

PRESIÓN EN MEDIOS GRANULARES EN SILOS: EXPERIMENTOS PARA UN CURSO DE FLUIDOS

SAULO HERNÁNDEZ LÓPEZ, TADEO PEÑA MORENO, HERIBERTO ACUÑA
CAMPA, FRANCISCO MONTES BARAJAS, LAURA L. YEOMANS REYNA*

RESUMEN

Se presentan las experiencias obtenidas en el análisis del comportamiento estático de un medio granular en un silo. Haciendo uso de un dispositivo experimental construido para tal fin, se explora el comportamiento de la presión ejercida sobre el fondo de un silo cuando sobre él descansa una columna de medio granular (maíz) sobrecargado y se compara con el de un líquido. Se utiliza el modelo teórico de Janssen

para describir el comportamiento de la presión, obteniendo resultados satisfactorios. Este trabajo podrá servir de base en la elaboración de protocolos de prácticas para los laboratorios de los cursos de física clásica que se imparten en los programas de licenciatura en ciencias e ingeniería.

Palabras clave: Medio granular, modelo de Janssen, fluido, presión manométrica, prototipo experimental.

SAULO HERNÁNDEZ LÓPEZ
Correo: saulohdez@gmail.com
TADEO PEÑA MORENO
Correo: tadeo-moreno@hotmail.com
DR. HERIBERTO ACUÑA CAMPA
Correo: hacuna@correo.fisica.uson.mx
L. F. FRANCISCO MONTES BARAJAS
Correo: fmontes@correo.fisica.uson.mx

DRA. LAURA L. YEOMANS REYNA
Correo: lyeomans@correo.fisica.uson.mx
Departamento de Física, Universidad de
Sonora

*Autor para correspondencia: Dra. Laura L. Yeomans Reyna
Correo electrónico: lyeomans@correo.fisica.uson.mx
Recibido: 26 de Marzo del 2015
Aceptado: 5 de Junio del 2015
ISSN: 2007-4530

INTRODUCCIÓN

En los cursos de física del eje de formación básica de las licenciaturas en ciencias e ingeniería, se incluye el estudio de la estática de fluidos, dentro de la cual la ecuación fundamental de la hidrostática juega el papel central [1]. Esta ecuación establece que la relación entre la presión de un líquido de densidad uniforme y la profundidad en el mismo es lineal. Este comportamiento y sus consecuencias se abordan experimentalmente en una serie de prácticas de laboratorio o de materiales didácticos.

Si bien es cierto que los líquidos, como el agua, son las sustancias más utilizadas a nivel industrial, los segundos en importancia lo conforman los materiales sólidos en forma granular. Como un ejemplo importante señalamos que el almacenamiento de granos para el consumo humano se realiza haciendo uso de silos especialmente construidos para tal fin [2].

Los medios granulares consisten en un conjunto de objetos macroscópicos que interactúan entre sí mediante fuerzas de contacto. El tamaño de los granos que constituyen este tipo de materiales abarca desde milímetros hasta metros [3]. Así algunos ejemplos incluyen granos de maíz, arena, rocas, entre otros. Como lo señala Sperl [4], el interés de la comunidad científica por entender el comportamiento de los medios granulares tanto en sus propiedades estáticas como dinámicas ha crecido considerablemente a partir de las últimas décadas del siglo veinte [5-6].

A pesar de las similitudes que existen entre los líquidos y los medios granulares, encontramos que propiedades tan fundamentales y sencillas de cuantificar para un líquido, como la densidad, en el caso de los medios granulares medirlas se convierte realmente en un problema no trivial. El valor numérico de la densidad en el caso de medios granulares es fuertemente dependiente de la forma en la cual se colocan los granos en el recipiente que lo contiene, de la razón entre tamaño de grano y longitud característica del recipiente, de vibraciones presentes, entre otras.

Con el objetivo de abonar a la discusión sobre las similitudes y diferencias entre el comportamiento de un líquido y un medio granular en condiciones estáticas, en este artículo de docencia presentamos una metodología y prototipo experimental, así como un modelo teórico, que nos permite estudiar el comportamiento de la presión ejercida por un medio granular en el fondo de un silo cilíndrico con y sin carga sobre su superficie libre.

PROTOTIPO EXPERIMENTAL

En 1895 el Ingeniero alemán H. A. Janssen publicó resultados sobre la medición de la presión de granos de maíz en silos. Uno de sus principales resultados mostró la existencia de una presión de saturación, es decir, que a partir de una cierta altura de grano la presión en el fondo permanecía constante. Posteriormente Janssen elaboró un modelo para explicar este comportamiento [1].

En nuestro caso y con un objetivo fundamental de enseñanza dentro del curso de fluidos, se construyó un

prototipo relativamente pequeño y versátil, que además considera una forma radicalmente distinta de medir la presión hidrostática en el fondo del silo. En lugar de utilizar una balanza en el fondo del recipiente para determinar la presión, se colocó un sistema de membrana y tubo piezométrico que nos permite determinar la presión ejercida por el medio granular sobre el fondo, midiendo alturas de agua en el tubo piezométrico.

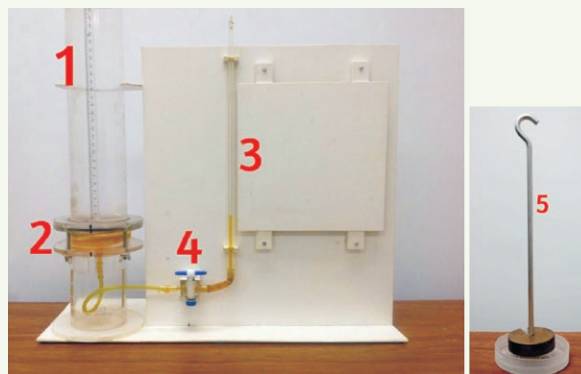


Figura 1. Prototipo experimental (izquierda) y sistema para "cargar" el medio granular (derecha).

En la fotografía de la figura 1 (izquierda) se muestra el dispositivo que consta de un recipiente cilíndrico (1) de acrílico transparente de 6.92 cm de diámetro interno y longitud de 30 cm. En el fondo del silo se ha colocado una membrana de latex distendida y sujeta a las paredes del silo (2). Bajo la membrana está dispuesta una cámara de 2.5 cm de altura que se encuentra completamente llena de líquido manométrico (agua coloreada). En la parte inferior y en el centro de ésta se coloca una manguera plástica transparente que a su vez se conecta a una llave de paso de vidrio y teflón (4) que controlará el flujo hacia un tubo piezométrico vertical y abierto a la atmósfera de 1/8" de diámetro interno, que descansa sobre una placa de acrílico vertical de 35 cm x 39 cm (3). Junto al tubo piezómetro se coloca una cinta de papel sobre la cual se marcan las posiciones del menisco del líquido en el tubo piezométrico, al mismo tiempo permite determinar los cambios en altura cuando se modifica la cantidad del grano en el silo o se agrega carga sobre la superficie del medio granular. Sobre el silo de acrílico se coloca una regla para medir la altura del medio granular. Este sistema descansa en una base, también de acrílico, de 18 cm x 49 cm.

Para el caso de los experimentos con medios granulares con carga se dispuso de un sistema como el que se ilustra en la figura 1. Como puede observarse consiste de un portapesas, adherido a una base (tapadera plástica), sobre el cual se pueden colocar diferentes masas. Es importante que el área de la base sea suficientemente grande para cubrir adecuadamente la superficie libre del medio granular.

Adicionalmente se utilizó una balanza digital (0.01g) para medir la masa del medio granular y un vernier

milimétrico para medir las alturas en el tubo piezométrico.

En nuestro caso utilizamos maíz palomero, por las características de densidad y tamaño del grano que hace factible la medición bastante adecuada de alturas a columnas pequeñas en nuestro prototipo.

PRESIÓN EN EL FONDO DEL SILO

Para determinar la presión en el fondo del silo, se implementó el siguiente protocolo experimental:

1. Con la llave de paso abierta, se procede a colocar la cinta de papel junto al tubo piezométrico y colocar la referencia que definirá el origen de las mediciones de longitud, sin medio granular. Se cierra la llave de paso.
2. Medir la masa (M_T) de una cantidad de grano y verterla cuidadosamente dentro del silo, tratando de lograr una distribución uniforme en el fondo del silo.
3. Abrir la llave de paso para permitir que el líquido manométrico fluya por el tubo piezométrico. Esperar el tiempo necesario para que se establezca la altura.
4. Cerrar la llave de paso y proceder a colocar la referencia que indica la posición del menisco del líquido manométrico en el tubo piezométrico. Esta proporcionará el valor de la altura h' de la columna del líquido manométrico que nos permitirá posteriormente determinar la presión hidrostática ejercida por el medio granular sobre el fondo del silo.
5. Haciendo uso del portacargas se coloca una pesa de masa definida y se determina la masa M_w (masa del portacargas + masa de la pesa) que es la carga total sobre la superficie del medio granular.
6. Se coloca cuidadosamente, sin tocar las paredes internas del silo, el portacargas sobre la superficie libre del medio granular.
7. Se abre la llave de paso para permitir que fluya de nuevo el líquido manométrico según las condiciones del silo cargado y esperar el tiempo suficiente para que se establezca su altura en el tubo piezométrico. Cerrar la llave de paso y proceder a colocar sobre la cinta de papel la marca que indica la posición del menisco. Esta será la medición que nos permitirá calcular la presión hidrostática en el fondo del silo con el medio granular y la carga seleccionada.
8. Si se coloca otra carga sobre el medio granular, repetir los pasos 5-7.

Antes de pasar a mostrar los resultados obtenidos, es conveniente señalar que es experimentalmente adecuado mostrar el comportamiento de la masa efectiva en función de la masa total del medio granular.

La presión hidrostática que se mide con el sistema del tubo piezométrico podemos pensarla como la presión ejercida por el peso W_e de una masa efectiva M_e que descansa sobre la membrana (ver (2) en figura 1), de forma tal que podemos escribir:

$$p(h) = \frac{M_e g}{A} \quad (1)$$

La masa equivalente M_e se obtiene del valor de la presión $p(h)$ que se determina de la medición de la altura $h=h'$ de la columna del líquido manométrico en el tubo piezométrico (paso (4) del protocolo):

$$p(h) = \rho_l g h' \quad (2)$$

donde ρ_l es la densidad del líquido manométrico (agua en nuestro caso), de forma tal que al igualar las ecs. (1) y (2) se obtiene que:

$$M_e = \rho_l A h' \quad (3)$$

Tabla 1. Resultados experimentales

$M_w = 0.0 \text{ g}$		$M_w = 18.88 \text{ g}$		$M_w = 38.12 \text{ g}$	
$M_T \text{ (g)}$	$M_e \text{ (g)}$	$M_T \text{ (g)}$	$M_e \text{ (g)}$	$M_T \text{ (g)}$	$M_e \text{ (g)}$
30.08	29.71	50.02	51.90	30.08	55.85
40.02	36.85	70	60.55	40.02	68.45
50.04	42.12	80.02	68.07	50.01	77.66
60.04	45.13	90.08	75.97	60.03	82.36
70.05	50.39	100.05	77.476	70.06	85.37
80.04	57.16	110.04	80.86	80.04	86.5
90.07	62.05	120.03	83.49	90.07	88.75
100.02	66.19	130.05	85.93	100.01	89.51
110.04	69.20	140.1	89.51		
120.04	74.84	150.05	85.93		
130.07	72.58	160.12	93.27		
140.03	84.24	180.08	102.29		
150.01	83.87				
160.09	84.99				
170.03	85.75				
180	89.13				

En la tabla 1 se incluyen los datos experimentales obtenidos para la masa equivalente M_e en función de la masa del medio granular M_T con el prototipo descrito previamente. En ella se incluyen resultados para el caso sin carga ($M_w = 0 \text{ g}$) y dos casos representativos obtenidos para silos cargados con $M_w = 18.88 \text{ g}$ y 38.12 g .

Como se muestra en la figura 2 a diferencia de lo que se observa en el caso de la presión hidrostática de un líquido, el comportamiento lineal entre la masa equivalente M_e y la masa del medio granular M_T solamente se manifiesta para el caso de columnas pequeñas de medio granular (masa M_T pequeñas). La masa equivalente M_e , que es proporcional a la presión ejercida sobre el fondo del silo, se observa que aumenta más lentamente para columnas mayores de medio granular (masa M_T grandes), advirtiéndose valores de saturación para columnas aún más grandes. Es decir,

el comportamiento es no-lineal para columnas medianas y grandes (aproximadamente mayores al radio del silo), siendo esta manifestación aun más evidente conforme se incrementa la masa de la carga que descansa sobre la superficie libre del medio granular.

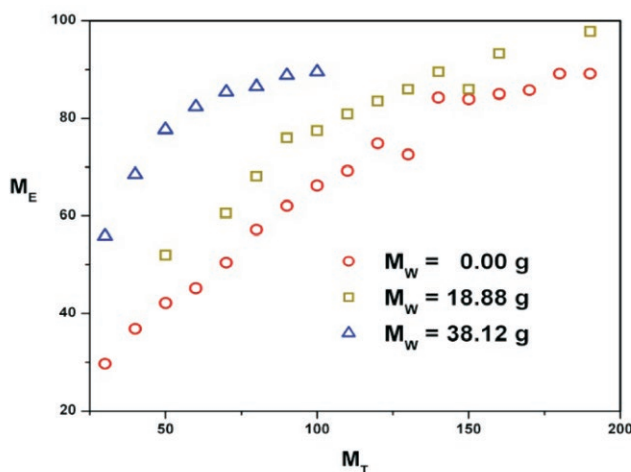


Figura 2. Masa equivalente en el silo respecto a la masa del medio granular (maíz) con y sin carga.

Con el objetivo de darle un marco conceptual a estos resultados experimentales, presentamos a continuación el modelo planteado por Janssen para tratar de explicar el comportamiento observado.

MODELO DE JANSSEN

Para desarrollar el modelo de Janssen, veamos la figura 3, donde se ilustra un elemento de volumen de medio granular de volumen $dV = Adh$ localizado a una profundidad h de la superficie libre del mismo. Observemos que el elemento de volumen está delimitado radialmente por la superficie del recipiente que lo contiene y que para el caso estaría determinado por la geometría del silo. En nuestro caso (silo cilíndrico) el área transversal sería $A = \pi r^2$.

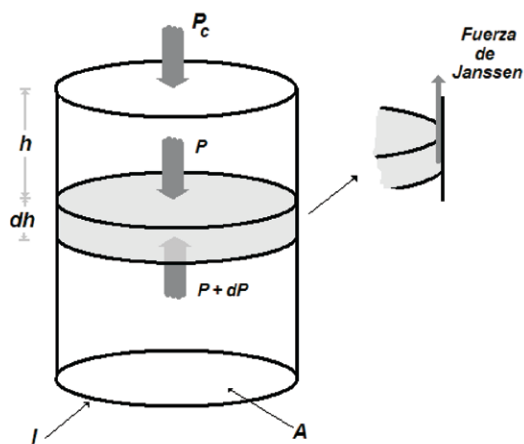


Figura 3. Modelo de Janssen.

Considerando que el medio granular se encuentra en reposo, necesariamente la fuerza neta ejercida sobre el elemento de volumen dV por el medio ambiente circundante deberá ser nula. En este modelo, las fuerzas presentes sobre el elemento de volumen son: la del medio granular que descansa sobre éste, la del medio granular que se encuentra por debajo, el peso del elemento de volumen y la fuerza ejercida por la pared del silo.

Uno de los aspectos esenciales del modelo de Janssen se encuentra en la forma como se incluye la fuerza que ejerce la pared del silo sobre el medio granular. La naturaleza de esta fuerza es de carácter disipativo, es decir, se debe a que entre el medio granular y la pared del silo existe una fuerza de fricción que interviene haciendo posible que la pared misma ayude a sostener parte del peso del medio granular. Se plantea considerar que la fuerza de fricción ejercida por la pared interna del silo es proporcional a la fuerza ejercida por el medio granular sobre la pared, de forma tal que la ecuación de balance de fuerzas sobre el elemento de volumen de medio granular se expresa como:

$$(p + dp)A - pA - \rho g A dh + \mu_s K l p dh = 0 \quad (4)$$

o bien

$$dp - \left(\rho g - \frac{\mu_s K l p}{A} \right) dh = 0 \quad (5)$$

donde p es la densidad del medio granular, μ_s el coeficiente de fricción estática entre la pared interna del silo y el medio granular, l el perímetro del corte transversal circular del silo y K la constante de proporcionalidad del modelo de Janssen. "Es importante resaltar que la contribución del Modelo de Janssen se refleja en el último término de la ec. (4)", de tal manera que si éste se omite, la ecuación diferencial se reduce a la ecuación fundamental de la hidrostática. Ahora, integrando la ecuación (5) desde $h = 0$ (superficie libre del medio granular) hasta una profundidad h obtenemos que:

$$p_H = p_c e^{-\frac{\mu_s K l h}{A}} + \frac{\rho g A}{\mu_s K l} \left(1 - e^{-\frac{\mu_s K l h}{A}} \right) \quad (6)$$

donde p_c representa la presión ejercida por una carga colocada sobre la superficie libre del medio granular.

Para el caso de sistemas sin carga ($p_c = 0$) la ec. (6) se reduce a:

$$p(h) = \frac{\rho g A}{\mu_s K l} \left(1 - e^{-\frac{\mu_s K l h}{A}} \right) \quad (7)$$

misma que incluye dos casos límites interesantes: para el caso de columnas grandes de medio granular ($h \gg A/\mu_s K l$) el término de la exponencial será muy pequeño, de forma tal que en este límite la ec. (7) nos dice que la presión se satura y adquiere un valor constante $p_s = \frac{\rho g A}{\mu_s K l}$. Esto indica que para columnas de medio granular muy grandes, el colocar más medio granular sobre ellas no se verá reflejado en un incremento en la presión en el fondo del silo. Este es un aspecto muy peculiar que diferencia la presión hidrostática ejercida por un líquido y por un medio granular. Mientras que en el primer caso la presión en el fondo del

recipiente se incrementa linealmente con la altura de la columna líquida, en el segundo se tendrá una presión límite independientemente de cuanto mas grande se haga la columna del medio granular. Para el caso de columnas pequeñas de medio granular ($h \ll A/\mu_s Kl$), podemos escribir el término exponencial que aparece dentro del paréntesis de la ec. (7) como un desarrollo en serie a primer orden, de forma tal que se obtiene que $p(h) \approx \rho gh$. Es decir, solamente para columnas de medio granular pequeñas, el comportamiento será como en el caso de la presión ejercida por una columna de líquido. En la figura 4 se incluyen dos gráficos cualitativos del comportamiento de la presión hidrostática en columnas de líquido y medio granular [6].

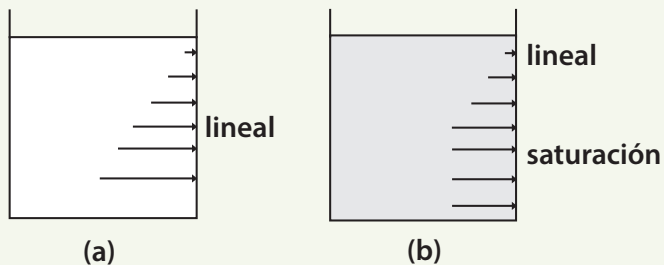


Figura 4. Presión hidrostática con la profundidad de: (a) un líquido y (b) un medio granular.

Para el caso de sistemas "cargados" ($p_c \neq 0$), que imaginamos como aquellas columnas de medio granular sobre las cuales se ejerce una fuerza compresora, la ec. (6) nos indica que ahora la presión a una profundidad h tendrá dos componentes, la presión ejercida por la columna de medio granular de altura h y la presión $p_c e^{-\frac{\mu_s Kl}{A}h}$ ejercida por la carga colocada en la superficie libre.

El Principio de Pascal nos dice que "la presión ejercida sobre un líquido en reposo, se transmite íntegramente a todos los puntos y paredes del recipiente que lo contiene" [1], en otras palabras, si ejercemos una presión p_c sobre la superficie libre de un líquido, entonces la presión a una profundidad h será:

$$p(h) = p_c + \rho gh \quad (8)$$

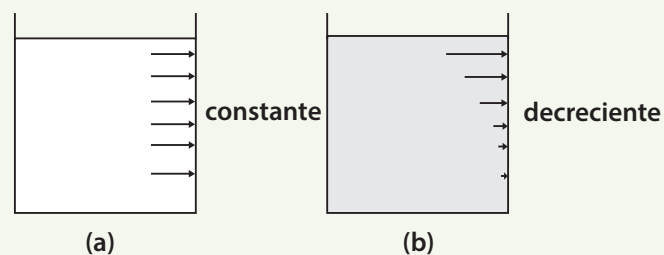


Figura 5. Efecto sobre el medio de la presión ejercida sobre la superficie libre. (a) un líquido y (b) un medio granular.

Es decir, p_c es una contribución adicional independientemente de la profundidad h del líquido.

En contraste, la ec. (6) del modelo de Janssen nos indica que la presión de la carga solamente se reflejará tal cual para la superficie libre ($h=0$) y que su efecto disminuirá conforme aumenta la profundidad en el medio granular. Más aun, para el caso de columnas muy grandes ($h \gg A/\mu_s Kl$) el efecto de la presión p_c ejercida por la carga sobre la superficie libre será prácticamente despreciable. En la figura 5 se describe cualitativamente la forma en la que se transmite la presión ejercida sobre la superficie libre de un líquido y un medio granular en reposo. Finalmente observemos que según el modelo de Janssen, la presión de saturación p_s es la misma independientemente de si el medio granular esta "cargado" o no.

Con el objetivo de establecer un escenario comparativo de los datos obtenidos con el prototipo experimental (figura 2) y el modelo de Janssen, reescribimos la ec. (6) en términos de la masa M_T de medio granular, la masa equivalente M_e y la masa de la carga M_w ($p_c = \frac{M_w g}{A}$):

$$M_e = M_w e^{-\frac{\mu_s Kl}{\rho A^2} M_T} + \frac{\rho A^2}{\mu_s Kl} \left(1 - e^{-\frac{\mu_s Kl}{\rho A^2} M_T} \right) \quad (9)$$

Observemos que es posible identificar una masa de saturación M_s definida como:

$$M_s \equiv \frac{\rho A^2}{\mu_s Kl} \quad (10)$$

de forma que la ec. (9) queda expresada como:

$$M_e = M_w e^{-\frac{M_T}{M_s}} + M_s \left(1 - e^{-\frac{M_T}{M_s}} \right) \quad (11)$$

Este modelo nos sugiere entonces analizar los resultados experimentales con funciones de ajuste de tipo exponencial. En la figura 6 se ilustra una gráfica comparativa de los resultados experimentales con los ajustes tipo Janssen. Para el caso de medio granular sin carga (círculos sin relleno) la función de ajuste $M_e = \alpha(1 - e^{-\beta M_T})$ nos aporta para los parámetros α y β los valores 110.20471 y 0.00914, respectivamente. Observemos que $\alpha = 110.2 \approx \beta^{-1} = 109.40$, consistente con el modelo de Janssen, toda vez que para $M_w = 0.0$ la ec. (11) indica que $\alpha = \beta^{-1} = M_s$. Este resultado nos permite concluir que el modelo planteado por Janssen reproduce satisfactoriamente el comportamiento observado experimentalmente, así mismo, que la masa de saturación es de aproximadamente 110.2 g.



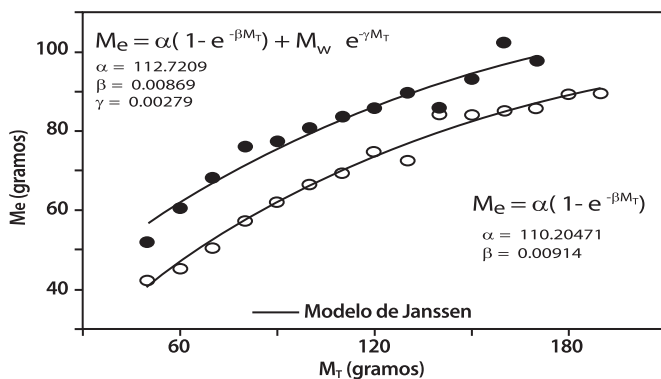


Figura 6. Resultados experimentales y modelo de Janssen. Los círculos corresponden a resultados experimentales sin carga y los círculos sólidos al caso con carga $M_w = 18.88 \text{ g}$ de la figura 2.

Para el caso del medio granular con carga, se usó una función de ajuste de la forma $M_e = M_w e^{-\gamma M_T} + \alpha(1 - e^{-\beta M_T})$ para los datos experimentales (círculos sólidos) que se muestran en la figura 6. La motivación de seleccionar esta función de ajuste, proviene de la forma funcional del modelo de Janssen (ec. (11)). Estos ajustes fueron realizados en el graficador Origin 7.0 con la opción de ajuste no-lineal. Los valores de los parámetros α y β para este caso son 112.7209 y 0.00869, respectivamente. Observemos que $\alpha = 112.7209 \approx \beta^{-1} = 115.07$, sin embargo el parámetro γ tiene un comportamiento diferente, $\gamma^{-1} = 358.7 \neq \alpha \neq \beta^{-1}$. Es decir, nuestros resultados experimentales manifiestan que para el caso de un medio granular cargado, el término del modelo correspondiente a la carga M_w no describe adecuadamente el comportamiento para el caso de una carga de 18.88 g. Por otra parte, podemos señalar que si bien la masa de saturación no coincide en los casos con y sin carga, la diferencia es aceptable ya que arroja una diferencia máxima aproximada del 6%. La razón de que la masa de saturación sea mayor para el caso del medio granular cargado ($M_s = \alpha \approx 112.7 \text{ g}$) en relación al caso sin carga ($M_s = \alpha \approx 110.2 \text{ g}$) es entendible, en el sentido de que al colocar una carga sobre la columna de grano, podemos esperar una ligera compactación del medio granular que lleva a comparar dos columnas de alturas diferentes pero con igual masa total. Para el caso de cargas mayores la descripción del modelo de Janssen de los resultados experimentales se desvía aún más, como ha sido reportado previamente en la literatura [5].

CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado una metodología y prototipo experimental que permite estudiar el comportamiento de la presión ejercida por un medio granular sobre el fondo de un silo cilíndrico. Así mismo, se presenta el modelo de Janssen, uno de los modelos primitivos que durante más de un siglo ha ayudado a discutir las ideas seminales subyacentes que permiten distinguir las similitudes y diferencias entre el comportamiento hidrostático de un líquido y un medio granular.

Específicamente, se ha corroborado que para un medio granular de maíz sin carga, se satisface el modelo de Janssen. Se observa que para el caso de medio granular cargado, la forma funcional del modelo es satisfactoria, sin embargo el parámetro que caracteriza a la carga no describe adecuadamente el comportamiento esperado por el modelo.

Consideramos que la descripción y discusión que aquí se presenta puede ser valiosa para profundizar en aspectos físicos relevantes de cursos de licenciatura en ciencias e ingeniería que incluyen el estudio teórico y experimental de los fluidos (Fluidos y Fenómenos Térmicos, Mecánica y Fluidos, Física II, entre otros). Como aspectos relevantes de este proyecto docente señalamos los siguientes: i) se ha construido un prototipo experimental sencillo, económico y portable, implementado con una metodología experimental distinta, misma que sustituye el pesado de columnas con balanza por la medición de presiones piezométricas; ii) se ha valorado como positivo hacer uso del modelo de Janssen para describir el comportamiento de medios granulares sin carga (o con carga pequeña); iii) se han corroborado las desviaciones del modelo de Janssen para el caso de medios granulares con carga. Los resultados sugieren que la fuente fundamental de la desviación podría residir en la forma funcional en que interviene la presión ejercida por la carga. Será interesante cuantificar este aspecto con mayor detalle como parte de algún proyecto final de laboratorio por parte de los estudiantes, así como también, buscar otros modelos matemáticos que describan con mayor precisión los resultados experimentales de medios granulares cargados.

AGRADECIMIENTOS

Deseamos agradecer la colaboración del Taller de Máquinas y Herramientas del Departamento de Física en la construcción del prototipo experimental, especialmente al Lic. Claudio Delgadillo Rodríguez. Así también al L. F. Gregorio A. Véjar Delgado por su colaboración en las versiones preliminares de este proyecto docente.

BIBLIOGRAFÍA

- 1) D. C. Giancoli, Física para ciencias e ingeniería, 4ta ed., vol. 2, Pearson Educación, México, 2009.
- 2) FAO. Manual técnico para la construcción y el uso de los silos metálicos familiares para almacenar cereales y leguminosas de grano. Roma, 2014.
- 3) Laboratorio de Medios Granulares, Facultad de Ciencias, U. de Navarra.
- 4) M. Sperl, Experiments on corn pressure in silo cells – translation and comment of Janssen’s paper from 1895, Granular Matter, vol. 8, pp. 59–65, May 2006.
- 5) L. Vanel, Ph. Claudin, J.-Ph. Bouchaud, M. E. Cates, E. Clément, and J. P. Wittmer, Stresses in Silos: Comparison Between Theoretical Models and New Experiments, Phys. Rev. Lett., vol. 84, no. 7, pp. 1439–1442, February 2000.
- 6) D. M. Mueth, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel, Force distribution in a granular medium, Phys. Rev. E., vol. 57, no. 3, pp. 3194–3169, March 1998.