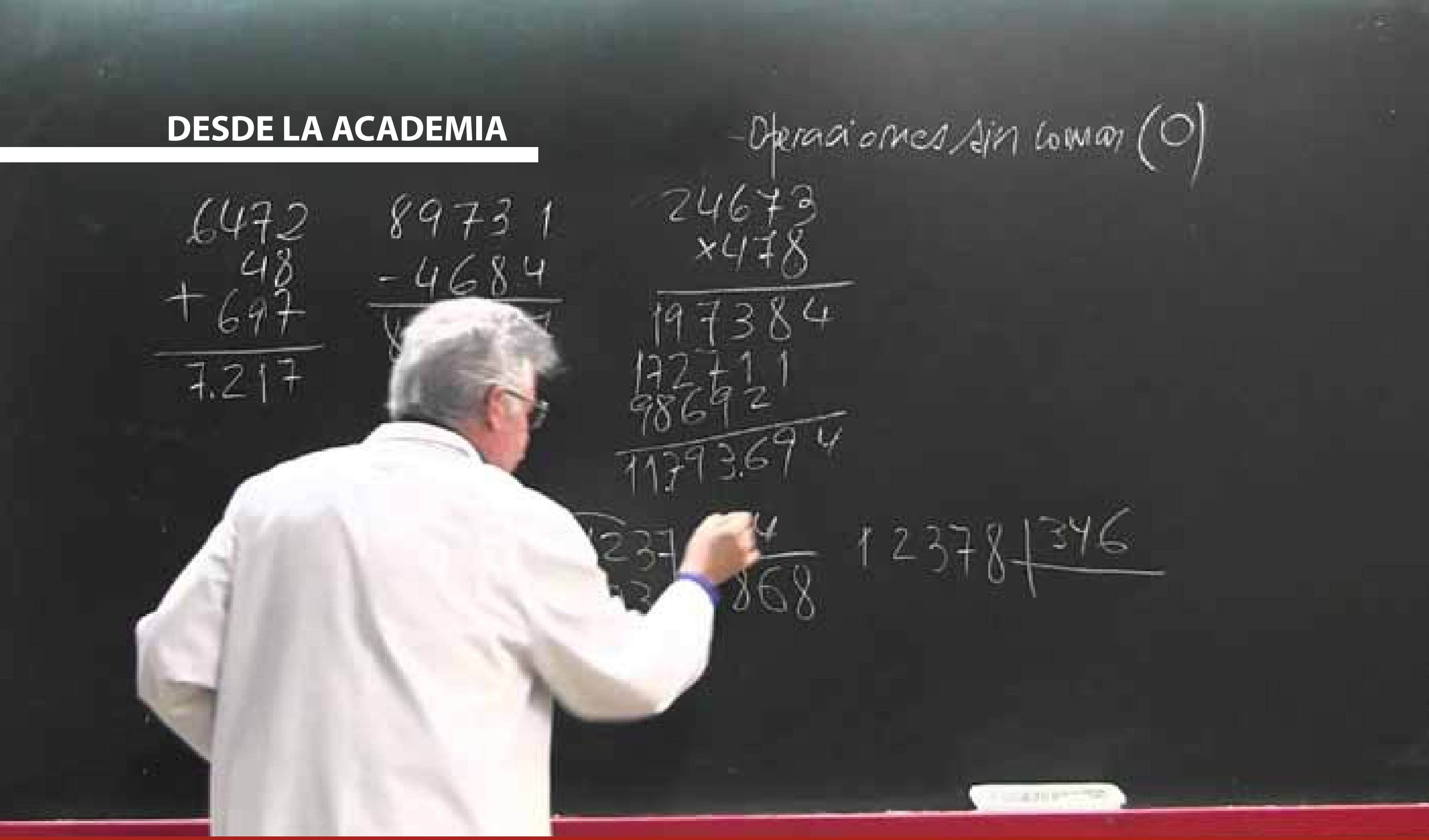



# ELEMENTOS PARA LA PRESENTACIÓN DE LAS FORMAS DIFERENCIALES

RAFAEL RAMOS FIGUEROA* Y CARLOS ROBLES CORBALÁ

*En este artículo damos una exposición general de los conceptos de forma diferencial, producto cuña entre formas, operador diferencial entre formas y concluimos con el enunciado del Lema de Poincaré. Pero no solo eso, también motivamos las definiciones de estos conceptos mostrando que cada uno de ellos surge de manera natural como consecuencia de intentar dar respuesta a una pregunta inicial muy simple.*

DR. RAFAEL RAMOS FIGUEROA
Correo: rramos@gauss.mat.uson.mx
M.C. CARLOS ROBLES CORBALÁ
Correo: crobles@gauss.mat.uson.mx
Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas

*Autor para correspondencia: Rafael Ramos Figueroa
Correo electrónico: rramos@gauss.mat.uson.mx
Recibido: 15 de febrero de 2013
Aceptado:13 de mayo de 2013
ISSN: 2007-4530

## INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

Por ser de naturaleza local, todas las definiciones que daremos en este artículo son válidas en cualquier subconjunto abierto $A$ de $\mathbb{R}^n$; sin embargo, generalmente escribiremos $\mathbb{R}^n$ en vez de $A$ por simplicidad de notación.

Empezaremos por motivar el concepto de diferencial de una función.

Recordemos que por definición una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es diferenciable en $a\in\mathbb{R}$ si existe un número $f'(a)$ tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a). \tag{1}$$

Si definimos la función lineal $\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $\lambda(h)=f'(a)\cdot h$ entonces la igualdad (1) equivale a

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-\lambda(h)}{h}=0. \tag{2}$$

La interpretación de la igualdad (2) es que la función $\lambda+f(a)$ es la mejor aproximación lineal de $f$ en el punto $a$. La expresión (2) nos da la idea para generalizar la definición de diferenciabilidad para una función $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$:

Una función $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es **diferenciable** en $p\in\mathbb{R}^n$ si existe una función lineal $\lambda:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(p+h)-f(p)-\lambda(h)|}{|h|}=0.$$

Notemos que como $h$ es un punto en $\mathbb{R}^n$ y $f(p+h)-f(p)-\lambda(h)$ es un punto en $\mathbb{R}^m$, es indispensable considerar las normas. Se demuestra en [7] (Teorema 2-1, pág. 14) que de existir la función lineal $\lambda$, es única. Denotaremos a $\lambda$ por $Df(p)$ y llamaremos a la función lineal $Df(p):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ **la diferencial de la función $f$ en el punto $p$**.

También se demuestra en [4] (Teorema 16, pag. 125) que

$$(Df)(p)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p)\end{pmatrix}$$

La matriz anterior se llama **matriz Jacobiana**. Ver [7], pag. 15.

Para obtener el valor de $(Df)(p)$ en un vector $v$ en $\mathbb{R}^n$ usando la matriz Jacobiana, simplemente consideramos el vector $v$ como vector columna y lo multiplicamos por la izquierda por dicha matriz.

Diremos que una función $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es **diferenciable** en $\mathbb{R}^n$ si $f$ es diferenciable en cada punto $p$ en $\mathbb{R}^n$.

El caso que nos interesa en este artículo es cuando m=1. En este caso tenemos que la diferencial $Df(p):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de la función $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ está dada por

$$Df(p)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right). \tag{3}$$

Esto es, $Df(p)=\nabla_p f$ donde por definición $\nabla_p=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(p),\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}(p)\right)$. Para cada $v$ en $\mathbb{R}^n$ tenemos que $Df(p)(v)$ es un escalar que representa la rapidez de cambio de la función $f$ en el punto $p$ en la dirección del vector $v$.

Ahora procederemos a motivar los conceptos de 1-forma y producto cuña entre 1-formas.

Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $\{e_1,\ldots e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$ tenemos que cualquier vector $v$ en $\mathbb{R}^n$ se expresa como $v=v^1e_1+\cdots+v^ne_n$ con $v^j$ escalares en $\mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}Df(p)(v)&=Df(p)\Big(\sum_{j=1}^n v^je_j\Big)\\&=\sum_{j=1}^n v^jDf(p)(e_j)\\&=\sum_{j=1}^n v^j\frac{\partial f}{\partial x^j}(p)\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es por la linealidad de $Df(p)$ y la última igualdad es por (3).

Obtenemos así la igualdad

$$Df(p)(v)=\sum_{j=1}^n v^j\frac{\partial f}{\partial x^j}(p). \tag{4}$$

Dado que también las proyecciones canónicas

$$x^i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

definidas por $x^i(p^1,\ldots p^n)=p^i$ son funciones diferenciables tenemos que

$$\begin{aligned}Dx^i(p)(v)&=\sum_{j=1}^n v^j\frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p)\\&=\sum_{j=1}^n v^j\delta_{i,j}=v^i\end{aligned}$$

**Jules Henri Poincaré**

donde la primera igualdad es por (4) y donde $\delta_{i,j}$ es la función delta de kronecker definida por

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \ si \ i = j \\ 0 \ si \ i \neq j \end{cases}$$

Obtenemos de esta manera la igualdad

$$Dx^i(p)(v) = v^i. \qquad (5)$$

Por las igualdades (4) y (5) tenemos que

$$Df(p)(v) = \sum_{j=1}^{n} Dx^j(p)(v)\frac{\partial f}{\partial x^j}(p).$$

Reordenando los términos en la igualdad anterior y denotando a $Dx^j$ por $dx^j$ obtenemos la conocida expresión de cálculo

$$Df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j. \qquad (6)$$

Observemos que el conjunto ordenado $\{dx^1(p),\ldots dx^n(p)\}$ es la base dual para el espacio vectorial dual $(\mathbb{R}^n)^*$ asociada a la base ordenada canónica $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ pues por construcción se cumple que $dx^i(p)(e_j) = \delta_{i,j}$ para cada $p$ en $\mathbb{R}^n$. (Consultar [2] pág. 98, para la definición de base dual).

Motivados por la expresión (6) asociada a la función diferenciable $f$, una pregunta natural que surge es la siguiente:

Dada cualquier "1-forma" $w$, es decir una expresión de la forma

$$w = g_1dx^1 + \cdots + g_ndx^n$$

donde las $g_i$ son funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ diferenciables, ¿existe una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con segundas derivadas parciales continuas tal que $Df = g_1dx^1 + \cdots + g_ndx^n$? Esta es precisamente la pregunta inicial a la que se hace referencia en el resumen de este artículo.

De existir dicha $f$ debe cumplir que

$$Df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j = \sum_{j=1}^{n} g_jdx^j$$

dado que los $dx^j$ son base la igualdad anterior se da si y sólo si

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = g_j \ \text{para cada} \ j = 1,\ldots,n \qquad (7)$$

Por otra parte, la condición de que $f$ tiene segundas derivadas parciales continuas implica que las segundas derivadas parciales mixtas de $f$ deben coincidir (Ver [4] Teorema 15, pág. 119 o [7] Teorema 2-5, pág.24), esto es, para cada $1 \leq i,j \leq n$ se cumple

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right). \qquad (8)$$

Entonces por (7) y (8) tenemos que $\frac{\partial g_i}{\partial x^j} = \frac{\partial g_j}{\partial x^i}$, es decir, es necesario que se cumpla la condición

$$\frac{\partial g_i}{\partial x^j} - \frac{\partial g_j}{\partial x^i} = 0 \ \text{para} \ 1 \leq i,j \leq n \qquad (9)$$

para que exista la $f$ requerida.

Reescribiremos la condición (9) introduciendo nueva simbología. Si **definimos** el "producto" $\wedge$ en el conjunto $\{dx^1,\ldots dx^n\}$ mediante la regla $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ podemos expresar la condición (9) como la única ecuación

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x^i}dx^i \wedge dx^j = 0\cdot \qquad (10)$$

Así si $w = \sum_{i=1}^{n} g_jdx^j$ es una 1-forma, **definiendo** el operador $d$ por

$$dw = \sum_{i=1}^{n} Dg_j \wedge dx^j \qquad (11)$$

obtenemos que la condición (10) se traduce en lo siguiente

$$dw = \sum_{i=1}^{n} Dg_j \wedge dx^j = \sum_{i=1}^{n} \Big( \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x^i} dx_i \Big) \wedge dx^j = 0$$

donde la última igualdad de la expresión anterior es por (10).

Así, con este nuevo lenguaje, obtenemos que una condición necesaria para que la 1-forma $w = \sum_{i=1}^{n} g_j dx^j$ tenga una "primitiva" $f$ ( esto es, $Df = w$ ) es que $dw = 0$.

Veremos mas adelante que la condición $dw = 0$ no es una condición suficiente y refinaremos los conceptos de producto cuña $\wedge$ y operador $d$, pero antes hagamos un pequeño resumen de lo que se hizo en esta sección:

Vimos que el concepto de operador deferencial $D$ para funciones $f$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ nos conduce de manera natural a definir el concepto de 1-forma. Una vez definido este concepto surgió la pregunta natural de que si damos cualquier 1-forma $w$, ¿la 1-forma tiene siempre una primitiva $f$? Para tratar de contestar esta pregunta fue conveniente introducir un "producto cuña $\wedge$" en el conjunto de 1-formas $\{dx^1, \ldots dx^n\}$ tal que $dx^i \wedge dx_j = -dx^j \wedge dx_i$. Lo que a su vez nos condujo a introducir el concepto de "derivada de 1-formas"o operador diferencial de 1-formas. Así si $w = \sum g_i dx^i$ es una 1-forma, definimos $dw = \sum Dg_i \wedge dx^i$ , es decir, $dw = \sum\sum (\frac{\partial g_i}{\partial x_j} dx^j) \wedge dx^i$ y resultó, con este nuevo lenguaje, que una condición necesaria para que una 1-forma dada tenga una primitiva es que $dw = 0$.

## CAMPOS VECTORIALES

Antes de definir formalmente el concepto de 1-forma presentaremos en esta sección el concepto de campo vectorial y algunas de sus propiedades. Las definiciones de campo vectorial y de 1-forma son totalmente análogas y comparten algunas propiedades en común desde el punto de vista algebraico. La razón por la que presentamos primero el concepto de campo vectorial es porque su definición es un poco mas simple que la definición de 1-forma y su interpretación geométrica es mas evidente.

**Definición 1.** *Sea $p \in \mathbb{R}^n$. Definimos el conjunto*

$$\mathbb{R}^n_p = \{(p, v) |\ v \in \mathbb{R}^n\}$$

*Llamaremos al conjunto $\mathbb{R}^n_p$ espacio tangente a $\mathbb{R}^n$ en $p$.*

Para cada $p \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_p$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con operaciones definidas por

$$(p, v_1) + (p, v_2) = (p, v_1 + v_2)$$
$$a(p, v) = (p, av)$$

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$. Denotaremos a $(p, v)$ por $v_p$ de aquí en adelante.

**Definición 2.** *Un campo vectorial es una función*

$$F : \mathbb{R}^n \to \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \mathbb{R}^n_p$$

*tal que $F(p) \in \mathbb{R}^n_p$ para cada $p \in \mathbb{R}^n$.*

La condición $F(p) \in \mathbb{R}^n_p$ para cada $p \in \mathbb{R}^n$ de la defnición 2 es equivalente a decir que se cumple que $\pi \circ F(p) = p$ para cada $p \in \mathbb{R}^n$ donde

$$\pi : \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n$$

es la proyección canónica definida por $\pi(v_p) = p$ para cada $p \in \mathbb{R}^n$.

Dado que por definición un campo vectorial F es tal que $F(p) \in \mathbb{R}^n_p$ , entonces tenemos que $F(p) = F^1(p)(e_1)_p + \cdots + F^n(p)(e_n)_p$ donde $F^1(p), \ldots F^n(p)$ son escalares en $\mathbb{R}$ que dependen del punto $p$. Es decir, tenemos que las $F^i$ son funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Este hecho nos permite formular la siguiente definición:

**Definición 3.** *Decimos que un campo vectorial $F$ es continuo o diferenciable si cada una de las funciones $F^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lo son en el sentido usual.*

La definición 2 y el hecho de que para cada $p \in \mathbb{R}^n$ el conjunto $\mathbb{R}^n_p$ tiene estructura de espacio vectorial nos permite inducir (punto por punto) operaciones entre campos vectoriales:

**Definición 4.** *Sean F y G campos vectoriales. Definimos las operaciones*

$$(F + G)(p) = F(p) + G(p)$$
$$< F, G > (p) = < F(p), G(p) >$$
$$(fF)(p) = f(p)F(p)$$

*donde $p$ está en $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y < , > denota el producto punto en $\mathbb{R}^n$.*

Observemos que F + G y $fF$ son de nuevo campos vectoriales y que $< F, G >$ es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ . Mas aún, si $F$ y $G$ son campos vectoriales diferenciables (continuos) y $f$ es una función diferenciable (continua) entonces no es difícil demostrar que los campos vectoriales $F+G$ y $fG$ son diferenciables (continuos) y que la función $< F, G >$ es diferenciable (continua).

## ÁLGEBRA EXTERIOR

En esta sección escencialmente lo que haremos es definir formalmente los conceptos de k-forma y operador cuña $\wedge$ entre k-formas, pero en un sentido estrictamente algebraico. Dejaremos la definición geométrica formal de k-forma para la siguiente sección.

**Definición 5.** *Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión $n$ sobre $\mathbb{R}$. Sea $k \geq 1$ un entero. Definimos $\Lambda^k(V^*)$ como el conjunto*

$$\Lambda^k(V^*) = \{\alpha : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{ - veces}} \to \mathbb{R} \,|\, \alpha \text{ es multilineal y alternante}\}$$

*donde alternante significa que $\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots v_{\sigma(k)}) = Signo(\sigma)\alpha(v_1, \ldots, v_k)$ para toda permutación $\sigma$ en el grupo simétrico $S_k$, $v_i \in V$. (Ver [1] para el concepto de grupo de permutaciones).*

*Para $k=0$ definimos $\Lambda^k(V^*)$ simplemente como el conjunto de números reales $\mathbb{R}$.*

Es importante señalar que para cualquier $k \geq 0$ se tiene que $\Lambda^k(V^*)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.( Consultar [7], pag 72).

**Definición 6.** *Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ elementos en $V^*$ donde $V^*$ es el espacio dual de $V$. Definimos el producto exterior*

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{ - veces}} \to \mathbb{R} \; por$$

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k (v_1, \ldots, v_k) = det(\varphi_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq k}$$

*donde $v_i \in V$, $(\varphi_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq k}$ es la matriz cuadrada de tamaño $k \times k$ con entradas $\varphi_i(v_j)$ y det significa determinante.*

El hecho de que el determinante es una función multilineal y alternante implica que $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k$ es un elemento de $\Lambda^k(V^*)$. ([7], pag.75). Esto nos permite "generalizar" y al mismo tiempo formalizar el producto $\wedge$ que discutimos en la primera sección: tomando $V = \mathbb{R}^n_p$ en la definición anterior tenemos que $\Lambda^1(V^*) = (\mathbb{R}^n_p)^*$ y así los elementos $dx^1(p), \ldots, dx^n(p)$ pertenecen a $\Lambda^1(V^*)$. Aplicando la definición 6 y haciendo un simple cálculo obtenemos que

$$dx^i(e_r)(p) \wedge dx^j(p)(e_s) = -dx^j(p)(e_r) \wedge dx^i(p)(e_s)$$

donde $e_r$ y $e_s$ son elementos cualquiera de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, lo cual significa que

$$dx^i(p) \wedge dx^j(p) = -dx^j(p) \wedge dx^i(p)$$

justo como necesitábamos. Esto es, el elemento $dx^i(p) \wedge dx^j(p)$ ya no es sólo un "símbolo", sino que es un elemento bien defiido del espacio vectorial $\Lambda^2(V^*)$ con $V = \mathbb{R}^n_p$. Retomaremos estos hechos en la siguiente sección.

A continuación analizaremos a $\Lambda^k(V^*)$. Dado que $\Lambda^k(V^*)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ es natural preguntarse cual es su dimensión y exhibir una base. Este espacio es de hecho de dimension finita y una base se construye a partir de los productos cuña de los elementos de la base dual asociada a cualquier base de V, mas precisamente (Consultar [7], Teorema 4-5, pág. 75 para ver la demostración de la siguiente construcción),

Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $V$ y $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ es la base dual asociada a la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ para $V^*$. Entonces

$$\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^* \,|\, 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

es una base de $\Lambda^k(V^*)$. Así dim $\Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k}$ y además

$$\Lambda^k(V^*) = \left\{ \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k} v_{i1}^* \wedge \cdots \wedge v_{ik}^* \,|\, a_{i_1 \ldots i_k} \in \mathbb{R} \right\}$$

donde la expresión $i_1 < \cdots < i_k$ que aparece debajo de la sumatoria anterior significa que los sumandos de dicha sumatoria están indexados por los elementos de la base $\{v_{i1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i\,k}^* \,|\, 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ de $\Lambda^k(V^*)$.

La manera natural de extender el producto exterior $\wedge$ es la siguiente

**Definición 7.** *Se define* $\wedge : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^l(V^*) \to \Lambda^{k+l}(V^*)$ *por*

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l})$$

$$= \frac{1}{(k+l)!} \sum\nolimits_{\sigma \in S_{k+l}} sgn\sigma \;\; \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)})$$

para $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$, $\beta \in \Lambda^l(V^*)$, $v_1, \ldots, v_{k+1}$ en $V$.

## FORMAS

En la sección 1 vimos que la condición $dw=0$ es necesaria para que una 1-forma $w$ tenga una "primitiva" $f$ y mencionamos que dicha condición no es sufiiente. En realidad si lo es cuando el dominio de definición de la 1-forma es todo $\mathbb{R}^n$. Más precisamente, veremos al final de esta sección que el hecho de que una $k$-forma $w$ tal que $dw=0$ tenga una primitiva depende de una condición topológica del dominio abierto de definición de la $k$-forma $w$. Dicha condición es que el dominio abierto en cuestión sea contraible (ver [6], pág. 374, para la definición de espacio contraible). Este resultado se conoce como Lema de Poincaré.

En analogía con la definición de campo vectorial dada en la definición 2 tenemos la siguiente:

**Definición 8.** *Sea $k \geq 0$ un entero. Una $k$-forma es una función*

$$w : \mathbb{R}^n \to \bigcup_{p\in\mathbb{R}^n} \Lambda^k((\mathbb{R}^n_p)^*)$$

*tal que $w(p) \in \Lambda^k((\mathbb{R}^n_p)^*)$ para cada $p \in \mathbb{R}^n$.*

En el caso de 1-formas tenemos que $\Lambda^1((\mathbb{R}^n_p)^*) = (\mathbb{R}^n_p)^*$. Nótese la clara analogía de la definición 2 de campo vectorial con la definición 8 para el caso de 1-formas, esto es, tenemos que la definición 8 es la misma que la definición 2 de campo vectorial salvo que hemos cambiado $(\mathbb{R}^n_p)^*$ por $\mathbb{R}^n_p$.

Nuevamente como en el caso de campos vectoriales tenemos que la condición dada en la definicióon 8 de que $w(p) \in \Lambda^k((\mathbb{R}^n_p)^*)$ para cada $p \in \mathbb{R}^n$ equivale a decir que se cumple que $\pi \circ w(p) = p$ para cada $p \in \mathbb{R}^n$ donde

$$\pi : \bigcup_{p\in\mathbb{R}^n} \Lambda^k((\mathbb{R}^n_p)^*) \to \mathbb{R}^n$$

es la proyección canónica definida por $\pi(\alpha) = p$ si $\alpha \in \Lambda^k((\mathbb{R}^n_p)^*)$.

Otra observación es que si $w$ es una k-forma con dominio $\mathbb{R}^n$ entonces por la definición 8 tenemos que $w(p)$ es un elemento en $\Lambda^k((\mathbb{R}^n_p)^*)$. Por otra parte, si $\{(e_1)_p, \ldots (e_n)_p\}$ es una base de $\mathbb{R}^n_p$ y $\{\varphi_1(p), \ldots, \varphi_n(p)\}$ es la base dual de $\{(e_1)_p, \ldots (e_n)_p\}$ para $(\mathbb{R}^n_p)^*$ entonces de la construcción de una base para $\Lambda^k((\mathbb{R}^n_p)^*)$ que dimos en la sección 2 tenemos que $w(p)$ se expresa como

$$w(p) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} w_{i_1\ldots i_k}(p)\varphi_{i_1}(p)\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_k}(p)$$

donde los $w_{i_1\ldots i_k}(p)$ son escalares en $\mathbb{R}$ que dependen del punto $p$. Es decir, tenemos que las $w_{i_1\ldots i_k}$ son funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Al igual que en el caso de campos vectoriales este hecho nos permite dar la siguiente definición

**Definición 9.** *Una k-forma se llama continua o diferenciable si cada una de las funciones $w_{i_1\ldots i_k}$ lo son en el sentido usual.*

Nuevamente como en el caso de campos vectoriales las formas se suman y se multiplican punto a punto, mas precisamente tenemos

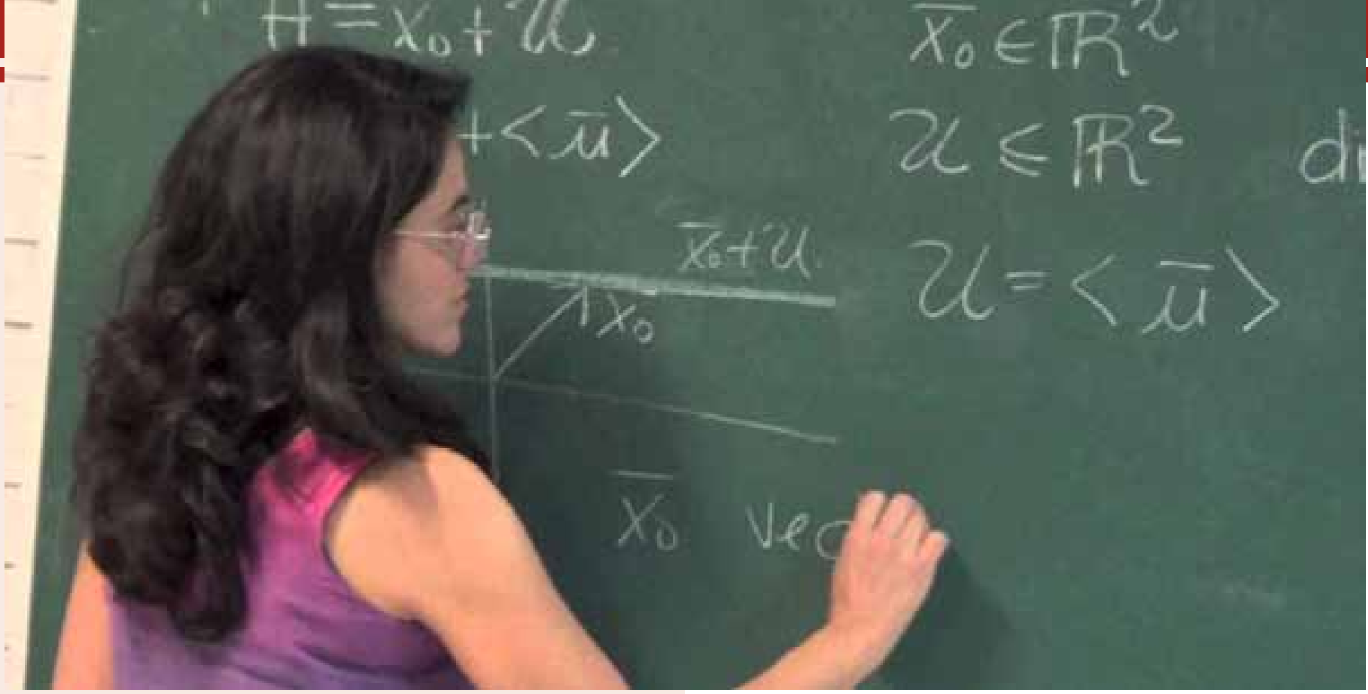
**Definición 10.** *Sean $w$ y $\eta$ dos k-formas y sea $\epsilon$ una $l$-forma. Definimos*

$$(w+\eta)(p) = w(p) + \eta(p)$$
$$(fw)(p) = f(p)w(p)$$
$$(w\wedge\epsilon)(p) = w(p)\wedge\epsilon(p)$$

*donde $p \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable.*

En analogía con el caso de campos vectoriales tenemos que $w+\eta$ y $fw$ son k-formas y que $w\wedge\epsilon$ es una (*k*+l)-forma. Más aún, si $w, \eta$ y $\epsilon$ son formas diferenciables (continuas) y $f$ es diferenciable (continua) entonces no es difícil demostrar que las formas $w+\eta$, $fw$ y $w\wedge\epsilon$ son diferenciables (continuas). Notemos también que una 0-forma es simplemente una función $f$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Así, tenemos que $f\wedge w = fw$.

Haciendo una ligera modificación de la expresión (3) de la sección 1 para $Df(p)$ tenemos la siguiente:



**Definición 11.** *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable. Definimos la 1-forma*

$$df : \mathbb{R}^n \to \bigcup_{p\in\mathbb{R}^n} (\mathbb{R}^n_p)^*$$

*de la siguiente manera, a cada* $p$ *en* $\mathbb{R}^n$ *le asociamos la función lineal* $df(p) : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}$ *definida por* $df(p)(v_p) = Df(p)(v)$ *para cada* $v_p$ *en* $\mathbb{R}^n_p$.

Notemos que la definición 11 es en realidad la definición formal del operador $d$ para 0-formas discutido en la sección 1 que manda a cada 0-forma $f$ en la 1-forma $df$.

El siguiente lema nos permitirá dar una expresión explícita para la 1- forma $df$ de la definición 11 y también dar la expresión de cualquier k-forma $w$ en términos de los $dx^i$.

**Lema 12.** *Sean* $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *las proyecciones canónicas para cada* $i$ *y consideremos las 1-formas asociadas* $dx^1, \ldots, dx^n$. *Entonces el conjunto*

$$\{dx^1(p), \ldots, dx^n(p)\}$$

*es la base dual para* $\Lambda^1(\mathbb{R}^n_p) = (\mathbb{R}^n_p)^*$ *asociada a la base canónica* $\{(e_1)_p, \ldots, (e_n)_p\}$ *de* $\mathbb{R}^n_p$.

Demostración:

$$\begin{aligned}(dx^i(p))((e_j)_p) &= Dx^i(p)(e_j) \\ &= \left(\frac{\partial x^i}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial x^i}{\partial x_n}(p)\right)(e_j) \\ &= \delta_{i,j}\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es por (3) de la seccón 1.

**Corolario 13**. *por el lema 12 cada k-forma* $w$ *con dominio en* $\mathbb{R}^n$ *se puede escribir como*

$$w = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} w_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

donde $w_{i_1 \ldots i_k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$.

En particular si $w$ es una 1-forma con dominio $\mathbb{R}^n$ entonces $w$ es de la Forma

$$w = g_1 dx^1 + \cdots g_n dx^n$$

donde las $gi$ son funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, lo cual coincide con la definición informal de 1-forma que dimos en la sección 1.

Procedamos ahora a obtener la expresión de la 1-forma $df$ asociada a una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la definición 11. Para esto necesitamos primero el siguiente lema:

**Lema 14.**

$$(dx^i(p))(v_p) = v^i \; donde \; v_p = v^1(e_1)_p + \cdots v^n(e_n)_p$$

Demostración:

$$\begin{aligned}dx^i(p)(v_p) &= dx^i(p)\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n} v^i \; (e_j)_p\right) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{p} v^i \, dx^i(p)((e_j)_p) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{p} v^i \, \delta_{i,j} \\ &= v^i\end{aligned}$$



Rafael Ramos et al: UNISON / EPISTEMUS 14 / Año 7/ 2013/ pág.: 64-72

donde la tercera igualdad es por el lema 12.

**Teorema 15.** *Sea* $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable, entonces*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx^n$$

Demostración:

$$\begin{aligned}(df(p)(v_p) &= (Df)(p)(v)\\ &= (Df)(p)(\textstyle\sum_{i=1}^{n} v^i e_i)\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} v^i Df(p)(e_i)\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} v^i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} dx^i(p)(v_p)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)\end{aligned}$$

donde la última igualdad es por el lema 14.

Así tenemos que la expresión para $df$ dada por el teorema 15 coincide con la expresión "informal" que obtuvimos para $df$ en la sección 1.

Procederemos ahora a definir el pull-back asociado a una función $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable y a una *k*-forma $w$ con dominio $\mathbb{R}^m$. Pero antes necesitamos introducir dos definiciones.

Haciendo una ligera modificación de la definición de la diferencial $Df(p)$ dada en la página 2 en la sección 1 tenemos la siguiente:

**Definicion 16.** *Sea* $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una función diferenciable. Para cada* $p$ *fijo en* $\mathbb{R}^n$ $f$ *induce la función lineal* $f_*:\mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m_{f(p)}$ *definida por* $f_*(v_p) = (Df(p)(v))_{f(p)}$ *para cada* $v_p \in \mathbb{R}^n_p$*:*

**Definición 17.** *Para cada* $p$ *fijo en* $\mathbb{R}^n$ *la función* $f_*:\mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m_{f(p)}$ *de la definición 16 induce una función lineal*

$$f^*\colon \Lambda^k((\mathbb{R}^m_{f(p)})^*) \to \Lambda^k((\mathbb{R}^n_p)^*)$$

*definida de la siguiente manera, si* $\varphi \in \Lambda^k((\mathbb{R}^m_{f(p)})^*)$*, esto es*

$$\varphi : \underbrace{\mathbb{R}^m_{f(p)} \times \cdots \times \mathbb{R}^m_{f(p)}}_{k\text{ - veces}} \to \mathbb{R}$$

*es una función multilineal y alternante, entonces por definición*

$$f^*(\varphi) : \underbrace{\mathbb{R}^n_p \times \cdots \times \mathbb{R}^n_p}_{k\text{ - veces}} \to \mathbb{R}$$

*es el elemento en* $\Lambda^k((\mathbb{R}^n_p)^*)$ *tal que*

$$f^*(\varphi)((v_1)_p,\ldots,(v_k)_p) = \varphi(f_*((v_1)_p),\ldots,f_*((v_k)_p))$$

*para cada* $(v_1)_p,\ldots,(v_k)_p$ *en* $\mathbb{R}^n_p$*.*

Usando las dos definiciones anteriores estamos listos para presentar la definición de pull-back para una *k*-forma:

**Definición 18.** *Dada una k-forma*

$$w:\mathbb{R}^m \to \bigcup_{p\in\mathbb{R}^m} \Lambda^k((\mathbb{R}^m_p)^*)$$

*y una función diferenciable* $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *definimos la k-forma*

$$f^*(w)\colon \mathbb{R}^n \to \bigcup_{p\in\mathbb{R}^n} \Lambda^k((\mathbb{R}^n_p)^*)$$

*por* $(f^*(w))(p) = f^*(w(f(p))) \in \Lambda^k((\mathbb{R}^n_p)^*)$ *para cada* $p$ *en* $\mathbb{R}^n$*. A la k-forma* $f^*w$ *se le llama el "pull-back" de* $w$ *bajo la función* $f$*.*

Es importante notar lo siguiente: si $n<m$ entonces $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ de manera natural. Si tomamos $f$ como la función inclusión $i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en la definición 18 y consideramos una *k*- forma diferenciable $w$ en $\mathbb{R}^m$ entonces $i^*(w)$ es una *k*-forma diferenciable en $\mathbb{R}^n$ que puede pensarse como la restricción de $w$ al dominio $\mathbb{R}^n$, aun cuando $\mathbb{R}^n$ no es un abierto en $\mathbb{R}^m$. Esta es una propiedad fundamental de las formas que en general no comparten los campos vectoriales: cualquier forma en $\mathbb{R}^m$ se puede restringir a un subespacio $S$ de $\mathbb{R}^m$ siempre y cuando tenga sentido decir que la función inclusión de $S$ en $\mathbb{R}^m$ es una función diferenciable. En general esto ocurre cuando $S$ es una subvariedad diferenciable de $\mathbb{R}^m$ (consultar [5], pag. 3 y pag. 9 para la definición de variedad diferenciable y subvariedad diferenciable).

En el siguiente teorema enunciamos las propiedades algebraicas del pull back, para su demostración consultar [7] (Teorema 4-8, pag. 83).

**Teorema 19.** *Sea* $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una función diferenciable. Así* $f=(f^1,\ldots,f^m)$ *con* $f^i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *. Entonces para cualesquiera* $w, w_1, w_2$ *k-formas con dominio* $\mathbb{R}^m$ *y cualquier función* $g:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *diferenciable se cumplen las siguientes propiedades:*

$$(1)\ f^*(dx^i) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j.$$

$$(2)\ f^*(w_1+w_2) = f^*(w_1)+f^*(w_2).$$

$$(3)\ f^*(gw) = (g\circ f)\, f^*(w).$$

$$(4)\ f^*(w_1\wedge w_2) = f^*(w_1)\wedge f^*(w_2).$$

Daremos a continuación la definición formal de operador diferencial $d$ para cualquier *k*-forma.

**Definición 20.** *Sea $w$ una k-forma (diferenciable) con dominio $\mathbb{R}^n$. Entonces por el corolario 13 $w$ se puede escribir como*

$$w = \sum_{i_1<\cdots<i_k} w_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

*donde $w_{i_1\ldots i_k} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables. Definimos una (k+1)- forma $dw$ con dominio en $\mathbb{R}^n$ por*

$$dw = \sum_{i_1<\cdots<i_k} dw_{i_1\ldots i_k} \wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

*donde*

$$dw_{i_1\ldots i_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^j} dx^j$$

*por el teorema 15.*

En el siguiente teorema enunciamos las propiedades principales del operador diferencial $d$, su demostración se encuentra en [7] (Teorema 4-10, pág.84).

**Teorema 21.** *Para cualesquier par de k-formas $w, w_1$, cualquier escalar $c$ en $\mathbb{R}$, cualquier función diferenciable $f$ de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ y cualquier $l$-forma $\eta$ se cumple:*

(1) $d(w + cw_1) = dw + cdw_1$ *(Linealidad).*

(2) $d(w\wedge\eta) = dw \wedge\eta + (-1)^{kl} w\wedge d\eta$.

(3) $d(dw) = 0$ *(es decir, $d^2(w)=0$).*

(4) $f^*(dw) = d(f^*(w))$ *($d$ conmuta con el pull-back).*

**Definición 22.** *Una k-forma $w$ es cerrada si $dw = 0$.*

*Una k-forma $w$ es exacta si existe una (k-1)-forma $\eta$ tal que $w = d\eta$.*

**Observación 23.** *el inciso (3) del teorema 21 dice que toda forma exacta es cerrada.*

**Observación 24.** *No toda forma cerrada es exacta, por ejemplo en $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$ podemos definir la 1-forma*

$$w = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

*entonces se puede demostrar que no existe una 0-forma $f$ defiida en $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$ tal que $df^* = w$. Para la demostración de este hecho consultar [7], pág. 85.*

Sin embargo el Lema de Poincaré nos da condiciones suficientes para que una $k$-forma cerrada definida en un dominio abierto de $\mathbb{R}^n$ tenga una primitiva:

**Teorema 25.** *(Lema de Poincaré) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto contraíble entonces toda $k$-forma cerrada es exacta.*

**Demostración:** Ver cita bibliográfica (7), pág. 86, o bien (3), pág. 23. Para una prueba másgeneral consultar (8), pág. 155 o también (5), pág. 109.

Notemos que no es necesario pedir que el dominio de definición de una $k$-forma cerrada $w$ sea contraible para que $w$ tenga una primitiva: dado que $\mathbb{R}^n$ es contraible tenemos, por el lema de Poincaré, que cualquier $k$-forma cerrada $w$ con dominio $\mathbb{R}^n$ tiene una primitiva, es decir, existe una $(k-1)$-forma $\eta$ tal que $d\eta = w$. Si $p$ es cualquier punto en $\mathbb{R}^n$, podemos considerar la restricción de $w$ al dominio abierto $U$ definido por $U = \mathbb{R}^n - \{p\}$ el cual no es contraible. La restricción de $w$, $w|_U$ es nuevamente una $k$-forma cerrada con dominio $U$ y es tal que tiene una primitiva dada por $\eta|_U$.

Dicho de otro modo, si $i : U \to \mathbb{R}^n$ denota la inclusión de $U$ en $\mathbb{R}^n$ entonces aplicando el inciso (4) del teorema 21 tenemos que la $k$-forma restricción $i^*(w)$ con dominio $U$ es tal que

$$d(i^* w) = i^*(dw) = i^*(0) = 0$$

es decir, la $k$-forma $i^*(w)$ es cerrada. Además

$$d(i^*\eta) = i^*(d\eta) = i^*(w)$$

es decir la primitiva de $i^*(w)$ es la ($k$ -1)-forma $i^*(\eta)$.

Con este análisis concluimos los objetivos de este artículo.

## BIBLIOGRAFÍA


1) Fraleigh, J. B. (1987), *Algebra Abstracta*, Addison-Wesley Iberoamericana.
2) Hotfman, K. y Kunze, R. (1973),*Algebra Lineal*, Prentice Hall.
3) Madsen, I. and Tornehave, J. (1999), *From Calculus to Cohomology*, Cambridge University Press, Reprinted.
4) Marsden, J.E. y Tromba, A.J. (1981),*Calculo Vectorial*, Fondo educativo Interamericano.
5) Michor, P.W. (2007),*Topics in Differential Geometry*, Lecture notes.
6) Munkres, J.R. (2008), *Topología*, Pearson, 2a. Edición. Reimpresión.
7) Spivak, M. (2004). *Cálculo en variedades*, Editorial Reverté, S. A., Reimpresión.
8) Warner, F.W. (1987).*Foundations of Differentiable Manifolds and LieGroups*, Springer, Second Printing.