ERRORES CONCEPTUALES INSTITUCIONALIZADOS EN MATEMÁTICAS

* JORGE RUPERTO VARGAS CASTRO, MARÍA ELENA PARRA RAMOS, JOSÉ LUIS DÍAZ GÓMEZ

RESUMEN

A raíz de las reflexiones que surgen del análisis del actual Modelo Curricular de la Universidad de Sonora donde el estudiante ocupa un lugar activo y protagónico en la construcción de su conocimiento, y tomando en cuenta que en la Universidad de Sonora estamos en un momento de reflexión y análisis encaminados hacia la propuesta de un nuevo modelo curricular basado en competencias, sabiendo que en ambos se insiste en el uso de las nuevas TIC's en los procesos de enseñanza y aprendizaje, en lo que a matemáticas se refiere, es oportuno hacer algunos señalamientos en relación a la precisión de los contenidos disciplinares a estudiar (el qué enseñar). También considerar los aspectos metodológicos encaminados a propiciar el aprendizaje de los mismos (el cómo enseñar). En este artículo se hace un análisis parcial de estos aspectos, ejemplificándolo con uno de los conceptos fundamentales en matemáticas, desde el nivel básico hasta el superior. Este concepto es el de simetría, en el cual algunos libros de texto y más de un tipo de software matemático muy reconocidos, propician errores de comprensión.

Palabras-clave: *Transformación, reflexión, rotación, traslación, simetría.*

DR. JORGE RUPERTO VARGAS CASTRO
Correo: rvargas@gauss.mat.uson.mx
M.C. MARÍA ELENA PARRA RAMOS
Correo: meparra@gauss.mat.uson.mx

DR. JOSÉ LUIS DÍAZ GÓMEZ
Correo: jdiaz@gauss.mat.uson.mx
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora

*Autor para correspondencia: Jorge Ruperto Vargas Castro
Correo electrónico: rvargas@gauss.mat.uson.mx
Recibido: 15 de septiembre de 2014
Aceptado: 24 de noviembre de 2014
ISSN: 2007-4530

INTRODUCCIÓN

En la conjunción de esfuerzos por mejorar la comprensión y aprendizaje de las matemáticas, concurre una amplia diversidad de factores; sólo por mencionar algunos listamos los siguientes: Institución y nivel educativo que se imparte en la misma, modelo curricular que se sigue, infraestructura física con la que se cuenta, nivel de preparación disciplinar y pedagógica de los maestros, biblioteca con textos adecuados, elección y forma de uso de libros de textos; nivel, calidad y precisión de los contenidos disciplinares y uso adecuado de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (NTIC's). Aunque el conjunto de factores concurrentes es mucho mayor que los ya mencionados, sabemos que no es posible abordarlos todos a la vez, por lo cual, en este artículo nos restringiremos a hacer un breve análisis de los siguientes contenidos disciplinares:

- Expresados en los libros de texto
- Expresados en softwares educativos.

IMPORTANCIA DE LOS CONTENIDOS DISCIPLINARES

Al abordar el análisis de los procesos de aprender y enseñar matemáticas, nos encontramos con una amplia gama de opiniones al respecto, desde quienes piensan que para enseñar bien matemáticas basta con saber mucho de matemáticas, hasta quienes piensan que lo único indispensable es contar con una buena formación pedagógica, con lo cual podrán tener éxito al enseñar cualquier disciplina. Mostrando los hechos que ninguna postura extrema funciona, se debe considerar la importancia de ambos aspectos, una sólida formación matemática y un sustento teórico firme de las metodologías de enseñanza.

Cuando el enfoque de la enseñanza está basado en una teoría del aprendizaje bien definida, pero el objeto matemático en estudio es impreciso, o peor aún, erróneo, entonces caemos en la situación de estar enseñando muy bien un error. Irónicamente hubiera sido mejor hacer una mala enseñanza del error, ya que un error muy bien enseñado se afianza tanto o más como un concepto preciso bien enseñado. La firme enseñanza de un error **produce mayor daño**, que el beneficio de algo correcto bien enseñado, causando mayor dificultad de romper la estructura del error [1].

Por otro lado, si el maestro tiene una sólida formación matemática, pero no es consciente de los procesos pedagógicos y sólo se limita a la tradicional exposición oral y escrita, puede producir una consecuencia frecuente, como puede observarse al hacer preguntas a estudiantes de licenciatura acerca de temas vistos el semestre anterior, el tiempo de retención de los conceptos es muy corto y la esperanza de que sea capaz de aplicarlos, por consecuencia, es muy baja en el estudiante común.

DOS TEMAS PARTICULARES

A manera de ilustración de la adecuada combinación de precisión disciplinaria y estrategia pedagógica requeridas para la precisa y duradera comprensión de un concepto matemático, consideraremos dos temas: uno de nivel básico comúnmente estudiado en la escuela secundaria, del cual sólo haremos breves comentarios y otro transversalmente presente desde jardín de niños hasta los primeros niveles de licenciatura, del cual hablaremos más ampliamente, a la vez que se analizarán frecuentes errores conceptuales al respecto. Los temas referidos, en orden de mención, son:

- Casos de congruencia de triángulos
- Simetría

El tema que principalmente nos ocupará, como ya se indicó, es el de simetría.

Casos de congruencia de triángulos

Desde la escuela secundaria hemos aprendido, aunque frecuentemente olvidado, que los casos de congruencia de triángulos son tres:

- Lado, lado, lado (LLL)
- Lado, ángulo, lado (LAL)
- Ángulo, lado, ángulo (ALA)

En esta ocasión sólo mencionaremos que el común de los profesores, según experiencias en diplomados impartidos para el nivel de secundaria, tanto a nivel regional como nacional:

a) No saben de entre cuántas combinaciones posibles se eligen los casos conocidos.
b) No saben argumentar por qué los casos conocidos sí son casos de congruencia.
c) Entre los que no son casos de congruencia (como LLA), no se proporcionan argumentos de por qué no lo son ni mucho menos un análisis de posibles casuísticas particulares en las que, por ejemplo, el caso LLA que en lo general no es caso de congruencia, en lo particular sí lo es.
d) No se da argumento del por qué no incluir el caso LAA, como caso de congruencia, erróneamente rechazado, porque sí lo es.
e) Prácticamente se aceptan como "dogmas de fe" que los casos de congruencia son los tres conocidos, sólo porque los libros así lo dicen.

Esta problemática vale la pena analizarla ampliamente en otro artículo. Esto nos hace ver que ni la matemática básica, como disciplina didáctica, está lo suficientemente discutida.

Éste es un buen ejemplo de contenido del nivel básico en el que no se presenta precisión disciplinaria ni estrategias adecuadas de enseñanza.

Abordaremos ahora el tema que especialmente nos interesa más, por estar transversalmente presente casi desde jardín de niños hasta niveles superiores de la matemática y otras ciencias.

La simetría

Definición etimológica: *lat. symmetria de gr. symmetrĭā* συμμετρία [sŷn σύν gr. 'con', *‹unión› +metr(o)- μgr. ‹medida› + -ia gr. ‹cualidad›]*

En general, se entiende como proporción adecuada de las partes de un todo entre sí y con el todo mismo. Regularidad en la disposición de las partes o puntos de un cuerpo o figura.

Definición matemática: como antecedente del concepto matemático de simetría, en el XXXII Congreso Nacional de la SMM realizado en Guadalajara, Jalisco en el año 1999, se presentó una ponencia cuyo título era una pregunta doble:

"¿Es toda reflexión una simetría? y ¿Es toda simetría una reflexión?"

Al plantear estas preguntas a priori a la gran concurrencia de distintos puntos del país, la respuesta unánime para ambas preguntas fue un SÍ, causándoles gran desconcierto cuando se les dijo que la respuesta a ambas es NO.

El motivo de la unanimidad inicial y el desconcierto posterior está en el hecho de cómo se ha presentado el concepto desde los primeros niveles de la educación básica, donde se ha hecho creer que la simetría siempre tiene que ver con la transformación geométrica llamada reflexión, al grado de identificarlas. Para dar inicio al análisis de esta problemática conceptual, mediante ilustraciones daremos respuesta de nuevo a la doble pregunta mencionada anteriormente, sirviéndonos esto de preámbulo para enunciar la definición matemáticamente correcta del concepto de simetría.

La primera pregunta a analizar y responder es: ¿Es toda reflexión una simetría? La respuesta lacónica a la pregunta es NO, las razones las ilustramos a continuación:

Una reflexión en el plano, con respecto a una recta tomada como eje, haciendo el lugar de espejo (por eso se le llama reflexión), la definimos puntualmente así:

"El punto P' es reflejo del punto P con respecto a la recta l si el segmento PP' es perpendicular a l y además los puntos P y P' equidistan de "l (Figura 1).

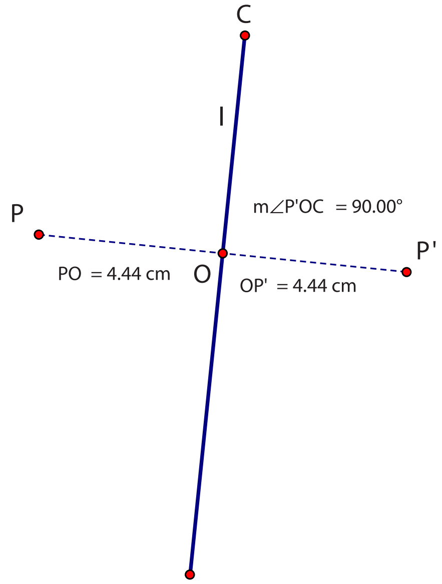


Figura 1. Reflexión de un punto con respecto a un eje.

Más globalmente:

"Una figura M' es el reflejo de una figura M con respecto a la recta l si todo punto de M' es reflejo de algún punto de M y recíprocamente" (Figura 2).

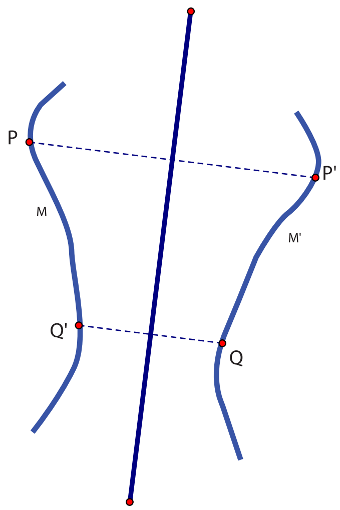


Figura 2. Reflexión de una figura con respecto a un eje.

Ante la experiencia de vernos en un espejo (Reflexión) nunca pensamos que la imagen y yo somos un todo, sino que mi ser real es uno, mientras que el ser virtual (imagen) es otro, tan es así que si una persona es diestra (derecha) su imagen en el espejo es siniestra (zurda). Esto se advierte debido a que se piensa que reflexión y simetría es lo mismo (comprobado por años en una encuesta que se presenta en anexo) por ver al objeto y a la imagen como un todo. **Debemos aprender a distinguir entre un objeto y su imagen** (Figura 3).

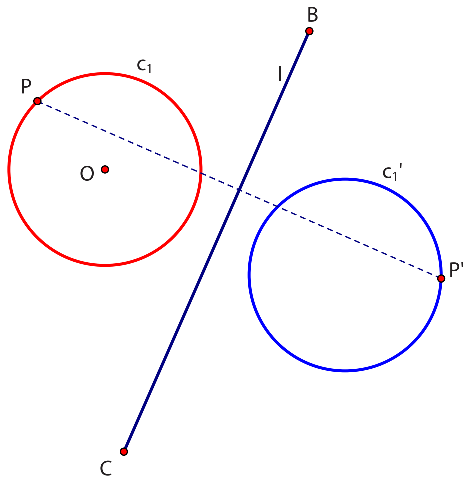
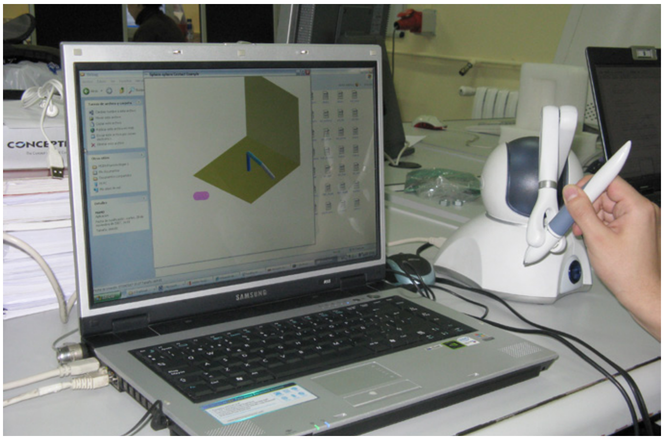


Figura 3. Reflexión sin simetría.

Si tomamos al segmento BC como un espejo (eje de reflexión), la circunferencia C1 de color rojo como el "objeto real", el cual consiste de un conjunto de puntos en el plano que equidistan del punto fijo O llamado centro, siendo el punto P uno de ellos, la imagen reflejada obviamente no es la misma circunferencia. La circunferencia C1′ de color azul, en la cual está, en la posición respectiva, la imagen del punto P llamada P′; **no es un solo sistema, sino que C1 es una figura y su reflejo C1′ es otra distinta** en este caso todos los puntos de C1 tienen su imagen en otro conjunto distinto de C1, en el conjunto C1′; en particular, el punto P que está en C1, tiene su imagen P′ en otro conjunto distinto, el conjunto C1′.

Si giramos el eje *l* (segmento BC), centrado en C, hacia la izquierda, de tal manera que el punto O quede muy cerca de *l*, observamos que las dos circunferencias (C1 y C1′) tienden a fusionarse en una sola (Figura 4), y cuando finalmente la recta *l* pasa por O, las dos circunferencias se convierten en una sola y ahora sí cualquier punto P de C1 tiene su imagen reflejada P′ en la misma C1 (Figura 5). En este momento podemos afirmar que el eje de **reflexión l**, que existe como tal, **se convierte en un auténtico eje de simetría**, precisamente porque ahora sí cualquier punto de C1 tiene su imagen reflejo en el mismo C1.



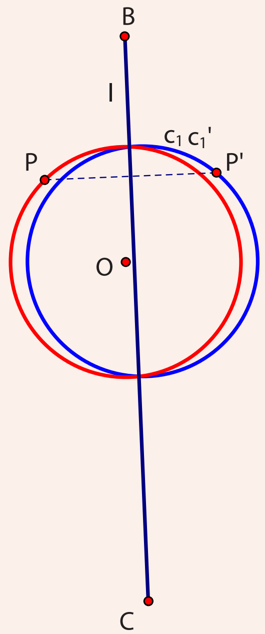


Figura 4 Reflexión cercana a simetría.

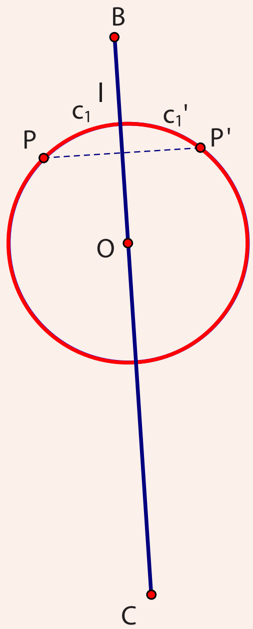


Figura 5. Simetría de reflexión.

Esto nos muestra que **la Reflexión con respecto a un eje** (como si fuera un espejo) **es una auténtica transformación en el plano** (una isometría por preservar distancias), mientras que **la simetría axial no es una transformación**, sino una circunstancia o situación que en un momento dado puede presentarse al hacer reflexiones con respecto a un eje de reflexión.

Esta ilustración, aunque es posible presentar una gran variedad de ellas, nos basta para poder afirmar que: **No toda reflexión es una simetría**. Con esto, aunque sea en forma ilustrativa, hemos dado una respuesta a la primera pregunta, ahora, en términos similares, daremos respuesta a la segunda pregunta, la recíproca de la primera:

¿Es toda simetría una reflexión?

En la figura 6, se presenta un hexágono regular ABCDEF y sus diagonales radiales tomando como centro de rotación al punto O. Todo el conjunto es girado un ángulo RQS (cuya medida se muestra), obteniendo un conjunto imagen consistente en el hexágono congruente de vértices A′B′C′D′E′F′, de color rojo, que no coincide con el original. Se muestra un punto P de la figura original y su imagen P′ bajo la rotación indicada, no pertenece al conjunto original, lo cual nos ilustra que esta rotación realizada NO ES UNA SIMETRÍA.

En cambio, en la figura 7, se nos presenta una rotación del mismo hexágono original con respecto al mismo centro, pero ahora con un ángulo de rotación de 60°.

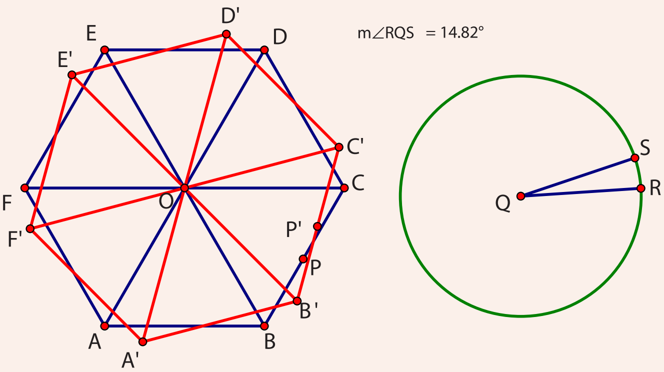


Figura 6. Rotación sin simetría.

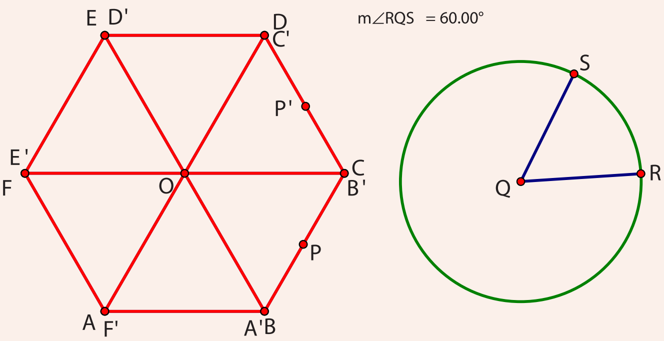


Figura 7. Simetría de rotación.

Con este ángulo de rotación, al igual que con los ángulos de 120°, 180°, 240°, 300° y 360° (equivalente a 0°), todos los puntos del conjunto inicial tienen sus imágenes en el mismo conjunto, lo cual nos indica que la figura original tiene seis simetrías de rotación, esto nos ilustra que no sólo las reflexiones pueden producir simetrías, sino también las rotaciones, las traslaciones (esto se puede ilustrar mediante cenefas infinitas en el plano) y otra gran variedad de transformaciones en el plano, por lo que, como respuesta a la segunda pregunta, podemos afirmar:

"No toda simetría es una reflexión".

Tenemos ya suficientes elementos para dar una definición matemática del concepto de simetría en el plano accesible a un lector no especializado, pero suficientemente precisa, de la siguiente manera:

Si T es una transformación del plano en él mismo ($T: E^2 \rightarrow E^2$) y S está contenido en E^2 ($S \subset E^2$), decimos que T es una simetría para el conjunto S si el conjunto S queda invariante bajo la transformación T, o sea que, si para cualquier elemento x de S ($x \in S$), su imagen pertenece también a ($T(x) \in S$); también decimos que el conjunto S es simétrico con respecto a la transformación T.

Obsérvese que una transformación del plano no necesariamente provoca una simetría en un conjunto dado S, pudiendo provocarla o no en otro conjunto S′, por lo cual no es correcto asignarle a una transformación el calificativo de simetría, sino que necesariamente debe considerarse la transformación y el conjunto al que se aplica simultáneamente. De ello se desprende que tampoco es correcto ubicar el término simetría dentro de un menú de transformaciones, como sucede en ciertos tipos de software, lo cual se comentará más abajo.

Error institucionalizado

Nos preguntamos ¿qué factores determinan que un concepto se institucionalice?

Los factores son muy diversos, sólo mencionaremos algunos por su relevancia:

- Libros de texto
- Programas oficiales
- Prácticas docentes
- Software especializado
- Sitios de internet

Por brevedad de espacio, consideraremos sólo el aspecto de uso de software especializado, recurso cada vez más influyente. Sólo mencionaremos brevemente, con respecto al uso de libros, que en México está institucionalizado el error en todos los textos del nivel básico, desde primaria hasta secundaria [2]; en el nivel medio superior ni siquiera se aborda el tema; en USA podemos encontrar libros (por supuesto en Inglés) que dan un tratamiento correcto al tema, tanto en el equivalente a nivel secundaria [3] como en College [4] y con mayor razón a nivel universitario [5], y también en [6].

Software profesional de matemáticas

Otra de las fuertes vías de consolidación de conceptos matemáticos correctos o en su defecto, vía de institucionalización del error conceptual, es la gran diversidad de software que cada vez más se usa en el aula, en laboratorios de cómputo y en casa; centraremos nuestra atención en el análisis de algunos ejemplos de software de geometría dinámica, en cuyo menú veremos el enfoque que se le da al tema de las transformaciones y de la simetría.

Software de geometría dinámica que incluyen a la reflexión como una transformación y no la llaman simetría

Mostramos a continuación porciones del menú de transformaciones de tres ejemplos de software que ilustran el correcto uso de los términos:

La figura 8 nos presenta una porción del menú del software **"The Geometer´s Sketchpad"** versión 5.06, donde puede verse que, al activar el submenú de transformaciones, está conceptualmente correcto, ya que la opción "Mark Mirror" se usa para activar a una recta o segmento como "eje de reflexión", no de simetría y más abajo a la transformación la llama reflexión.

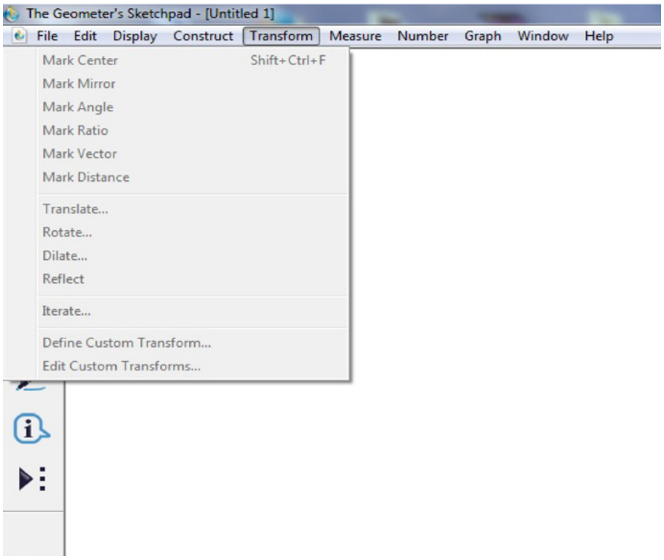


Figura 8. Menú Transformaciones del SketchPad.

El siguiente recuadro correspondiente a la figura 9, muestra cómo uno de los mejores software de este tipo llamado **Cinderella** (Aquí usada la versión 2) le llama "use un espejo" a la transformación de reflexión, siendo coherente. El espejo puede ser un punto, una recta (espejo plano) o incluso una circunferencia (Inversión), en este caso se ilustra con un ejemplo de reflexión con respecto a una recta.

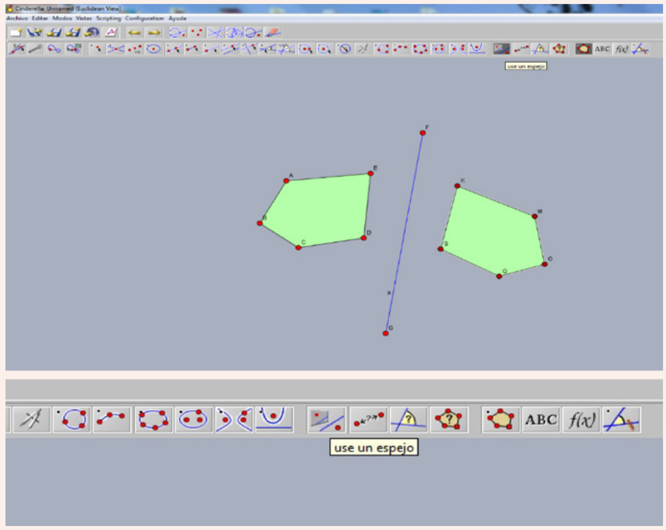


Figura 9. Menú Transformaciones del Cinderella.

En la figura 10 se muestra el menú de transformaciones de uno de los software más usado actualmente (por ser muy bueno y gratuito) llamado **"GeoGebra"**. Aquí se muestra una vista del menú de transformaciones correspondiente a la versión 4.2, de nuevo puede verse en este software, el manejo correcto de la terminología de transformaciones, en especial la reflexión.

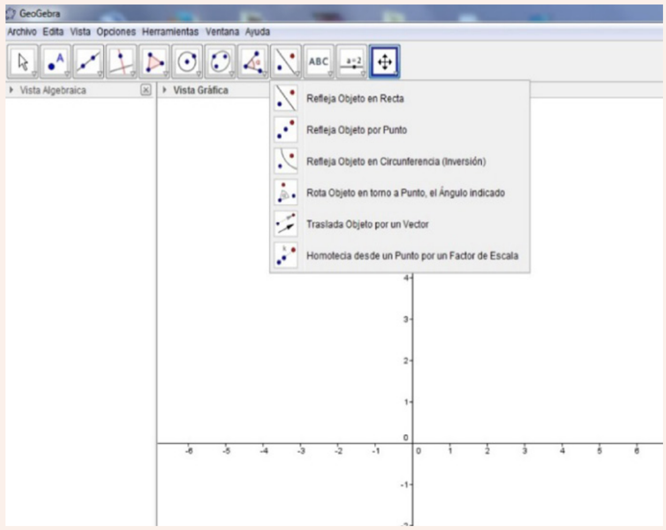


Figura 10. Menú Transformaciones Geogebra versión 4.2.

Software de geometría dinámica que ERRÓNEAMENTE ubica a la simetría en el menú de transformaciones identificándola con reflexión.

Tal vez el más influyente en esta línea es un software de origen Francés llamado "Cabri Geometre II Plus", cuyo menú de transformaciones se presenta en la figura 11, donde puede verse cómo identifican simetría axial con la reflexión con respecto a una línea recta.

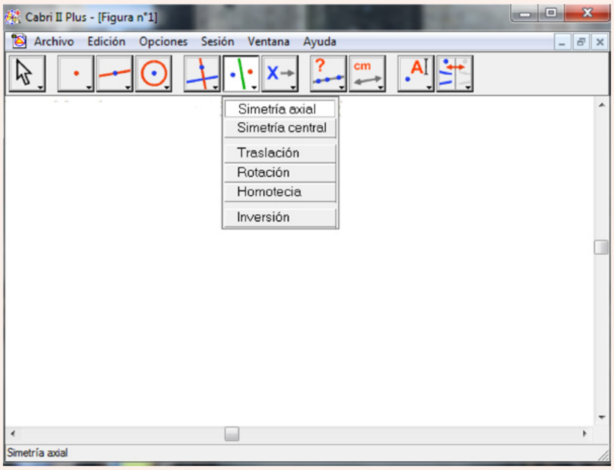


Figura 11. Menú Transformaciones de Cabri II Plus.

GEUP

Se hace llamar “la versión española del Cabri”, y por consecuencia, como puede verse en el menú de transformaciones ilustrado en la figura 12, correspondiente a la versión 6, adolece del mismo error conceptual en lo que a simetría se refiere.

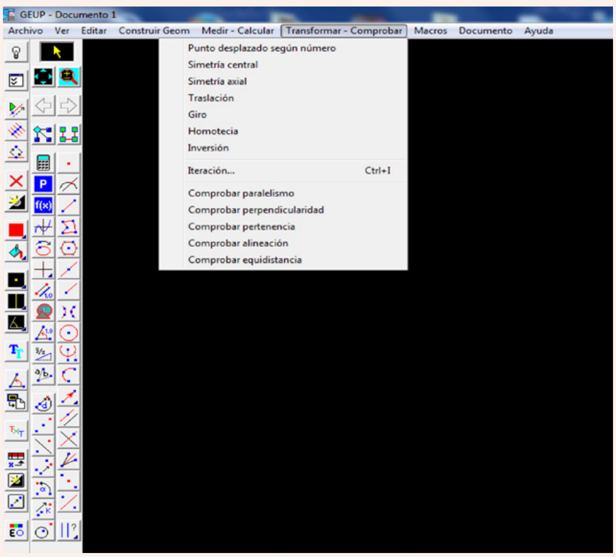


Figura 12. Menú Transformaciones de GEUP 6.

Geogebra 4.4

La figura 14 nos muestra el menú Transformaciones de la versión 4.4 del software llamado Geogebra, en donde podemos apreciar que esta nueva versión cayó en los errores conceptuales de Cabri Geometer II Plus y GEUP Versión 6.

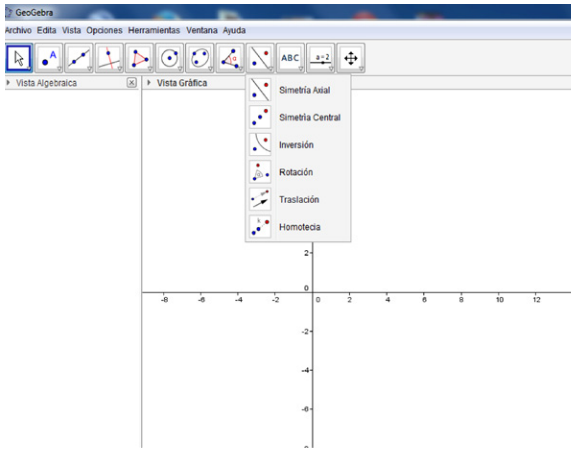


Figura 13. Menú Transformaciones de GeoGebra Versión 4.4.

Esto ilustra cómo la fuerza del error institucionalizado, tanto en libros de texto como en algunos tipos de software profesional, ha permeado; aún en un software tan prestigiado como GeoGebra que de la versión 4.2, en el que se hacía un correcto manejo del menú de transformaciones (siendo en ésto aún mejor la versión 3 que no incluía entre paréntesis la palabra inversión después de la opción “Reflexión con respecto a una circunferencia”, ya que provocaba una problematización acerca del significado de esa transformación, propiciando en que se problematice la posibilidad de descubrir que se trata de la inversión), al pasar a la versión 4.4; mientras que mejoró en muchos otros aspectos, en lo que al menú de transformaciones se refiere, cayó en el error de identificar la Reflexión con Simetría Axial.

Esperamos que lo aquí analizado propicie el inicio de un proceso de revisión de algunos de los conceptos más fundamentales de matemáticas, eliminando algunos errores conceptuales institucionalizados en la escuela desde el nivel básico hasta los primeros años de licenciatura, como sucede con el caso del concepto de simetría.

BIBLIOGRAFÍA

1) J. Vargas Castro (2012). “Enseñanza e investigación educativa en relación al Aprendizaje de algunos tópicos geométricos mediante el uso de recursos interactivos a través de Internet. El caso de las isometrías y simetrías en el plano”. Tesis de doctorado. Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Cuernavaca, Morelos, México, enero 2012, p. 98
2) P. Hernández y S. Romero (2007). Matemáticas 2 Secundaria. México. Ediciones Castillo, 2007, pp. 224-225.
3) M. Serra. Discovering Geometry, An Inductive Approach. California, USA: Key Curriculum Press, 1997, pp 2-4, 386-388.
4) C. Kay David. College Geometry, a Discovery Approach. USA: Adison Wesley, 2001, pp. 390-391, 392, 397.
5) M. A. Armstrong. Groups and Symmetry. USA: Springer, 1997, pp. 2-4, 15, 16, 37-40.
6) B. Grünbaum y G. Shephard. Tilings and Patterns. New York: W. H. Freeman and Company, 1987, pp. 26-28, 402-404.