



MODELO NO LINEAL CON POTENCIAL SENO-GORDON PARA UN CRISTAL FOTÓNICO UNIDIMENSIONAL

MARGARITA FRANCO ORTÍZ, ADALBERTO CORELLA MADUEÑO, JUAN ADRIÁN REYES CERVANTES, ARNULFO CASTELLANOS MORENO Y RODRIGO ARTURO ROSAS BURGOS

Se presenta un modelo para un cristal fotónico unidimensional formado por una sucesión de planos constituidos por material no lineal, inmersos en un medio lineal. Se resuelve la ecuación de Schrödinger introduciendo en el hamiltoniano modelo del cristal un potencial no lineal tipo Seno-Gordon. Se obtiene analíticamente una versión generalizada, dependiente de la amplitud de la onda incidente, de la ecuación trascendente que caracteriza al modelo del cristal de Kronig-Penney, de donde se determina la estructura de las bandas de energía del cristal. El modelo puede aplicarse a una versión finita de un cristal fotónico para un número limitado de capas alternadas de material lineal y no lineal para el cual se han calculado la reflectancia como una función de la intensidad de la onda electromagnética, el índice de la banda y el número de períodos. Es posible construir un sistema con estas características alternando capas muy delgadas de material de materia blanda no lineal con capas sólidas más gruesas, con el cual puede diseñarse un dispositivo para controlar la propagación de luz para intervalos de longitudes de onda específicos e intensidades de la luz de la misma señal que se propaga.

M.C. MARGARITA FRANCO ORTIZ
Universidad de Sonora, Departamento de Física
Alumna en el Programa de Doctorado en Nanotecnología
Correo: mfranco@correo.fisica.uson.mx
DR. ADALBERTO CORELLA MADUEÑO
Universidad de Sonora, Departamento de Física
Correo: adalberto.corella@correo.fisica.uson.mx
DR. JUAN ADRIÁN REYES CERVANTES
UNAM, Instituto de Física
Correo: adrian@fisica.unam.mx
DR. ARNULFO CASTELLANOS MORENO
Universidad de Sonora, Departamento de Física
Correo: acastell@correo.fisica.uson.mx
DR. RODRIGO ARTURO ROSAS BURGOS
Universidad de Sonora, Departamento de Física
Correo: rosas@correo.fisica.uson.mx

*Autor para correspondencia: Margarita Franco Ortíz
Correo electrónico: mfranco@correo.fisica.uson.mx
Recibido: 12 de marzo de 2013
Aceptado: 23 de mayo de 2013
ISSN: 2007-4530





INTRODUCCIÓN

Los cristales fotónicos (CFs) son materiales compuestos, espacialmente periódicos, que pueden exhibir brechas en la banda fotónica (BF) para la propagación de la luz, los cuales han llegado a un estado maduro de desarrollo con sus propiedades ópticas bien conocidas y con muchas posibles aplicaciones (1). La mayor parte de las investigaciones en esta área se refieren a CFs cuyas características están fijas, es decir, una vez que se han fabricado no hay posibilidad de alterar su respuesta óptica. Sin embargo, una tendencia reciente se refiere a CFs activos que por medio de algún agente externo pueden cambiarse sus propiedades ópticas de forma continua y reversiblemente. Esto podría dar lugar a guías de ondas ópticas sintonizables, interruptores, limitadores y polarizadores, redes ópticas reconfigurables, e interconexiones electro-ópticas en la microelectrónica.

Podemos clasificar a los CFs sintonizables de acuerdo a dos grandes categorías: para una de ellas, un agente externo causa cambios estructurales sin alterar las constantes dieléctricas de los materiales constituyentes; en la otra categoría la configuración del CF permanece igual y es una propiedad material del CF la que es afectada por el agente externo. Se ha realizado la sintonización estructural por medio de tensión mecánica aplicada a un ópalo polimérico de esferas a escala nanométrica; aplicando un campo eléctrico a un cristal fotónico sobre un sustrato piezoeléctrico; mediante la incorporación de diodos en una estructura 2D de alambres; y aplicando un campo magnético a partículas magnéticas distribuidas periódicamente (2). Por otro lado, la sintonización a través de la alteración de alguna propiedad del material involucra la incorporación de algún material ferroeléctrico o ferromagnético en el CF para ser sintonizado por un campo eléctrico o magnético externo, respectivamente

(3). En particular, los cristales líquidos (CLs) son materiales electro-ópticos bien establecidos que pueden sintonizarse por medio de la presión, calor y el campo eléctrico o magnético aplicado. Su incorporación dentro de un cristal fotónico es de particular interés por la posibilidad de sintonizar selectivamente brechas BF, como se revisó recientemente (4).

La ecuación Sine Gordon aparece en 1970 como una forma de incluir efectos no lineales en las teorías físicas y su uso se extiende desde la teoría del campo relativista hasta el estudio de la dinámica de las líneas de transmisión. Su interés se centra en la existencia de soluciones llamadas solitones, cuyo nombre obedece a que son ondas que se propagan sin dispersarse. Existen varias formas de obtener la ecuación y entre ellas se pueden mencionar desde modelos de cadenas de osciladores hasta la postulación de una densidad lagrangiana adecuada, tal que por medio de la formulación lagrangiana es posible obtener la ecuación correspondiente. Ésta es una labor altamente técnica que se ubica al margen del propósito de este trabajo. Nuestro objetivo se centra en modelar una estructura periódica capaz de intercalar dos materiales: uno cuya respuesta a la perturbación ondulatoria es lineal y otra de carácter no lineal situada en sitios separados una distancia a . Este es el papel que juega la función seno y constituye una generalización de otro modelo que hemos estudiado anteriormente.

Los efectos no lineales son muy amplios, pero es posible presentar un ejemplo que muestre la diferencia entre la conducta lineal y la que no lo es. Si enviamos un pulso luminoso a través de un material lineal, la luz se propagará de forma que el pulso se va haciendo cada vez más ancho. En términos técnicos, se dice que es un síntoma de conducta dispersiva. En cambio, en un medio no lineal pueden aparecer varios efectos en el pulso que

se propaga, Puede ser que el pulso se haga más angosto, o bien, que simplemente mantenga su forma.

ESTRUCTURA DE BANDAS EN EL MODELO DE KRONIG-PENNEY LINEAL

El modelo de Kronig-Penney (KP) es un modelo que describe los estados de energía de un electrón perteneciente a un cristal, para ello se supone que la estructura cristalina configura un potencial periódico de cambios abruptos que, si bien es hipotético, es de gran utilidad para los cálculos.

El modelo KP es una aproximación al comportamiento real de los electrones en el cristal y toma en cuenta la periodicidad de la estructura cristalina de los sólidos; el potencial periódico real debido a los iones en la red cristalina se simplifica del espacio tridimensional (3D) al unidimensional (1D) considerando una sucesión periódica de pozos y barreras rectangulares unidimensionales, donde el centro de cada pozo corresponde a la posición que ocupa cada uno de los iones en la red (Figura 1).

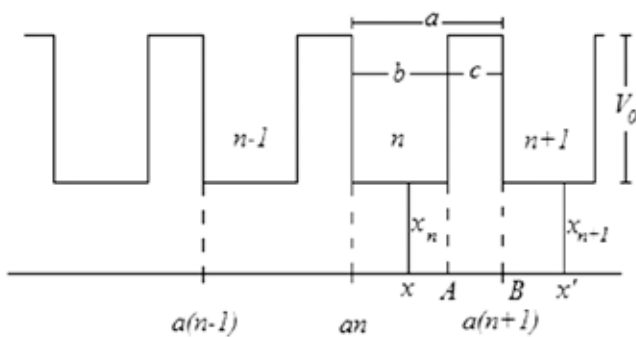


Figura 1. Modelo de cristal unidimensional (1D) infinito de Kronig-Penney.

La posición de un punto x en el pozo n es x_n , medida desde la pared izquierda de este pozo: $x_n = x - na$. El punto B tiene la coordenada $x_n = a$, que equivale a $x_{n+1} = 0$; a representa la constante de red del cristal, es la distancia entre una pareja de iones sucesivos en la red.

La ecuación de Schrödinger correspondiente para este sistema está dada por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

Los potenciales en los pozos son cero $V(x) = 0$, y en las barreras es diferente de cero, es decir, $V(x) = V_0$.

La función de onda electrónica dentro del pozo n es:

$$\psi_n = A_n \sin kx_n + B_n \cos kx_n, \quad 0 \leq x_n \leq b \quad (1)$$

y dentro de la barrera n :

$$\psi_n = A'_n \sinh q(a - x_n) + B'_n \cosh q(a - x_n), \quad b \leq x_n \leq a \quad (2)$$

donde:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{y} \quad q^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E) \quad (3)$$

La función de onda dentro del pozo $n + 1$:

$$\psi_{n+1} = A_{n+1} \sin kx_{n+1} + B_{n+1} \cos kx_{n+1}, \quad 0 \leq x_{n+1} \leq b \quad (4)$$

La función de onda y su derivada deben ser continuas en el punto A ($x_n = b$; $x_{n+1} = c$):

$$\begin{aligned} A_n \sin kb + B_n \cos kb &= A'_{n+1} \sinh qc + B'_{n+1} \cosh qc \\ k[A_n \cos kb - B_n \sin kb] &= -q[A'_{n+1} \cosh qc + B'_{n+1} \sinh qc] \end{aligned} \quad (5)$$

y también en el punto B ($x_n = a$; $x_{n+1} = 0$):

$$\begin{aligned} B'_n &= B_{n+1} \\ -qA'_n &= kA_{n+1} \end{aligned} \quad (6)$$

Sustituyendo las ecuaciones 6 en las ecuaciones 5 se llega a:

$$A_n \sin kb + B_n \cos kb = -\left(\frac{k}{q}\right) A_{n+1} \sinh qc + B_{n+1} \cosh qc \quad (7)$$

$$A_n \cos kb - B_n \sin kb = A_{n+1} \cosh qc - \left(\frac{q}{k}\right) B_{n+1} \sinh qc$$

Para simplificar la solución del sistema de ecuaciones 7 pasamos al límite $V_0 \rightarrow \infty$ y simultáneamente las barreras se hacen más y más estrechas, $c \rightarrow 0$, de tal manera que el producto cV_0 permanece constante, obtenemos así una sucesión periódica de potenciales delta repulsivos tipo peine de Dirac (la función peine de Dirac δ_T es una distribución periódica de deltas de Dirac espaciadas T y se representa por $\delta_T = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, a esta función también se le conoce como tren de impulsos unitarios), para los cuales la ecuación de Schrödinger adopta la forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\hbar^2\lambda}{ma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na)\psi = E\psi \quad (8)$$

En este límite las ecuaciones 7 se reducen a:

$$\begin{aligned} A_n \sin ka + B_n \cos ka &= B_{n+1} \\ A_n \cos ka - B_n \sin ka &= A_{n+1} - \left(\frac{2\lambda}{ka}\right) B_{n+1} \end{aligned} \quad (9)$$

donde λ es un parámetro adimensional real y positivo tal que $cV_0 = \frac{\hbar^2\lambda}{2m}$.

Se propone una solución de la forma:

$$A_n = c_1 f^n \quad \text{y} \quad B_n = c_2 f^n \quad (10)$$

Sustituyendo las ecuaciones 10 en las ecuaciones 9 se obtiene:

$$\begin{aligned} c_1 \sin ka + c_2 (\cos ka - f) &= 0 \\ c_1 (\cos ka - f) - c_2 \left(\sin ka - \frac{2\lambda}{ka} f \right) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Para que existan soluciones con $c_1, c_2 \neq 0$, se requiere que el determinante del sistema se anule. Esta

condición conduce a:

$$f^2 - 2f \cos \chi a + 1 = 0 \quad (12)$$

donde:

$$\cos \chi a \equiv \cos ka + \frac{\lambda}{ka} \operatorname{sen} ka \quad (13)$$

Las soluciones de la ecuación 12 son:

$$f = e^{\pm i\chi a} \quad (14)$$

las cuales sustituidas en las ecuaciones 11 dan:

$$c_1 = c_2 \frac{f - \cos ka}{\operatorname{sen} ka} = A \frac{f - \cos ka}{\operatorname{sen} ka}; \quad A = c_2$$

Para electrones desplazándose hacia la derecha se tiene:

$$A_n = A \frac{f - \cos ka}{\operatorname{sen} ka} e^{i\chi n a} \quad \text{y} \quad B_n = A e^{i\chi n a} \quad (15)$$

La sustitución de estos valores en la ecuación 1 da como resultado una función de onda de Bloch:

$$\psi_n = A e^{i\chi x} u_n \quad (16)$$

con:

$$u_n = \frac{e^{i\chi(a-x_n)} \operatorname{sen} k x_n + e^{-i\chi x_n} \operatorname{sen}(a-x_n)}{\operatorname{sen} ka} \quad (17)$$

Las ondas de Bloch obtenidas son un caso particular del Teorema de Floquet, el cual establece que las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos tienen soluciones de la forma $e^{\pm i k x} u(x)$ donde $u(x)$ es una función periódica de x .

La energía de los electrones queda determinada por el valor de χ . Los eigenvalores de la energía se obtienen de la ecuación 13 para k real (Figura 2). Se debe cumplir que:

$$-1 \leq \cos ka + \frac{\lambda}{ka} \operatorname{sen} ka \leq 1 \quad (18)$$

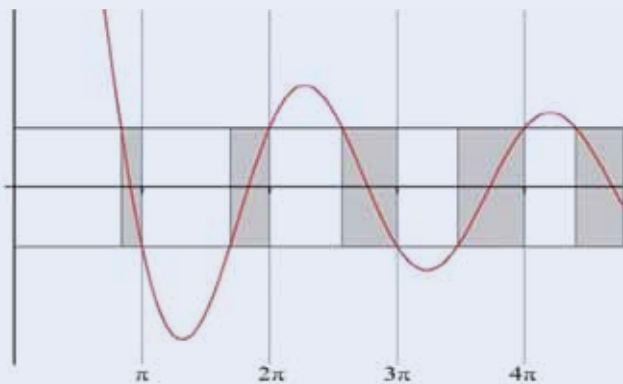


Figura 2. Gráfica de la ecuación 18, mostrando bandas permitidas (sombreadas) separadas por brechas prohibidas.

ESTRUCTURA DE BANDAS EN EL MODELO DE KRONIG-PENNEY NO LINEAL

Ahora se extenderá el estudio para resolver la ecuación de Schrödinger considerando el caso de un potencial periódico no lineal tipo seno-Gordon; podemos escribir la ecuación de propagación unidimensional como:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi - \left[\frac{n_2}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na) \operatorname{Sen} \psi \right] \psi = 0 \quad (19)$$

en donde n_2 es el coeficiente de no linealidad y φ es la amplitud de la onda de propagación. Para puntos $x \neq na$, en donde n es un número entero, la solución general de esta ecuación es de la forma:

$$\psi = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx \quad (20)$$

Después de una integración estándar de la ecuación 19 alrededor de los puntos $x = na$, se pueden establecer las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} e^{-if} \psi(a) &= \psi(0) \\ e^{-if} \frac{d\psi(a)}{dx} - \frac{d\psi(0)}{dx} &= n_2 \operatorname{Sen} \psi(0) \end{aligned} \quad (21)$$

en donde el parámetro de Bloch es f , el cual caracteriza el momento en cada celda unitaria. Después de aplicar estas condiciones a la ecuación 20 y de eliminar la constante B , se obtiene:

$$\cos f = \cos ka + p \frac{\operatorname{sen} A}{A} \frac{\operatorname{sen} ka}{ka} \quad (22)$$

$$\text{donde } p = \frac{n_2 a}{2}.$$

La ecuación 22 claramente representa una generalización de la ecuación 13 que corresponde al modelo de cristal lineal de Kronig-Penney. En este modelo no lineal, la estructura de bandas depende también de la amplitud de la onda incidente.

RESULTADOS

En la figura 3 se muestran las bandas permitidas y prohibidas que se han encontrado al resolver la ecuación 22. El eje vertical corresponde al lado derecho de esta ecuación, mientras que el eje horizontal representa a ka .

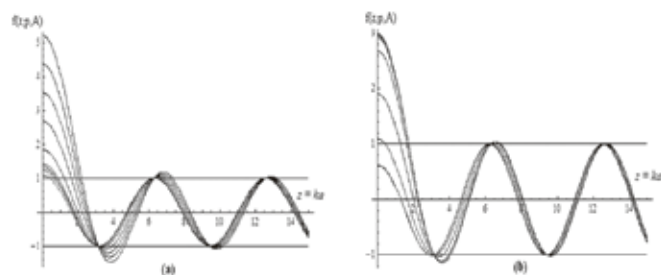
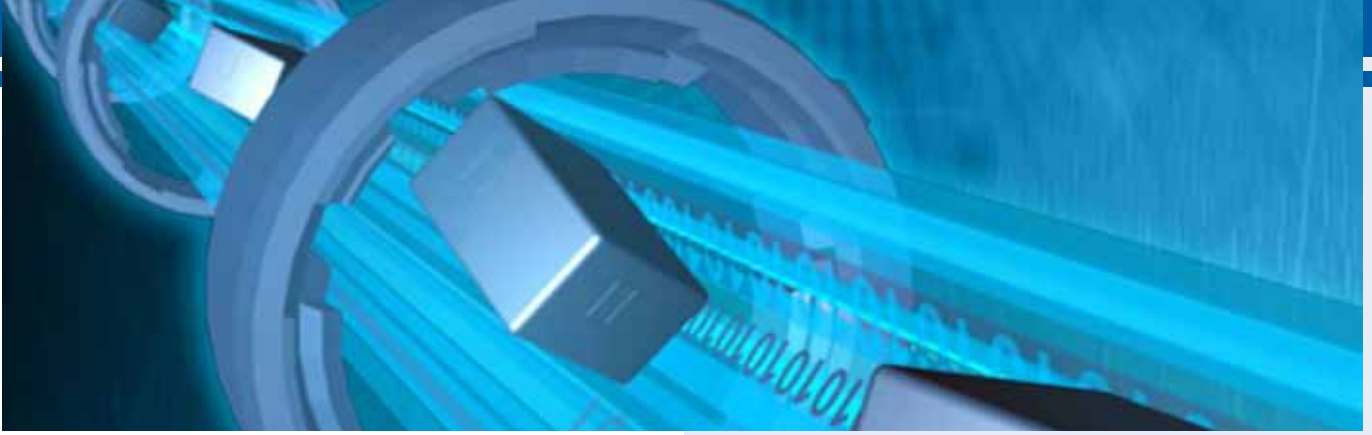


Figura 3. Gráfica de la ecuación 22: (a) Con $A = 1, p = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5$; (b) $p = 2, A = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5$.



La figura 4 muestra la estructura de bandas del CF no lineal como una función de las variables independientes $z = ka$ y A . La figura 5 exhibe la misma información, pero en una gráfica de superficies de nivel.

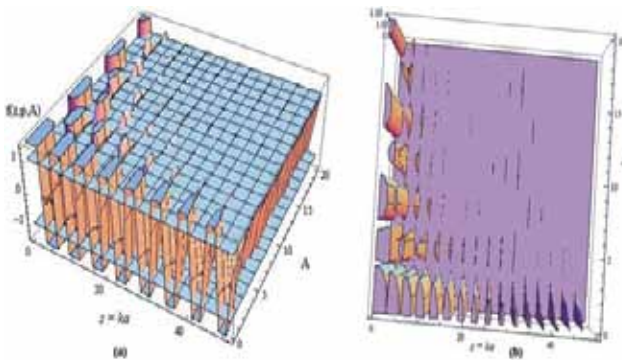


Figura 4. Gráfica de la ecuación 22: (a) Con $p = 100$, en función de $z = ka$ y A . (b) Gráfica del valor absoluto de la ecuación 22 con $p = 20$, en función de $z = ka$ y A .

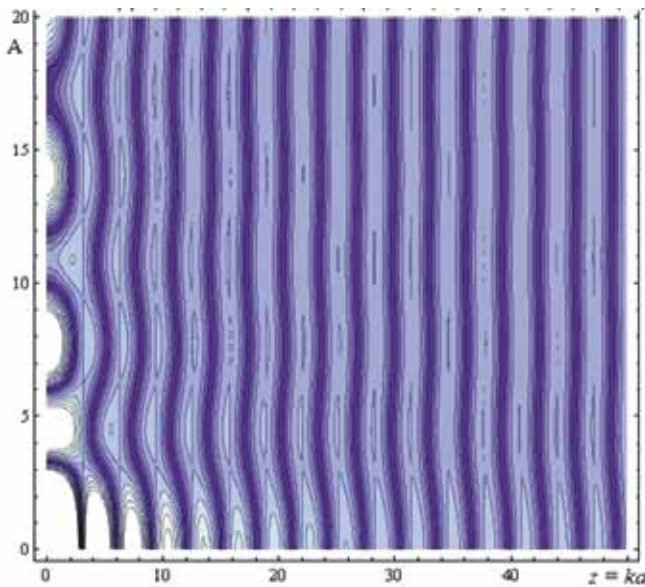


Figura 5. Superficies de nivel con $p = 20$, en función de $z = ka$ y A . Las regiones oscuras corresponden a las bandas permitidas.

CONCLUSIONES

Para amplitudes de la función de onda A constante, y coeficiente de no linealidad p pequeño, sólo se tiene una banda prohibida en la región de ka cercana a cero, conforme p crece, las bandas prohibidas se ensanchan, mientras que las bandas permitidas se vuelven cada vez más estrechas, hasta quedar localizadas en los puntos $n\pi$.

Para coeficientes de no linealidad p constante, y amplitud de la función de onda A variable, la anchura de las bandas prohibidas decrece conforme A aumenta, mientras que las bandas permitidas se ensanchan, pero cuando A alcanza un valor específico inicia un fenómeno de oscilación de la anchura tanto de las bandas prohibidas como permitidas, tal que a medida que A aumenta las bandas prohibidas se tornan cada vez más angostas y las bandas permitidas más anchas. Para A suficientemente grande desaparecen las bandas prohibidas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo del Programa de Colaboración Académica UNAM-UNISON y a la Dirección de Investigación y Posgrado de la UNISON por el Proyecto DCEN12-PI04.

BIBLIOGRAFÍA

- 1) Soukoulis, C.M. (Ed.). (2001). Photonic Crystals and Light Localization in the 21st Century. Kluwer Academic, Dordrecht. P. Lodahl, A.F. van Driel, I.S. Nikolaev, A. Iman, K. Overgaag, D. Vanmaekelbergh, W.L. Vos, Nature (London) 430 (2004) 654; K. Bush, S. Lölkes, R.B. Wehrspohn, H. Föll (Eds.), (2004). Photonic Crystals: Advances in Design, Fabrication, and Characterization, Wiley-VCH.
- 2) Kim, s., Gopalan, V. (2001). Applied Physics Letters 78, 3015; J.D. Joannopoulos, R.D. Meade, J.N. Winn (1995). Photonic Crystals, Princeton University Press; K. Sakoda (2001). Optical Properties of Photonic Crystals, Springer; M. Golosovsky, Y. Saado, D. Davidov (1999). Applied Physics Letters 75, 4168; Y. Saado, M. Golosovsky, D. Davidov, A. Frenkel, Physical Review B 66 (2002) 195108.
- 3) Figotin, A., Godin, Y.A., Vitebski, I. (1998). Physical Review B 57, 2841; Chul-Sik Kee, Jae-Eun Kim, Hae Yong Park, Ikmo Park, H. Lim (2000). Physical Review B 61, 15523; C.S. Kee, J.E. Kim, H.Y. Park (1998). Physical Review E 57, 2327; J. Zhou, C.Q. Sun, K. Pita, Y.L. Lam, Y. Zhou, S.L. Ng, C.H. Kam, L.T. Li, Z.L. Gui (2001). Applied Physics Letters 78, 661.
- 4) Kitzerow, H.S., Reithaimer, J.P. (2004). Ref. 1c, Chap. 9; S. Gutiérrez-López, A. Castellanos-Moreno, A. Corella-Madueño, R.A. Rosas-Burgos and J.A. Reyes (2004). Optics Comm. 285: 2439-2444.