva cultural. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemáticas. Universidad de Barcelona, España, 2009.
6) M. Serra. Discovering geometry - an inductive approach. California, USA: Key Curriculum Press, 2002.
7) D.C. Kay. College geometry: a discovery approach. Boston: Pearson Addison-Wesley, 2008
8) M.A. Armstrong, M. A. Groups and symmetry. New York, N.Y.; London: Springer, 2011.
9) A. Gutiérrez, A. Jaime & J. M. Fortuny, An Alternative Paradigm to Evaluate the Acquisition of the van Hiele Levels. Journal for Research in Mathematics Education, 22(3), pp. 237-251. 1991.
10) A. Gutiérrez, A., y A. Jaime, Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Valencia: Escuela Universitaria del Profesorado de Educación General Básica, 1986.
11) P. Huerta. Los Niveles de Van Hiele y la Taxonomía SÓLO: Un análisis comparado, una integración necesaria. Enseñanza de las Ciencias, 17 (2). Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia, pp. 291-309. 1999.
12) F. Brosius. SPSS 19. Heidelberg: Mitp, 2011.
13) H.W. Eves. Estudio de las geometrías: Tomo II. México: UTEHA, 1969.