

LOTIFICACIÓN EN SISTEMAS MULTINIVEL POR MEDIO DE LA RELAJACIÓN LAGRANGEANA CON PARÁMETROS OPTIMIZADOS MEDIANTE SUPERFICIE DE RESPUESTA

Lotification in multilevel systems through lagrangean relaxation with optimized parameters through response surface

Álvaro Roca Molina¹
Javier Barón Villamizar²
Orlando Zapateiro³
Jairo R. Coronado Hernández⁴
Cedrid Gómez Torregrosa⁵

Recibido: 10 /4/2019

Aceptado: 3/10/2019

Resumen

propósito de este artículo es presentar un algoritmo para obtener una cota inferior para el problema de lotificación en sistemas multinivel. Los parámetros de la relajación lagrangeana se optimizan mediante el uso de superficie de respuesta. Los resultados obtenidos comprueban que el algoritmo de relajación lagrangeana propuesto alcanza soluciones cercanas al óptimo en menor tiempo en comparación al modelo original resuelto bajo programación entera mixta.

Palabras clave: Relajación Lagrangeana, GAMS, Sistemas multinivel, Gozinto, MRP, Stroke

Abstract

The purpose of this article is to present an algorithm to obtain a lower bound for the problem of multilevel systems. The parameters of Lagrangean relaxation are optimized by the use of response surface. The results obtained prove that the proposed Lagrangian relaxation algorithm achieves near optimal solutions in less time compared to the original model solved under mixed integer programming.

Keywords: Lagrangeana Relaxation, GAMS, Multilevel Systems, Gozinto, MRP, Stroke

¹Magíster en Ingeniería de Producción. Sociedad Portuaria el Cayao S.A. E.S.P. Perú. Alvaro03_1204@hotmail.com.

²Magíster en gestión logística, Capitán de Corbeta. Decano Administración marítima ENAP. Javier.baron@armada.mil.

³Magíster en Educación. Catedrático Universidad de ciencias Ambientales y Aplicadas UDCA. Fundación Tecnológico de Bolívar. Escuela Naval de Cadetes "Almirante Padilla". ozapateiro@hotmail.com.

⁴Doctor en Ingeniería y Producción Industrial. Decano Departamento Gestión Industrial, agroindustrial y Operaciones Corporación Universitaria de la Costa. Jcoronad18@cuc.edu.co.

⁵Economista. Maestrante en educación. Escuela Naval de Cadetes "Almirante Padilla". cedridgo-mez@gmail.com

Introducción

El problema de lotificación capacitado en sistemas multinivel en entornos de coproducción y listas de materiales alternativas es de tipo CLSP el cual es un asunto con complejidad NP-HARD (Florian, Lenstra & Kan 1980). Debido a lo complejo, no tiene solución en tiempo polinómico. En este trabajo, se presenta dos casos en los que se aplica un algoritmo para obtener una cota inferior para el problema de lotificación en sistemas multinivel en entornos de coproducción y listas de materiales alternativas basado en Relajación Lagrangeana con parámetros optimizados mediante superficie de respuesta.

En la última década la relajación lagrangeana ha evolucionado de un gran concepto teórico a una herramienta exitosa para una extensa variedad de aplicaciones, (Hasan, 2013)). Sin embargo, la literatura confirma que no hay trabajos en los cuales se utiliza la Relajación Lagrangeana para el Problema de lotificación capacitado en sistemas multinivel (MLCLSP, Multilevel Capacited Lot Sizing Problem en idioma inglés) con listas de materiales alternativas y en ambientes de coproducción. Por tanto, se considera aún como un campo de investigación abierto.

Con el objetivo de obtener una solución cercana al óptimo, los ajustes de los multiplicadores de Lagrange son necesarios para manejar la técnica con gran destreza (Dekrajangpetch, et al, 1999); la elección de los valores de los multiplicadores de Lagrange es de importancia fundamental en términos de la calidad de la cota inferior generada (se prefiere muchas cotas inferiores que están cerca de la solución óptima). Posterior a la implementación, el algoritmo es validado en dos casos de estudios arrojando excelentes resultados que comprueba la eficiencia computacional del algoritmo. Finalmente, se afinan los parámetros del modelo utilizando una superficie de respuesta.

Revisión de literatura

La determinación de los tamaños de lote es un problema clásico del MRP (Materials Requirements Planning) puesto que se busca determinar, en periodos discretos de tiempo, las unidades a producir y a provisionar para inventario de manera que se pueda satisfacer la demanda (Orlicky, 1975). Harris (1913) propone un sistema de lotificación para inventarios con demanda independiente, el conocido “Economic order quantity” (EOQ). A partir de este trabajo, muchos autores comienzan a proponer diferentes modelos derivados para resolver el problema de lotificación. En la literatura, existen diferentes modelos de lotificación de un nivel, por ejemplo: CLSP, Capacitated Lot-Sizing Problem (Drexel & Kimms, 1997); PLSP, Proportional Lot-Sizing and Scheduling Problem (Drexel & Haase, 1995); GLSP, General Lot-Sizing and Scheduling Problem (Fleischmann & Meyr, 1997), y productos únicos y con múltiples productos.

En paralelo a los trabajos desarrollados para determinar el tamaño de lote en sistemas de un solo nivel, Billington, McClain, y Thomas, (1983) introducen el modelo para resolver el MLCLSP, el cual es una extensión de varios niveles del CLSP. Garcia-Sabater, Maheut, y Marin-

García, (2013) proponen el modelo GMOP (Generic Materials and Operations Planning), que es una reformulación del MLCLSP considerando listas de materiales y operaciones alternativas y coproducción.

Se puede decir entonces que las primeras aproximaciones de la Relajación Lagrangeana ocurren en (Billington, 1986) por lo cual se propone una heurística basada en programación entera con Relajación Lagrangeana. Posteriormente, Ahuja, Magnanti y Orlin (1993) mencionan su aplicación en modelos de optimización. Hasta este punto, la Relajación Lagrangeana era utilizada como herramienta para programación matemática. LeBlanc, Shtub y Anandalingam (1999) aplicaron métodos combinados de metaheurísticas junto a Relajación Lagrangeana para resolver el problema MRGAP (Multi resource generalized assignment problem) obteniendo buenos resultados para ciertas condiciones en comparación con modelos individuales de meta-heurísticas GA, algoritmo genético y SA, Recocido Simulado. Lo anterior indica que es buen complemento a otras herramientas para resolver problemas de programación.

Nuevos avances fueron presentados por Barbarosoglu & Özgür (1999) y Ertogral & Wu (2000) quienes desarrollaron procedimientos de relajación Lagrangeana para coordinar la planificación a través de los dominios individuales. El dominio de planificación indica el ámbito de planificación que corresponde a una única organización dentro de la cadena de suministro. Asimismo, se aplicaron técnicas de Relajación Lagrangeana y un procedimiento de resolución heurístico al modelo integrado propuesto por (Jayaraman & Pirkul, 2001).

Por otra parte, los modelos relativos al diseño y la planificación de la producción propuestos por Jang, Jang, Chang y Park (2002) se resuelven mediante técnicas de Relajación Lagrangeana y algoritmos genéticos. Contrario al uso que se le brindaba a la Relajación Lagrangeana de herramienta soporte de otra, Sambasivan & Yahya (2005) y luego Toledo & Armentano (2006) desarrollaron una heurística basada en Relajación Lagrangeana de la restricción de capacidad y sub-gradiente de optimización. Estos autores buscaban resolver el problema de lotificación capacitada con multiperíodo, multiítem, multiplanta con transferencia entre plantas y el problema con múltiples ítems en máquinas en paralelo no relacionadas con tiempo de alistamiento independiente de la secuencia respectivamente. Brahimi, Dauzere-Peres y Wolsey (2010) propuso una heurística basada en Relajación Lagrangeana para resolver el problema CLSP con ventanas de tiempo de producción en tiempo de preparación independiente de la secuencia. Haugen, Lanquepin-Chesnais y Olstad (2012) proponen una heurística basada en Relajación Lagrangeana para CLSP de gran tamaño con restricción en costes de producción.

Luego, Nezhad, Manzour y Salhi (2013) demuestran con su trabajo la capacidad de solución de problemas de la Relajación Lagrangeana para los sistemas de producción. Wu, Zhang, Liang y Leung (2013) evalúan modelos y métodos basados en Relajación Lagrangeana para el MLCLSP con faltantes/atrasos conocido como MLCLSPB. Carvalho y Nascimento (2016) presentan el desarrollo de la heurística lagrangeana para el problema de lotificación capacitada multi-planta (MPCLSP) con múltiples períodos e ítems.

Planteamiento del Problema

El modelo matemático que se resuelve es el planteado por García-Sabater et al (2013) denominado “Generic Materials and Operations Planning Problem” (GMOP). El modelo GMOP representa en gran medida a la familia de modelos matemáticos que se utilizan para la lotificación multinivel pero considerando listas de materiales alternativas y coproducción. En este caso particular, el enfoque se asemeja a los modelos matemáticos para la planificación de requerimientos de materiales de la industria. Matemáticamente, este modelo matemático hace parte de la familia de problemas de tipo CLSP, por tanto, se considera también como un problema de complejidad computacional de tipo NP-Hard. En la Tabla 1 se muestra la notación, las variables y parámetros que lo constituyen. El modelo se presenta de las ecuaciones (1) a la (6).

Notación, variables y parámetros del modelo

Tabla 1

Notación del modelo GMOP

Conjuntos	
i	Conjunto de productos(incluye productos, empaquetado y sitio)
t	Conjunto de periodos de planificación
r	Conjunto de recursos
k	Conjunto de Strokes
Parámetros	
$D_{i,t}$	Demanda del producto i para el periodo t
$h_{i,t}$	Coste de almacenamiento de una unidad de producto i en el periodo t
$CO_{k,t}$	Coste de stroke k en el periodo t
$CS_{k,t}$	Coste de setup del stroke k en el periodo t
$CB_{i,t}$	Coste de compra del producto i en el periodo t
$SO_{i,k}$	Número de unidades i que genera un stroke k
$SI_{i,k}$	Número de unidades i que stroke k consume
LT_k	Lead Time de stroke k
$KAP_{r,t}$	Disponibilidad de capacidad de recurso r en el periodo t (en unidades de tiempo)
M	Un número suficientemente grande
$TO_{k,r}$	Capacidad del recurso r requerido para elaborar una unidad de stroke k (en unidades de tiempo)
$TS_{k,r}$	Capacidad requerida de recurso r para setup of stroke k (en unidades de tiempo)
Variables	
$Z_{k,t}$	Cantidad de strokes k que se ejecutan en el periodo t
$\delta_{k,t}$	= 1 si stroke k se realiza en el periodo t (0 en caso contrario)
$W_{i,t}$	Cantidad de compra por producto i en el periodo t
$X_{i,t}$	Nivel de inventario disponible de producto i al final del periodo t

Función Objetivo

El objetivo (1) busca la minimización de los costes de setup de los strokes, de los costes unitarios de stroke y de los costes de almacenamiento.

$$Z: \min \sum_t \sum_i (h_{i,t} \cdot x_{i,t}) + \sum_t \sum_k (CS_{k,t} \cdot \delta_{k,t} + CO_{k,t} \cdot z_{k,t}) + \sum_t \sum_i (CB_{i,t} \cdot w_{i,t}) \quad (1)$$

Restricciones del modelo

La ecuación (2) representa la continuidad de los niveles de inventario de los productos i . El nivel de inventario al final de un periodo considera el nivel de inventario al final del periodo anterior, las recepciones planificadas (debido a strokes en proceso), la demanda del producto y el consumo y la producción de SKUs debido a la ejecución de strokes.

$$x_{i,t} = x_{i,t-1} - D_{i,t} + w_{i,t} - \sum (SI_{i,k} \cdot z_{i,k}) + \sum (SO_{i,k} \cdot z_{i,k-LT_k}), \forall i \wedge t, \quad (2)$$

Con la restricción (3), si se produce un stroke en el periodo t , se asigna un valor no nulo a la variable que representa la existencia de setup.

$$z_{i,t} - M \cdot \delta_{k,t} \leq 0, \forall k \wedge t, \quad (3)$$

La restricción (4) representa la limitación de la capacidad productiva en cada periodo para cada recurso.

$$\sum_k (TS_{k,r} \cdot \delta_{k,t}) + \sum (TO_{k,r} \cdot z_{k,r}) \leq KAP_{r,t} \forall r \wedge t. \quad (4)$$

Las ecuaciones (5) y (6) definen el dominio de definición de las variables

$$x_{i,t} \geq 0; w_{i,t} \geq 0 \quad \forall i \wedge t \quad (5)$$

$$z_{k,t} \in \mathbb{Z}^+; \delta_{k,t} \in \{0,1\} \quad \forall k \wedge t \quad (6)$$

Como se puede apreciar en el modelo GMOP, planificar usando el concepto stroke resulta muy diferente a la planificación tradicional que se basa en la matriz Gozinto y la lista de recursos ya que lo que se planifica es el stroke (la operación, la tarea o la actividad). En otros términos, el stroke es la variable de decisión mientras que los materiales se generan y/o consumen en función de la ejecución de los strokes, por tanto, no se planifica la producción del material sino las operaciones que se llevan a cabo para obtenerlos.

Método

La metodología que se utilizó para la resolución del problema fue la relación lagrangeana aplicando el método del subgradiente, luego se realizan experimentos y, por último, utilizando superficie de respuesta se optimizarán los parámetros de la misma.

Relajación lagrangeana

La Relajación Lagrangeana es un método de relajación que aproxima un problema de optimización restringido a uno más simple de resolver. La solución obtenida es una buena cota a la respuesta del modelo original en menor tiempo. Se utilizará como base la Relajación Lagrangeana planteada en (Rius-Sorolla, Maheut, Coronado-Hernandez, & Garcia-Sabater, 2018).

Para la aplicación de la Relajación Lagrangeana, el primer paso es relajar la restricción y asociarla al multiplicador de lagrange correspondiente al precio sombra de la restricción. El precio sombra corresponde a los valores de las variables en el óptimo del problema dual de un problema de programación lineal. Es decir, es el valor por unidad extra del recurso, ya que el costo del recurso no está incluido en el cálculo de los coeficientes de la función objetivo.

Ahora bien, con base en los modelos de Relajación Lagrangeana de los problemas clásicos CLSP y MLCP, la mayoría de los autores consideran la restricción de capacidad como la restricción más complicada (Thizy & Van Wassenhove, 1983). Como la formulación matemática del caso de estudio es similar al CLSP la restricción de capacidad también representa mayor complejidad para el problema. Por lo tanto, esta restricción sale del conjunto de restricciones y se incluye en la función objetivo del modelo relajado asociado con el conjunto de multiplicadores que penalizan su violación. Se toma la ecuación 4 del modelo GMOP, que representa la restricción de capacidad y se relaja obteniendo la siguiente ecuación (7) la cual hará parte de la función objetivo:

$$x_{i,t} = \left(\sum_k (TS_{k,r} \cdot \delta_{k,t}) + \sum_k (TO_{k,r} \cdot z_{k,r}) - KAP \right) = 0 \quad (7)$$

Ya determinada la restricción relajada se procede entonces a formular el modelo matemático adaptado a la Relajación Lagrangeana

La ecuación 7 se le agrega la ecuación 1 quedando,

$$\begin{aligned} Z : \min & \sum_t \sum_i (h_{i,t} \cdot x_{i,t}) \\ & + \sum_t \sum_k (CS_{k,t} \cdot \delta_{k,t} + CO_{k,t} \cdot z_{k,t}) \\ & + \sum_t \sum_i (CB_{i,t} \cdot w_{i,t}) + \lambda_{r,t} \left[\sum_k (TS_{k,r} \cdot \delta_{k,t}) + \left[\sum_k (TS_{k,r} \cdot z_{k,r}) - KAP \right] \right] \end{aligned} \quad (8)$$

La ecuación (8) representa la función objetivo relajada. Las demás ecuaciones (2, 3, 5 y 6) se mantienen como restricciones al igual que en el modelo original.

El problema ahora radica en cómo encontrar de manera adecuada los valores de los multiplicadores de Lagrange, λ, t , que minimicen el coste de la función objetivo y que arroje una buena cota del problema. En la literatura, los trabajos consultados en esta área utilizan el método del sub-gradiente de optimización expuesto a continuación.

Método Del Sub Gradiente De Optimización

Se utiliza el método del sub-gradiente planteado por Held et al (1974) para hallar λ , que de acuerdo a Fisher (1981) presenta mejor desempeño.

Un algoritmo sub-gradiente se propuso por primera vez para mejorar el límite inferior. Esta solución técnica tiene como objetivo disminuir la brecha dual iterativamente mediante la actualización de los multiplicadores de Lagrange (λ) a lo largo de la dirección sub-gradiente de la función objetivo en el modelo, Figura 1.

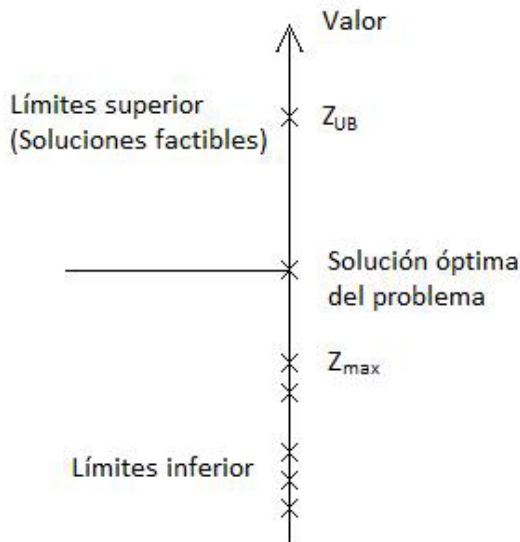


Figura 1 Desempeño de la iteración del gradiente, (Beasley, 1993)

Dentro del algoritmo se encuentra un parámetro fundamental para el desempeño del mismo, que se conoce como parámetro theta (θ), y es un escalar en el intervalo $[0, 2]$, que se utiliza para ajustar el tamaño de paso del proceso y garantiza que no aparezca costo negativo en la función objetivo (Yang & Zhou, 2014). Desafortunadamente, no existe literatura que indique el valor exacto para theta (Maneechai, 2016). Como lo que se busca es regular la tasa de convergencia a través de theta, Held et al. (Held et al., 1974) sugieren actualizar el parámetro

theta dividiéndolo por un factor eta. Estos dos parámetros entonces se convierten en parámetros ajustables del modelo, los cuales se deben determinar a través del diseño de experimento. En la literatura, en particular para la aplicación de la Relajación Lagrangeana en CLSP, se ha encontrado trabajos en los cuales tales valores están entre 0.75 y 1.75 para theta y 1.5 a 3 para eta (Carvalho & Nascimento, 2016). Debido a que la formulación matemática de un CLSP es la base de un MLCLSP, también se consideran estos valores de los parámetros para el caso de estudio.

Los valores iniciales de los multiplicadores de Lagrange son muy críticos a la solución del modelo relajado ya que pueden prevenir si se alcanza la solución óptima o se requiere un tiempo de cálculo más largo para alcanzar una. También, diferentes valores iniciales pueden dar lugar a diferentes soluciones del modelo con Relajación Lagrangeana (Dekrajangpetch, Sheble, & Conejo, 1999); en otras palabras, se nota aquí que es de interés la búsqueda de los valores de los multiplicadores que dan la máxima cota inferior, es decir, el límite inferior que es lo más cercano posible al valor de la solución óptima entero.

La implementación del método se desarrolla en los siguientes pasos:

1. Estimación inicial de los multiplicadores de lagrange: se resuelve el modelo relajando las variables enteras a continuas (RMIP: problemas enteros donde se ha relajado (eliminado) la condición de integridad que existan sobre las variables, al hacer esto toma menos tiempo de cálculo y menos requisitos de memoria), e igualar el vector de multiplicadores a los valores duales de la restricción, $\lambda = solve(RMIP:CostoDelPlan,CAPr,t);;$

$$CostoDelPlan = \sum_{i,t} ((CH_i X y_{i,t}) + (CA_i X w_{i,t})) + \sum_{k,t} ((Co_k X z_{i,t}) + (CSU_k X delta_{k,t})) \quad (13)$$

$$\lambda_{r,t} = \sum_{i,t} (RE_{k,r} x z_{k,t}) + (TS_{k,r} x delta_{k,t}) < CAP_{r,t} \quad (14)$$

2.Determinación del límite superior del modelo relajado: Cota → FO (valor de la Función Objetivo) = FO + λ*(Recursos,t - CAPr,t);

3.Resolver el modelo relajado de manera entera, y actualizar FO con la función objetivo resultante: FO = Solve(MIP:Cota);

$$Cota = \left(\sum_{i,t} ((CH_i X y_{i,t}) + (CA_i X w_{i,t})) + \sum_{k,t} ((Co_k X z_{i,t}) + (CSU_k X delta_{k,t})) + \sum_{r,t} \lambda_{r,t} X \left(\sum_{i,t} (RE_{k,r} x z_{k,t}) + (TS_{k,r} x delta_{k,t}) < CAP_{r,t} \right) \right) \quad (15)$$

4. Si la cota obtenida es mayor al mejor límite, entonces actualizar mejor límite: Si $FO > BestBound$, entonces $BestBound = FO$;

if (cota.l > bestbound,
bestbound = cota.l;

5. Sino es $FO > BB$ actualizar theta y calcular cambio paso: $\theta = \theta/\eta$; $StepSize = (\theta * (UpperBound - FO)) / NORM$; $NORM = (Recursos - CAP)^2$; UB solución trivial obtenida en el paso 1. else

$$0 = 0/\eta;$$

$$upperbound = \sum ((CH_i \times inity_{i,t}) + (CA_i \times initw_{i,t})) + \sum_{k,t} ((CO_k \times initz_{k,t}) + (CSU_k \times inidelta_{k,t})) \quad (16)$$

$$stepsiz = \theta \times \left(\sum ((CH_i \times inity_{i,t}) + (CA_i \times initw_{i,t})) + \sum_{k,t} ((CO_k \times initz_{k,t}) + (CSU_k \times inidelta_{k,t})) - \sum_{k,t} ((CH_i \times y.l_{i,t}) + (CA_i \times w.l_{i,t})) + \sum_{k,t} ((CO_k \times z.l_{k,t}) + (CSU_k \times delta.l_{k,t})) + \sum_{r,t} \lambda_{r,t} \times \left(\sum_k (RE_k \times z.l_{k,t}) + (TS_{k,r} \times delta.l_{k,t}) - CAP_{r,t} \right) \right) / \left(\sum_{r,t} \left(\sum_k (RE_{k,r} \times z.l_{k,t}) + (TS_{k,r} \times delta.l_{k,t}) - CAP_{r,t} \right)^z \right) \quad (17)$$

6. Actualizar multiplicadores de lagrange: $\lambda = \max(0, \lambda + StepSize * Recursos_{r,t} - CAP_{r,t})$; Converge si $(\lambda_{anterior} - \lambda_{actual})$ es igual a 0,0001.

$$\lambda_{r,t} = \max \left(0, \lambda_{r,t} + \left(\theta \times \left(\sum_{i,t} ((CH_i \times inity_{i,t}) + (CA_i \times initw_{i,t})) + \sum_{k,t} ((CO_k \times initz_{k,t}) + (CSU_k \times inidelta_{k,t})) - \left(\sum_{k,t} ((CH_k \times y.l_{i,t}) + (CA_i \times w.l_{i,t})) + \sum_{k,t} ((CO_k \times z.l_{k,t}) + (CSU_k \times delta.l_{k,t})) \right) + \sum_{r,t} \lambda_{r,t} \times \left(\sum_k (RE_k \times z.l_{k,t}) + (TS_{k,r} \times delta.l_{k,t}) - CAP_{r,t} \right) \right) / \left(\sum_{r,t} \left(\sum_k (RE_{k,r} \times z.l_{k,t}) + (TS_{k,r} \times delta.l_{k,t}) - CAP_{r,t} \right)^z \right) \right) \right) \times \left(\sum_k (RE_{k,r} \times z.l_{k,t}) + (TS_{k,r} \times delta.l_{k,t}) - CAP_{r,t} \right) \right) \quad (18)$$

7. Calcular nuevo valor objetivo.

$$vobj = \sum_{k,t} ((CH_k \times y.l_{i,t}) + (CA_i \times w.l_{i,t})) + \sum_{k,t} ((CO_k \times z.l_{k,t}) + (CSU_k \times delta.l_{k,t})) \quad (19)$$

8. Si no hay convergencia ($\lambda_{anterior} - \lambda_{actual} > 0,0001$) entonces volver a 4. De lo contrario FIN, Costo del plan = vobj.

Experimentos Computacionales

Por medio de experimentos computacionales, se realizará validación del algoritmo propuesto basado en Relajación Lagrangeana aplicado a dos casos problema. Los experimentos son realizados sobre un PC Intel® Core™ i5-4200U CPU @ 1,60GHz y 6 GB RAM, resueltos en CPLEX 12.6.0. La implementación consiste en dos pasos: (1) implementación del procedimiento de solución del modelo GMOP e (2) implementación del algoritmo de Relajación Lagrangeana. La experimentación es dividida en cuatro pasos: (1) diseño experimental, (2) ejecución de experimentos, (3) optimización de parámetros y (4) análisis de resultados. Con la finalidad de medir los resultados del algoritmo creado, cada caso de prueba ha sido resuelto mediante el método exacto. Para la solución del método exacto se ajusta un tiempo límite de ejecución de 12.000 segundos.

Diseño Experimental

Los factores que se consideraron para el diseño experimental y cada uno de sus niveles se muestran en la Tabla 2. Estos factores se consideraron influye sobre el desempeño del algoritmo de Relajación Lagrangeana

- Theta: Parámetro del algoritmo de subgradiente de optimización. Se utiliza para ajustar el tamaño de paso del proceso y garantiza que no aparezca costo negativo en la función objetivo. La selección de los niveles se basa en sección 4.1.

- Eta: Parámetro de ajuste de Theta tras cada iteración. La selección de los niveles se basa en sección 4.1.

- Tiempo de ejecución: Este factor hace referencia al tiempo límite que toma cada iteración para resolver el algoritmo. Al igual que los parámetros de algoritmo del subgradiente, theta y eta y como ya se expresó, influye directamente en el tiempo total de respuesta y en el valor de la cota debido a que al ajustar este tiempo de ejecución se puede obtener una respuesta con mayor o menor GAP. Se busca que el máximo tiempo probable de ejecución del algoritmo sea menor al ajustado para el modelo original.

Tabla 2
Factores del diseño de experimento

Factores	Número de niveles	Detalles por nivel Caso 1	Detalles por nivel Caso 2
Theta	3	0,75	0,75
		1,25	1,25
		1,75	1,75
Eta	3	1,5	1,5
		2,25	2,25
		3	3
Tiempo de ejecución (segundos)	3	2	20
		2,5	60
		3	100

Variables de respuesta

A continuación, se enumeran las variables de respuesta como resultado de las experiencias computacionales. Estas variables de respuesta han sido seleccionadas porque representan los objetivos de este trabajo: mejor respuesta y mejor tiempo.

- Valor Objetivo (%Error): Representa la respuesta del algoritmo, es decir una cota inferior al problema de lotificación multinivel con listas de materiales alternativas y coproducción muy cercana al óptimo.

- Tiempo computacional: Es el tiempo requerido por el algoritmo para obtener la respuesta deseada, cota inferior. Esta variable hace al algoritmo llamativo por el hecho de obtener una respuesta en mucho menor tiempo que el que tomaría resolviendo el problema de lotificación multinivel con listas de materiales alternativas y coproducción por Branch & Bound.

Resultados Computacionales

El algoritmo de Relajación Lagrangeana ha sido implementado en dos casos problemas: El primer caso, corresponde a la aplicación registrada como anexo en la publicación de García- Sabater et al (2013). Por último, se realizará un experimento con problemas muy grandes (más de 280.000 variables) utilizando demanda simulada considerando estacionalidad y tendencia.

Descripción de caso 1

El problema consiste en planear la producción de dos plantas de producción en la cual se producen tres productos para dos tipos de clientes. La empresa tiene 41 SKU (entre productos finales, componentes y materias primas) y 44 Strokes (entre producción, empaque, transporte, etc.). La planeación se lleva a cabo para un horizonte de 44 unidades de tiempo. Al aplicar algoritmo se obtuvieron los resultados de la Tabla 3

Tabla 3
Resultados caso 1

Solver CPLEX 12.6	#Iterations	Theta initial	Eta initial	Reslim (s)	Objective Value BI	Computation Time (s)	Converged iterations	GAP (%)
Generic OM	-	-	-	Default	14.026,00	4,29	-	0
	100	1,25	2,25	2,5	14.026,00	4,90	1	0,00
	100	0,75	1,5	2,5	14.026,00	4,91	1	0,00
	100	0,75	1,5	3	14.026,00	4,75	1	0,00
	100	1,25	1,5	2	14.026,00	4,95	1	0,00
	100	1,75	3	2	14.026,00	4,79	1	0,00
	100	1,75	2,25	3	14.026,00	4,51	1	0,00
	100	1,75	1,5	2	14.026,00	4,93	1	0,00
	100	1,75	3	3	14.026,00	4,31	1	0,00
	100	1,75	2,25	2	14.026,00	4,68	1	0,00
	100	0,75	3	2	14.026,00	4,80	1	0,00
	100	1,75	2,25	2,5	14.026,00	4,69	1	0,00
	100	1,25	2,25	3	14.026,00	4,77	1	0,00
	100	1,25	2,25	2	14.026,00	4,54	1	0,00
Generic LR	100	0,75	3	3	14.026,00	4,84	1	0,00
	100	0,75	1,5	2	14.026,00	4,93	1	0,00
	100	1,25	3	2	14.026,00	4,71	1	0,00
	100	1,25	1,5	2,5	14.026,00	4,76	1	0,00
	100	1,25	3	2,5	14.026,00	4,72	1	0,00
	100	0,75	3	2,5	14.026,00	4,92	1	0,00
	100	1,25	1,5	3	14.026,00	4,93	1	0,00
	100	1,75	3	2,5	14.026,00	4,48	1	0,00
	100	1,75	1,5	2,5	14.026,00	4,56	1	0,00
	100	0,75	2,25	2	14.026,00	4,97	1	0,00
	100	1,75	1,5	3	14.026,00	4,63	1	0,00
	100	0,75	2,25	2,5	14.026,00	4,86	1	0,00
	100	0,75	2,25	3	14.026,00	4,78	1	0,00
	100	1,25	3	3	14.026,00	4,72	1	0,00

En la tabla 3, se puede observar que, al desarrollar los experimentos para el primer caso de estudio, no se nota necesidad de optimizar los parámetros debido a que su tiempo de resolución es corto y no presentaría alguna ventaja computacional la Relajación Lagrangeana, sin embargo, comprueban el óptimo funcionamiento del algoritmo adaptado al problema.

Descripción del caso 2

Para el caso 2 se desarrollan experimentos con diferentes listas de materiales y demanda simuladas en presencia de tendencia y estacionalidad, validadas por Coronado (2015). Se cuenta con información referente a los costos de almacenamiento, setup, stroke (producción, compra, transporte), factor gozinto, inventario inicial, recursos, horizonte de tiempo, tiempos de alistamiento y operación, capacidades de los recursos, número de productos y demanda. Se ejecuta el experimento con las instancias anunciadas a continuación, donde P1-5 hace referencia a distintas listas de materiales:

- Caso 2A: P1-P2-P3-P4-P5-01-10-ST-00
- Caso 2B: P1-P2-P3-P4-P5-01-10-ST-10
- Caso 2C: P1-P2-P3-P4-P5-01-10-ST-20

Tabla 4
Resultados del caso 2

Caso 2A : P1-P2-P3-P4-P5-01-10-ST-00										
Solver CPLEX 12.6	#Iterations	Theta initial	Eta initial	Reslim (s)	Objective Value BI	Computation Time (s)	Converged iterations	GAP (%)		
Generic OM	-	-	-	Default	21.067.986,01	12.211,44	-	0,69		
	100	0,75	2,25	100	21.136.626,64	1.168,15	11	1,01		
	100	1,25	3	100	21.071.998,90	546,39	6	0,71		
	100	0,75	2,25	60	21.108.490,13	209,58	5	0,88		
	100	0,75	2,25	20	21.165.202,55	133,33	7	1,15		
	100	0,75	1,5	20	21.080.978,47	199,73	10	0,75		
	100	1,25	1,5	60	21.011.229,99	1.601,80	24	0,42		
	100	1,75	1,5	60	21.121.700,04	185,89	4	0,94		
	100	1,75	2,25	60	21.078.768,50	388,72	7	0,74		
	100	1,75	2,25	20	21.106.132,79	130,03	7	0,87		
	100	1,75	1,5	20	21.114.183,72	238,99	12	0,91		
	100	1,25	2,25	60	21.092.707,61	223,08	4	0,81		
	100	1,75	2,25	100	21.136.855,71	960,27	10	1,01		
	100	1,25	1,5	100	21.103.645,06	1.167,70	12	0,86		
	Generic LR	100	1,75	3	20	21.014.655,39	124,90	5	0,44	
		100	1,25	1,5	20	21.097.586,29	247,11	13	0,83	
		100	0,75	1,5	60	21.171.505,84	1.018,93	17	1,18	
		100	1,75	3	100	21.261.736,98	1.171,09	12	1,59	
		100	1,25	3	20	21.185.198,08	107,93	5	1,24	
		100	1,75	1,5	100	21.108.109,97	1.983,16	20	0,88	
100		0,75	1,5	100	21.128.271,83	963,20	10	0,97		
100		0,75	3	20	21.118.699,57	162,23	8	0,93		
100		1,25	2,25	20	21.200.840,41	112,63	6	1,31		
100		1,25	2,25	100	21.142.846,71	691,36	7	1,04		
100		1,75	3	60	21.311.776,26	440,09	7	1,83		
100		0,75	3	60	21.156.098,98	271,22	5	1,10		
100		1,25	3	60	21.110.491,57	167,36	4	0,89		
100		0,75	3	100	21.087.006,63	450,91	5	0,78		

De la Tabla 4, se nota un mayor tiempo de resolución para el modelo original, se requirieron 12.211,44 segundos para obtener una respuesta con gap de 0,69% (como se dijo anteriormente, representa una cota inferior del método exacto); el modelo supera las 200.000 ecuaciones y variables. Se nota mucha influencia del parámetro eta y del tiempo de ejecución del modelo; no tanta para theta.

Optimización de los parámetros del algoritmo

Finalmente, para ajustar los parámetros del algoritmo se empleará diseño de superficie de respuestas, con la herramienta minitab®, cuyo análisis arroja un mayor rendimiento del algoritmo al definir tales parámetros. Se observa que hay mayor afectación por parte de los parámetros, tiempo de ejecución y Eta, al tiempo de solución del algoritmo y el porcentaje de error (valor objetivo) como se indica en la Figura 2.

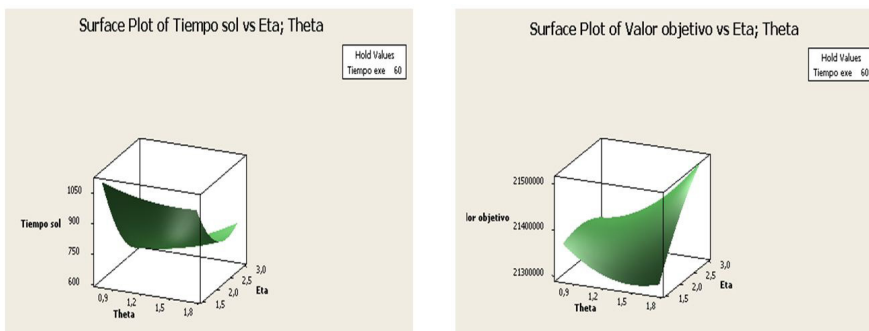


Figura 2 Superficie de respuesta

Al optimizar la superficie, se obtienen los valores para los parámetros del algoritmo:

Tabla 5
Parámetros optimizados del modelo

Response Optimization						
Parameters	Goal	Lower	Tarjet	Upper	weight	Import
Valor obj	Mazimum	21000000	21000000	21689648	1	1
Material	Minimum	300	300	1817	1	1
Global Solution						
Theta	=	1,75				
Eta	=	3,00				
Tiempo exe	=	20,00				
Predicted Responses						
Valor obj	=	18701920;	desirability = 0,07972			
Tiempo sol	=	362;	desirability = 0,07972			
Composite Desirability	=	0,25989				

Posteriormente, se aplican los valores de los parámetros obtenidos en la optimización a los casos problemas. Se verifica las respuestas del algoritmo como mejores respuestas. Estos datos se registran en la Tabla 6

Tabla 6
Resumen de experiencia computacional

Problema	Número de variables	Número de restricciones	Función objetivo		Tiempo Computacional en segundos		GAP RL (%)
			CPLEX	LR → Cota	CPLEX	LR	
Caso 1	59.221	58.430	14.026,00	14.026,00	4,30	4,31	0,00
Caso 2A	280.801	270.401	21.067.986,01	21.015.365,28	12.211,44	125,37	0,44
Caso 2B	280.801	270.401	21.096.891,94	21.093.106,32	11.890,85	441,23	0,73
Caso 2C	280.801	270.401	21.088.467,50	21.023.581,45	12.229,18	530,59	0,12

Discusión

Al desarrollar los experimentos para el primer caso de estudio, no se nota necesidad de optimizar los parámetros debido a que su tiempo de resolución es corto y no presentaría alguna ventaja computacional la Relajación Lagrangeana, sin embargo, comprueban el óptimo funcionamiento del algoritmo adaptado al problema, puesto que al comparar los datos adicionales de respuesta, se identifica ser las mismas del caso original, es decir, Valor Objetivo, cantidades a producir, qué strokes se habilitan y cuáles no.

En el caso 2, se nota un mayor tiempo de resolución para el modelo original, se requieren 12.211,44 segundos para obtener una respuesta con gap de 0,69% (como se dijo anteriormente, representa una cota inferior del método exacto); el modelo supera las 200.000 ecuaciones y variables. Se ejecutan las corridas que plantea el diseño de superficie de respuestas. Se nota mucha influencia del parámetro η y del tiempo de ejecución del modelo; no tanta para θ . De ahí que el modelo presenta mejor GAP y tiempo de resolución cuando se hacen modificaciones a tales parámetros.

En definitiva, se determina que los parámetros θ y η para modelos de problemas de lotificación multinivel con listas de materiales alternativas y coproducción con Relajación Lagrangeana como el expuesto al caso 2 son 1.75 y 3 respectivamente con un ajuste de tiempo para los caso tratados de 20 segundos. Al correr el caso 2A con los parámetros obtenidos se genera una mejor cota inferior en 125,37 segundos.

Adicionalmente se comprueba con otros casos similares al del caso 2, como es el caso 2B y 2C (número de variables, 280.801 y número de restricciones, 270.401) la eficiencia de la Relajación Lagrangeana generando cotas mejores a la cota del método exacto obtenida.

Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos, se puede concluir que la aplicación de Relajación Lagrangeana y el método del subgradiente de optimización, presenta buenos resultados para el Problema de Lotificación Multinivel con Listas de Materiales Alternativas y Coproducción. En esa dinámica, se obtienen mejoras en tiempos de computo, al pasar de horas a minutos, con una reducción promedio del 99% en tiempo de respuesta (pasa de tener una respuesta muy cercana al óptimo en 125 segundos y no en 12.000 segundos) para la toma de decisiones.

Así mismo, se establecen cotas inferiores para el problema de estudio. Adicionalmente también aporta una aproximación de los parámetros de diseño del algoritmo, que para estos casos la literatura no es determinante y sugiere unos rangos. En este trabajo se definen dichos parámetros para el Problema de Lotificación Multinivel con Listas de Materiales Alternativas y Coproducción. La comprobación de la cota inferior y los parámetros de algoritmo de relajación Lagrangeana obtenidos vale la pena ser explorada en futuras investigaciones.

Referencias

- Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., & Orlin, J. B. (1993). *Network flows: theory, algorithms, and applications*. Prentice Hall.
- Barbarosoğlu, G., & Özgür, D. (1999). *Hierarchical design of an integrated production and 2-echelon distribution system*. *European Journal of Operational Research*, 118(3), 464–484. [https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217\(98\)00317-8](https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(98)00317-8)
- Beasley, J. E. (1993). Lagrangian relaxation. In *Modern heuristic techniques for combinatorial problems* (pp. 243–303). John Wiley & Sons, Inc.
- Billington, P. (1986). Heuristics for multilevel lot-sizing with a bottleneck. *Management Science*.
- Billington, P. J., McClain, J. O., & Thomas, L. J. (1983). MATHEMATICAL programming Approaches to capacity-constrained mrp systems: review, formulation and problem reduction. *Management Science*, 29(10), 1126–1141.
- Brahimi, N., Dauzere-Peres, S., & Wolsey, L. A. (2010). Polyhedral and Lagrangian approaches for lot sizing with production time windows and setup times. *Computers & Operations Research*, 37(1), 182–188. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2009.04.005>
- Carvalho, D. M., & Nascimento, M. C. V. (2016). Lagrangian heuristics for the capacitated multi-plant lot sizing problem with multiple periods and items. *Computers and Operation Research*, 71, 137–148. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2016.01.019>

- Dekrajangpetch, S., Sheble, G. B., & Conejo, A. (1999). Auction implementation problems using Lagrangian relaxation. *IEEE Transactions on Power Systems*. <https://doi.org/10.1109/59.744488>
- Ertogral, K., & David Wu, S. (2000). Auction-theoretic coordination of production planning in the supply chain. *IIE Transactions*, 32, 931–940. <https://doi.org/10.1080/07408170008967451>
- Fisher, M. (1981). The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems. *Management Science*, 50(12_supplement), 1861–1871. <https://doi.org/10.1287/mnsc.1040.0263>
- Florian, M., Lenstra, J., & Kan, A. (1980). Deterministic Production Planning: Algorithms and Complexity. *Management Science*, 26(7), 669–679. <https://doi.org/10.1287/mnsc.26.7.669>
- Garcia-Sabater, J. P., Maheut, J., & Marin-Garcia, J. a. (2013). A new formulation technique to model materials and operations planning: The generic materials and operations planning (GMOP) problem. *European Journal of Industrial Engineering*, 7(2), 119–147. <https://doi.org/10.1504/EJIE.2013.052572>
- Haugen, K. K., Lanquepin-Chesnais, G., & Olstad, A. (2012). A fast Lagrangian heuristic for large-scale capacitated lot-size problems with restricted cost structures. *Kybernetika*, 48(2), 329–345.
- Held, M., Wolfe, P., & Crowder, H. P. (1974). Validation of subgradient optimization. *Mathematical Programming*, 6(1), 62–88.
- Jang, Y. J., Jang, S. Y., Chang, B. M., & Park, J. (2002). A combined model of network design and production/distribution planning for a supply network. *Computers & Industrial Engineering*, 43, 263–281. [https://doi.org/10.1016/S0360-8352\(02\)00074-8](https://doi.org/10.1016/S0360-8352(02)00074-8)
- Jayaraman, V., & Pirkul, H. (2001). Planning and coordination of production and distribution facilities for multiple commodities. *European Journal of Operational Research*, 133(2), 394–408. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(00\)00033-3](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(00)00033-3)
- LeBlanc, L. J., Shtub, A., & Anandalingam, G. (1999). Formulating and solving production planning problems. *European Journal of Operational Research*, 112(1), 54–80. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(97\)00394-9](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(97)00394-9)
- Maneechai, S. (2016). Variant of Constants in Subgradient Optimization Method over Planar 3-Index Assignment Problems, (1). <https://doi.org/10.3390/mca21010004>

- Nezhad, A. M., Manzour, H., & Salhi, S. (2013). Lagrangian relaxation heuristics for the uncapacitated single-source multi-product facility location problem. *International Journal of Production Economics*, 145(2), 713–723. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2013.06.001>
- Rius-Sorolla, G., Maheut, J., Coronado-Hernandez, J. R., & Garcia-Sabater, J. P. (2018). Lagrangian relaxation of the generic materials and operations planning model. *Central European Journal of Operations Research*, 1–19. <https://doi.org/10.1007/s10100-018-0593-0>
- Thizy, J. M., & Van Wassenhove, L. N. (1983). A subgradient algorithm for the multi-item capacitated lot-sizing problem. *IIE Transactions*. V18, 114–123.
- Toledo, F. M. B., & Armentano, V. A. (2006). A Lagrangian-based heuristic for the capacitated lot-sizing problem in parallel machines. *European Journal of Operational Research*, 175(2), 1070–1083. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.06.029>
- Wu, T., Zhang, C., Liang, Z., & Leung, S. C. H. (2013). A Lagrangian relaxation-based method and models evaluation for multi-level lot sizing problems with backorders. *Computers & Operations Research*, 40(7), 1852–1863.
- Yang, L., & Zhou, X. (2014). Constraint reformulation and a Lagrangian relaxation-based solution algorithm for a least expected time path problem. *Transportation Research Part B: Methodological*, 59, 22–44.