

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE ADICIÓN DE MASA AL IMPACTO EN 2D CON ENTRADA ASIMÉTRICA Y VELOCIDAD HORIZONTAL

Roberto Algarín^a

Ralgarin@cotecmar.com

Antonio Bula A^b

abula@uninorte.edu.co

Óscar Tascón O^c

otascon@cotecmar.com

Fecha de recepción: agosto de 2014. Fecha de aceptación: octubre de 2014

Resumen: La teoría de adición de masa es aplicada a la predicción de las fuerzas vertical y horizontal y momento restaurador que actúan durante la entrada de secciones tipo cuña con pequeña asimetría antes de la separación del flujo del codillo. Los resultados obtenidos de fuerza horizontal, vertical y momento de rolido se comparan con valores derivados por simulación con CFD y los resultados obtenidos por Xu G. (2008). El cálculo del coeficiente de adición de masa se realizó utilizando el modelo de Toyama (1993).

Palabra claves: Impacto en 2D, teoría de adición de masa, entrada asimétrica.

Abstract: Adding mass theory is applied for the prediction of the vertical and horizontal forces and restoring moment acting during wedge type input sections with small asymmetry before flow separation knuckle. The results for horizontal, vertical and roll moment are compared with values derived by CFD simulations and the results obtained by Xu G. (2008). The coefficient calculation of different weights was performed using the model of Toyama (1993).

Keywords: Impact 2D, theory of weights, ended input.

1. INTRODUCCIÓN

La masa adherida es la inercia que gana un cuerpo cuando este ese mueve a través de un fluido, en otras palabras, es la masa que se mueve junto al cuerpo. Por medio del principio de cantidad de movimiento de Newton se tiene:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m\vec{V}) \quad (1)$$

$$\vec{F} = \vec{V} \frac{dm}{dt} + m \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (2)$$

^aM.Sc., Corporación de Ciencia y Tecnología para el Desarrollo de la Industria Naval, Marítima y Fluvial - COTECMAR

^bPh.D, Profesor, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad del Norte, TN.RVA. UROP ENSB

^cPh.D (c), Corporación de Ciencia y Tecnología para el Desarrollo de la Industria Naval, Marítima y Fluvial - COTECMAR



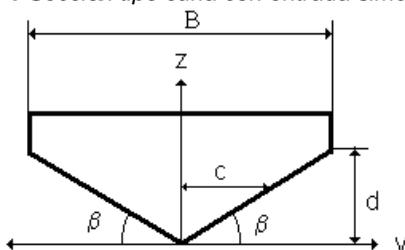
Donde \vec{V} es la velocidad y m es la masa adherida. Si el cuerpo se mueve con velocidad constante

$$\vec{F} = \vec{V} \frac{dm}{dt} \quad (3)$$

Wagner (1932), por medio de la aplicación de la teoría de adición de masa determinó la fuerza en el impacto en una sección tipo cuña. También evaluó la distribución de presión asumiendo flujo potencial y aplicando conservación de energía, llegando a la siguiente expresión:

$$\frac{P(\zeta)}{\rho} = \frac{\pi}{2 \operatorname{tg} \beta} \frac{w^2}{\sqrt{1-\zeta^2}} - \frac{w^2}{2} \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2} \quad (4)$$

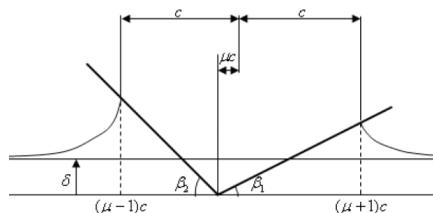
Figura 1 Sección tipo cuña con entrada simétrica



Donde β es el ángulo de astilla, $\zeta=y/c$, c es la distancia de media manga, w es la velocidad vertical de impacto, d es la distancia vertical entre la quilla y el codillo.

Toyama (1993) desarrolló la distribución de presión para la entrada asimétrica siguiendo un procedimiento similar al de Wagner (1932). Los resultados obtenidos para la distribución de presión son:

Figura 2. Sección tipo cuña con entrada asimétrica



$$\frac{P(\zeta)}{\rho} = \frac{w c (1 + \mu \zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} - \frac{w^2}{2} \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2} + w c \sqrt{1-\zeta^2} \quad (5)$$

Dónde:

$\zeta = (y - \mu c) / c$, donde μ es un parámetro de asimetría



$$\mu = \begin{cases} f(T)(T-1)/(T+1), T \geq 1 \\ f(1/T)(T-1)/(T+1), T < 1 \end{cases} \quad (6)$$

Donde $T = \text{tg}\beta_2 / \text{tg}\beta_1$

$$f(T) = \begin{cases} 0.77975 + 0.03371T + 0.001876T^2, 1 \leq T < 3 \\ 0.76773 + 0.015024T + 0.000539T^2, 3 \leq T < 10 \\ 0.80497 + 0.007208T + 0.000130T^2, 10 \leq T < 20 \end{cases} \quad (7)$$

$$\dot{c} = \frac{\pi T w}{(T+1)^2 (1-\mu^2) \sqrt{1-\mu^2}} \left(\frac{1}{\text{tg}\beta_1} - \frac{1}{\text{tg}\beta_2} \right) \quad (8)$$

Tveitnes (2001) estudió el impacto aplicando la teoría de adición de masa. Calculó la fuerza de sustentación, determinó que la fuerza hidrodinámica que experimenta una sección tipo cuña con entrada simétrica y velocidad de entrada constante se debe a la variación del momento de masa y a la variación del momento de flujo. La fuerza durante el impacto aumenta de manera lineal a medida que la sección se sumerge, hasta que comienza la separación del flujo del codillo. Esta separación se presenta cuando $\pi z = d$. A partir de este momento decrece la variación de la adición de masa respecto al tiempo. Empíricamente se determinó el comportamiento en esta zona, mostrando que la fuerza después de cierto tiempo permanece constante. De este estudio se tienen las siguientes fuerzas en la entrada de la sección: f_m y f_{fm} (9)

Donde f_m y f_{fm} son las fuerzas hidrodinámicas debido al momento de masa y el momento del flujo respectivamente.

$$f_{fm} = \begin{cases} C_{fm} \rho w^2 \frac{z}{\tan \beta}, z < d \\ C_{fm} \rho w^2 \frac{d}{\tan \beta}, z > d \end{cases} \quad (10)$$

$$f_m = w^2 \frac{dm}{dz} \quad (11)$$

$$m = \begin{cases} C_m \frac{1}{2} \rho \pi \frac{z^2}{\tan \beta}, z < \frac{2}{\pi} d \\ m_0 \left(1 + 0.57 \frac{\frac{z_c}{d}}{\frac{0.57}{\pi} + \frac{z_c}{d}} \right), z > \frac{2}{\pi} d \end{cases} \quad (12)$$

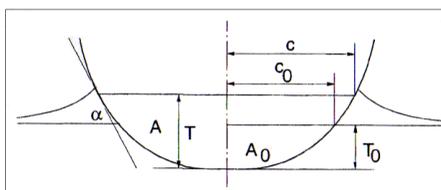
Donde $z_c = z - \frac{2}{\pi} d$ y



$$m_0 = C_m \frac{1}{2} \rho \left(\frac{d}{\pi \tan \beta} \right)^2 \quad (13)$$

C_m y C_{fm} son los coeficientes de adición de masa y coeficiente de momento de flujo respectivamente, los cuales se determinaron empíricamente en función del ángulo de astilla muerta.

Figura 3. Sección con ángulo de astilla muerta variable y entrada simétrica



Como se muestran en la Figura 3, c , T y A son la distancia de media manga, la altura y área húmeda respectivamente, mientras c_0 , T_0 y A_0 son la distancia de media manga, la altura y área sumergida bajo la línea a de agua.

Söding (2003), basado en los estudios de Wagner (1932), generalizó el impacto para entrada simétrica para secciones con ángulo astilla muerta variable y también evaluó la separación del flujo para secciones con codillos, cuantificando la fuerza vertical y la distribución de presión. La fuerza por unidad de longitud de la sección es:

$$f = k\rho \frac{\pi}{2} \left(c^2 \frac{dw}{dt} + \text{Max}(w,0) \frac{dc^2}{dt} \right) \quad (14)$$

$$T = T_0 + 0.6A/c \quad (15)$$

El valor de T se determina de forma iterativa

$$w = \frac{1}{c} \frac{dA}{dt} - \frac{d}{dt} (T - T_0) \quad (16)$$

$$k = 0.75 \left(\frac{\pi}{2} - \bar{\alpha} \right), \text{ es un factor de corrección}$$

$$\bar{\alpha} = \arctan(2A/c^2) \quad (17)$$

Después de la separación del flujo, cuando la altura T alcanza el codillo se estima que:

$$\frac{dc}{dz} = 0.64 \left(1 - \frac{\bar{\alpha}}{\pi/2} \right) \quad (18)$$

La distribución de presión se cuantifica de la siguiente manera:



$$P = k\rho \frac{dw}{dt} \sqrt{c^2 - y^2} + k\rho \max(w, 0) c \frac{dc}{dt} \frac{1}{\sqrt{c^2 - y^2}} \quad (19)$$

2. APLICACIÓN DE TEORÍA DE ADICIÓN DE MASA

Para un cuerpo que entra simétricamente se ha establecido que la masa adherida al cuerpo por unidad de longitud es proporcional al cuadrado de la media manga sumergida de la sección, por la siguiente relación:

$$m = \rho \left(c_m \frac{\pi}{2} y^2 \right) \quad (20)$$

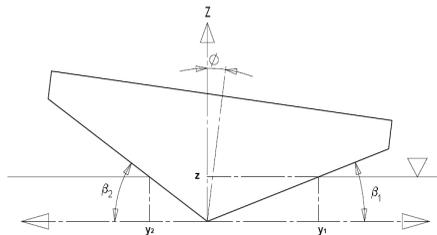
Para el caso de entrada asimétrica se propone que la masa adherida a la sección es la suma de la masa adherida en cada lado de la sección, de la siguiente manera:

$$m = m_1 + m_2$$

$$m = c_m \frac{\pi}{4} \rho (y_1^2 + y_2^2) \quad (21)$$

Donde m_1 , m_2 , y_1 e y_2 son la masa adherida y media manga sumergida de los lados 1 y 2 respectivamente. Para una geometría tipo cuña, como se muestra en la Figura 4 se tiene:

Figura 4. Parámetros de cuña con entrada asimétrica



Para una sección tipo cuña se tiene $y_1 = \frac{z}{\tan \beta_1}$ y $y_2 = \frac{z}{\tan \beta_2}$, si el cuerpo entra con una velocidad vertical constante, entonces $z = wt$, sustituyendo en la Ec. 21:

$$m = c_m \frac{\pi}{4} \rho \left[\frac{1}{\tan^2 \beta_1} + \frac{1}{\tan^2 \beta_2} \right] w^2 t^2 \quad (22)$$

Derivando respecto al tiempo:



$$\frac{dm}{dt} = c_m \frac{\pi}{2} \rho \left[\frac{1}{\tan^2 \beta_1} + \frac{1}{\tan^2 \beta_2} \right] w^2 t \quad (23)$$

Para el caso de entrada asimétrica con velocidad constante por principio de cantidad de movimiento la fuerza vertical queda expresada como:

$$f_z = -w \frac{dm}{dt} \quad (24)$$

$$f_z = -c_m \frac{\pi}{2} \rho \left[\frac{1}{\tan^2 \beta_1} + \frac{1}{\tan^2 \beta_2} \right] w^3 t \quad (25)$$

3. ENTRADA ASIMÉTRICA CON VELOCIDAD HORIZONTAL

La velocidad horizontal tiene un efecto en la distribución de presión y fuerza en el casco. Cuando se da la entrada asimétrica con velocidad horizontal, la velocidad de impacto vertical aparente en cada lado es diferente y se calcula de la siguiente manera:

$$w_1 = w - v \cos \beta_1 \operatorname{sen} \beta_1 \quad (26)$$

$$w_2 = w + v \cos \beta_2 \operatorname{sen} \beta_2 \quad (27)$$

Donde w_1 y w_2 son la velocidad de impacto vertical aparente del lado 1 y 2 respectivamente.

Figura 5. Diagrama de velocidades del casco

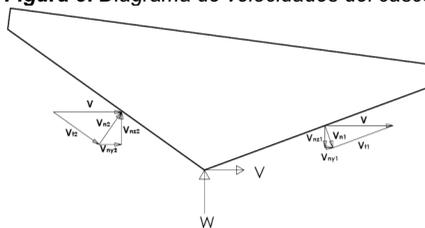
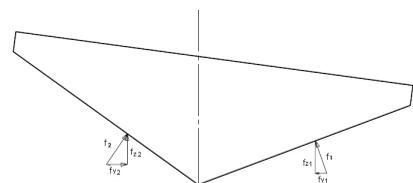


Figura 6. Fuerzas que actúan sobre el casco



La fuerza vertical en este caso estaría dada como:



$$f_z = f_{z1} + f_{z2} \quad (28)$$

$$f_z = -c_m \frac{\pi}{2} \rho \left[\frac{w_1}{\tan^2 \beta_1} + \frac{w_2}{\tan^2 \beta_2} \right] w^2 t \quad (29)$$

Donde f_{z1} y f_{z2} son la fuerza vertical del lado 1 y 2 respectivamente como se observa en la Figura 6.

La fuerza horizontal es posible hallarla determinado las componentes de la fuerza normal a la superficie como se muestra en la Figura 6, por relaciones trigonométricas se tiene:

$$f_{y1} = f_{z1} \tan \beta_1 \quad (30)$$

$$f_{y2} = f_{z2} \tan \beta_2 \quad (31)$$

Donde f_{y1} y f_{y2} son las fuerzas horizontales de los lados 1 y 2 respectivamente, de la sumatoria de fuerzas en la dirección horizontal se tiene:

$$f_y = f_{y2} - f_{y1} \quad (32)$$

$$f_y = -c_m \frac{\pi}{2} \rho \left[\frac{w_1}{\tan \beta_1} - \frac{w_2}{\tan \beta_2} \right] w^2 t \quad (33)$$

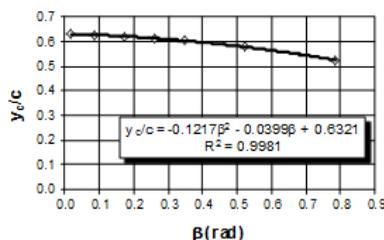
terminación del momento de rolido se calculó el centro de presión a partir

Para de del modelo de Wagner (1932) para secciones tipo cuña de la siguiente manera:

$$y_c = \frac{\int_0^1 c_p(\zeta) \zeta d\zeta}{\int_0^1 c_p(\zeta) d\zeta} \quad (34)$$

Donde y_c es la ubicación del centro de presión. La Figura 7 muestra los resultados del cálculo del centro de presión para diferentes ángulos de astilla muerta.

Figura 7. y_c/c vs β .



Para el cálculo del momento de rolido se realizó la sumatoria de momentos en la quilla de la sección, obteniendo:

$$m_x = -y_{c1}f_{z1} + y_{c1}f_{y1} \tan \beta_1 + y_{c2}f_{z2} + y_{c2}f_{y2} \tan \beta_2 \quad (35)$$

Donde y_{c1} e y_{c2} es la ubicación del centro de presión de los lados 1 y 2 respectivamente.

4. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE ADICIÓN DE MASA

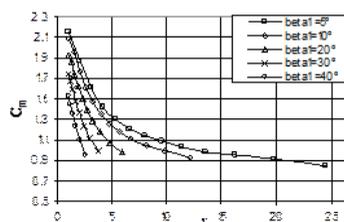
Para la determinación del coeficiente de adición de masa c_m para entrada asimétrica, se programó el modelo de Toyama (1993). La fuerza vertical sobre el casco se calcula a partir de la integral de la distribución de presión. El coeficiente adición de masa se calculó de la siguiente forma:

$$f_z = \int_{-y_2}^{y_1} p(y) dy \quad (36)$$

$$c_m = \frac{f_z}{\frac{\pi}{2} \rho \left[\frac{1}{\tan^2 \beta_1} + \frac{1}{\tan^2 \beta_2} \right] w^3 t} \quad (37)$$

Se asume *a priori* que el coeficiente de adición de masa depende solamente de la geometría de la sección y no de la relación de velocidades v/w .

Figura 8. Coeficiente de adición de masa vs r .



La Figura 8 muestra los resultados del coeficiente de adición de masa en función de $12 \tan \beta_1 r$ para distintos valores de β_1 . La curva que mejor se ajusta a los resultados de la Figura 8, tiene forma potencial $bmrac)(=$. El coeficiente de adición de masa para entrada asimétrica queda expresado en función de β_1 y β_2 como:

$$c_m = (2.3267 - 0.8747 \tan \beta_1) \left[\frac{\tan \beta_2}{\tan \beta_1} \right]^{-(0.2853 + 0.3142 \beta_1)^2}$$

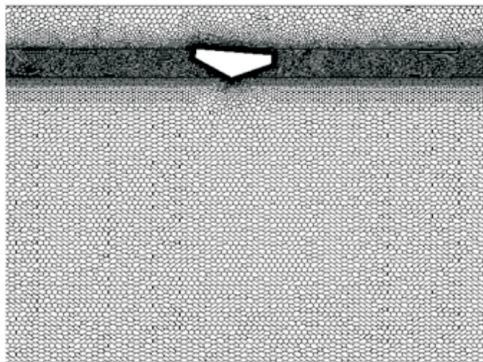


5. RESULTADOS

Xu G. (2008) solucionó el problema de valores en la frontera para entrada asimétrica con velocidad horizontal de secciones tipo cuña, asumiendo flujo potencial e incompresible determinando la distribución de presión y fuerza vertical y horizontal en la sección. Se modeló con el software CFD Star-CCM+ la entrada asimétrica de cuñas, determinando de esta manera la fuerza horizontal, vertical y momento de rolido en la sección. Los modelos utilizados para la simulación del fenómeno son: mezcla multifase (agua-aire), agua: líquido incompresible, aire: gas ideal, gravedad (sobre eje vertical), fluido isotérmico, flujo no viscoso, flujo segregado (inmiscible) y estado transitorio (método implícito).

Las condiciones de frontera del dominio computacional que se muestra en la Figura 9 para la entrada asimétrica son: presión de salida en frontera superior, velocidad de entrada en la frontera inferior y fronteras verticales, pared en las paredes del casco.

Figura 9. Mallado del dominio computacional



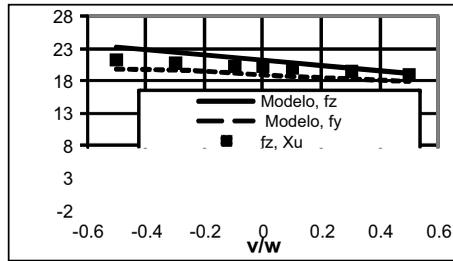
Los modelos utilizados para el mallado son: malla superficial, malla delgada con elemento poliédrico. La Figura 9 muestra el mallado después de un proceso de refinamiento de la malla para la entrada asimétrica de una cuña.

En las Figuras 10 a 13, se grafica el parámetro de fuerza $\frac{f}{w t}$ y el parámetro de momento $\frac{m_x}{\rho w^4 t^2}$, se comparan con los resultados de Xu G. (2008) y modelamiento con CFD para cuñas con

$$\beta_1=20^\circ \text{ y } \beta_2=40^\circ, \text{ y } \beta_1=5^\circ \text{ y } \beta_2=35^\circ.$$

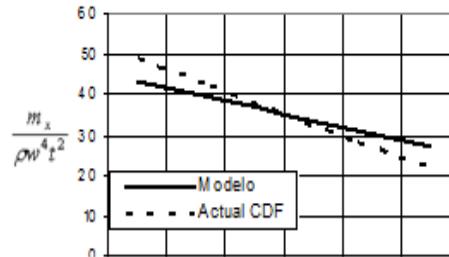
Figura 10. f vs v/w para cuña con $\beta_1=20^\circ$ y $\beta_2=40^\circ$.





En las Figuras 10 y 11 se observan la fuerza vertical, fuerza horizontal y momento de rolido antes de la separación del flujo de los codillos para la cuña con $\beta_1=20^\circ$ y $\beta_2=40^\circ$.

Figura 11. M_x vs v/w para $\beta_1=20^\circ$ y $\beta_2=40^\circ$.



Las magnitudes disminuyen cuando aumenta la relación v/w . Esto debido a que cuando $v/w < 1$, la velocidad aparente del lado 1 aumenta y cuando $v/w > 1$ la velocidad aparente del lado 1 disminuye, y con esto cambian las presiones y la fuerza. Los resultados muestran gran similitud respecto a los datos obtenidos mediante modelamiento con CFD y por Xu (2008). El máximo error en la fuerza vertical es de 9% respecto al modelo de Xu (2008). El momento presenta un error máximo de un 22% respecto a los resultados del CFD.

Figura 12 f vs v/w para $\beta_1=5^\circ$ y $\beta_2=35^\circ$.

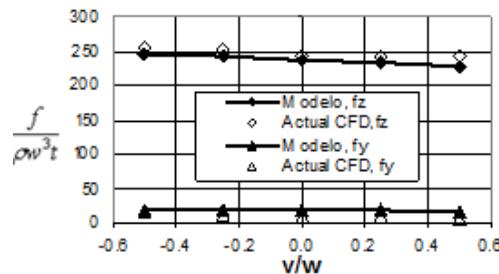
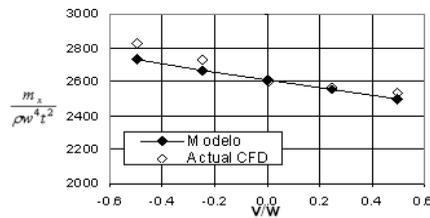


Figura 13. m_x vs v/w para $\alpha=5^\circ$ y $\beta=35^\circ$.



La Figuras 12 y 13 muestran los resultados para una cuña con $\alpha_1=5^\circ$ y $\alpha_2=35^\circ$, comparándolos con los resultados del software CFD, se obtiene gran similitud de los resultados de fuerza vertical, horizontal y momento de rolido, el error máximo de fuerza vertical es del 4%, mientras que para el momento de rolido es del 3%.

6. CONCLUSIONES

Se aplicó la teoría de adición de masa para la entrada con pequeña asimetría para secciones tipo cuña, determinando de esta manera la fuerza vertical, horizontal y momento de rolido, antes de la separación de flujo del codillo de la sección, los resultados obtenidos muestran gran similitud con los resultados encontrados por Xu G. (2008) y mediante modelamiento CFD. La magnitud de la fuerza vertical, horizontal y momento de rolido disminuyen con la relación v/w .



REFERENCIAS

- Caponetto, M., y SÖDING, H. (2003) Motion Simulations for planning Boats in waves. *Ship technology research*, 50, p 182-198
- Casetta, L. (Abril, 2006). The proper definition of the added mass for the water entry problem. *21st International Workshop on Water Waves and Floating Bodies 2nd-5th*, Loughborough, England.
- CD-adapco Engineering Simulation Software. (2008). 'Star-CCM+ Version 3.06.006 User Guide'.
- Judge C., Troesch A. (2000). Asymmetry and Horizontal velocity During water impact. Recuperado de: <http://www.eng.tau.ac.il/~greg/ABST.pdf/judge.pdf/judgeWWWFB2.pdf>
- Seif, M.S., Mousaviraad, S.M., Saddathosseini, S.H. & Bertram, V., (Noviembre, 2005). Numerical Modeling of 2-D Water Impact in One degree of Freedom. *Síntesis Tecnológica*. 2, (2), 79-83.
- Tascón O. D. (October, 2009). Numerical Computation of the Hydrodynamic Forces Acting on a Maneuvering Planing Hull Via Slender Body Theory - SBT and 2-D Impact Theory. *10th International Conference on Fast Sea Transportation FAST 2009, Athens, Greece*.
- Toyama Y. (1993). "Two-dimensional water impact of unsymmetrical bodies". *Jurnal of Soc. Naval Arch. Japan*. 173, p. 285-291.
- Tveitines, T. (2001). Application of Added Mass theory in planing [Ph.D. Thesis]. *Glasgow: University of Glasgow. Departamento de Arquitectura Naval y Ingeniería Marina*, p. 339.
- Vorus, W. S. (Junio, 1996). A flat cylinder theory for vessel impact and steady planing resistance. *Journal of Ship Research*, 40 (2), 89-106.
- Wagner, H. (Agosto, 1932). Über stoss – und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 12 (4), 193-215.
- Xu, G.D. (Agosto, 2008) Numerical simulation of oblique water entry of an asymmetrical wedge. *Journal of Ocean Engineering*, 35, p. 1597-1603.
- Xu, L., Troesch, A.W., and Vorus, W.S. (Septiembre, 1998). Asymmetric Vessel Impact and Planing Hydrodynamics. *Journal of Ship Research*, 42 (3), 187-19

