

UNA PROPUESTA DE MODELO DE CRECIMIENTO ECONÓMICO. APLICACIÓN AL CASO COLOMBIANO, 1980-2014

Gregory Quiroga Herrera

Quiroga Herrera, G. (2021). Una propuesta de modelo de crecimiento económico. Aplicación al caso colombiano, 1980-2014. *Cuadernos de Economía*, 40(82), 283-305.

En este artículo se presenta una propuesta de modelo de crecimiento económico que permite analizar economías con condiciones de competencia imperfecta en los mercados de factores productivos. Con la propuesta, se revisa la economía colombiana, para concluir que los cambios salariales generan efectos negativos sobre el crecimiento económico. Se concluye también que, para que los efectos sean positivos, se requieren tasas de crecimiento del capital cercanas al 100% e incrementos anuales en inversión, gasto público y exportaciones que representen cerca del 40% del PIB.

Palabras clave: crecimiento económico; producción; ingreso nacional; demanda agregada.

JEL: O47, D24, E23, E25.

G. Quiroga Herrera

Universidad Santo Tomás, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: gregoryquiroga@usantotomas.edu.co

Sugerencia de citación: Quiroga Herrera, G. (2021). Una propuesta de modelo de crecimiento económico. Aplicación al caso colombiano, 1980-2014. *Cuadernos de Economía*, 40(82), 283-305. doi: <https://doi.org/10.15446/cuad.econ.v40n82.80231>

Este artículo fue recibido el 10 de junio de 2019, ajustado el 5 de diciembre de 2019, y su publicación aprobada el 10 de diciembre de 2019.

Quiroga Herrera, G. (2021). A proposal for an economic growth model. Application to the Colombian case, 1980-2014. *Cuadernos de Economía*, 40(82), 283-305.

A proposal for an economic growth model is developed which allows for an economic analysis with conditions of imperfect competition in the markets of productive factors. With the proposal, the Colombian economy is reviewed, concluding that wage changes have negative effects on economic growth. In addition, for the effects to be positive, the capital growth rates are affected at 100% and annual increases in investment, public spending and exports represent about 40% of the GDP.

Keywords: economic growth; production; national income; aggregate demand.

JEL: O47, D24, E23, E25.

Quiroga Herrera, G. (2021). Uma proposta de modelo de crescimento econômico. Aplicação ao caso colombiano, 1980-2014. *Cuadernos de Economía*, 40(82), 283-305.

Este artigo apresenta uma proposta de modelo de crescimento econômico que permite analisar economias com condições imperfeitas de competição nos mercados de fatores produtivos. Com a proposta, revisa-se a economia colombiana, para concluir que as mudanças salariais geram efeitos negativos sobre o crescimento econômico. Conclui-se, também, que, para que os efeitos sejam positivos, são necessárias taxas de crescimento do capital próximas a 100% e aumentos anuais de investimentos, gastos públicos e exportações que representam cerca de 40% do PIB.

Palavras-chave: crescimento econômico; produção; renda nacional; demanda agregada.

JEL: O47, D24, E23, E25.

INTRODUCCIÓN

El crecimiento económico ha sido de interés en todas las esferas de la economía. Alrededor de este concepto se dan los principales debates de la actualidad, dado que se encuentra asociado a temas como el bienestar, el desarrollo y el medio ambiente, entre otros. Por esta razón, continúa siendo un área importante en la investigación económica. En esa medida, cada aporte sobre el crecimiento económico resulta relevante, sin importar cuánto se haya investigado al respecto.

Pueden mencionarse los modelos de Harrod (1939) y Solow (1956; 1957) como los pioneros en materia de crecimiento económico. A partir de estos, que corresponden a las corrientes de pensamiento poskeynesiana y neoclásica, respectivamente, se desarrolla la mayoría de los modelos de crecimiento vigentes. Otras fuentes teóricas del espectro poskeynesiano son los modelos de Kalecki (1935; 1956), Kaldor (1955) y Pasinetti (1962), los cuales incluyen una perspectiva de la distribución factorial del ingreso en los análisis del crecimiento económico, más cercana al concepto que se desarrolla en el presente trabajo.

El objetivo de esta investigación es elaborar una propuesta de modelo de crecimiento económico en el cual se pueda validar la relación entre la razón salarios-productividad marginal del trabajo y el crecimiento económico. Trabajar sobre este objetivo no parte de la asunción de la inexistencia de modelos de crecimiento, donde se pueda observar la relación crecimiento-salarios, como en los de corte poskeynesiano; sino que se pretende elaborar una herramienta adicional a las existentes.

¿Qué relación ha existido entre la razón salario-productividad marginal del trabajo (w/Pm_{gL}) y el crecimiento económico en Colombia, durante el periodo 1980-2014, según la propuesta de modelo elaborada en esta investigación? Como hipótesis, se plantea que durante el periodo 1980-2014, la relación entre la razón salarios-productividad marginal del trabajo y crecimiento económico en Colombia ha sido nula. Es decir, aquella razón no ha influido en el crecimiento económico colombiano o, lo que es lo mismo, los cambios en el salario que no están explicados por cambios en la productividad marginal del factor trabajo, no han tenido incidencia sobre el crecimiento económico colombiano.

Para demostrar lo anterior, se elabora la propuesta de modelo, en la que se integran las ópticas de ingreso y demanda. El punto de partida para esto es la remuneración de los factores productivos. El alcance de este trabajo es la obtención de las ecuaciones fundamentales de la propuesta de modelo y el análisis para el caso colombiano. Sin embargo, no se determinan condiciones de estabilidad dinámica de la propuesta de modelo ni una senda de crecimiento para Colombia.

En la primera parte, se elabora la propuesta de modelo. Esta inicia con la ecuación de ingreso nacional, donde se muestra que la renta está compuesta del pago a los asalariados y el capital. Luego, a través de la aplicación de análisis matemático, se definen las tasas de crecimiento del ingreso y la demanda, partiendo de lo siguiente:

- Una función Cobb-Douglas modificada, para integrar al modelo los efectos de la competencia imperfecta en los mercados de los factores productivos (capital y trabajo).
- La ecuación de demanda agregada donde el consumo total está discriminado por consumo de trabajadores y consumo de capitalistas.

En la segunda parte, se realiza una aproximación empírica a la propuesta de nuevo modelo utilizando los datos de la Penn World Table 9.0 para Colombia. Aplicando las ecuaciones obtenidas en la primera parte, se calculan los valores de las principales variables y parámetros que permiten determinar el efecto de los cambios salariales sobre el crecimiento económico colombiano. Finalmente, en la tercera parte, se presentan las conclusiones de la investigación.

DESARROLLO DE LA PROPUESTA DE NUEVO MODELO

La escuela neoclásica ha sido el paradigma dominante en la teoría económica. Desde esta perspectiva, dado que los precios y salarios son considerados flexibles, la reducción de los salarios reduciría el precio relativo de la mano de obra, con lo cual aumentaría su contratación en las empresas. Además, el costo marginal de las firmas se reducirá, lo cual causaría un incremento en la producción y la contratación de todos los factores productivos (Nicholson, 2001). En conclusión, la variación de los salarios guarda una relación inversa con el crecimiento económico.

En contraste con la conclusión neoclásica, los poskeynesianos afirman que las variaciones salariales guardan una relación directa con el crecimiento económico. Esto se debe a una reducción de los salarios que genera una contracción de la demanda agregada, lo que se traduce en una posterior contracción de la producción y una consecuente reducción de la mano de obra contratada (Lavoie, 2005).

De las dos posturas económicas planteadas, puede observarse que la determinación de la relación entre los cambios de los salarios y el crecimiento económico depende de cuál sea considerada la fuerza de mercado determinante de la dinámica económica. Si la oferta agregada es la fuerza determinante del crecimiento económico, la conclusión neoclásica es válida. En caso contrario, la conclusión aceptada sería la poskeynesiana. Además de la perspectiva oferta frente a demanda, se requiere de pleno empleo y decisiones eficientes en la contratación de factores productivos, para que la perspectiva neoclásica se garantice; así como una no rivalidad entre el consumo de los asalariados y las decisiones de consumo e inversión de los capitalistas, para garantizar los resultados predichos por la escuela poskeynesiana.

En síntesis, es conceptualmente posible que los cambios salariales tengan relación directa, neutra o inversa con el crecimiento económico. La naturaleza de la relación depende de las condiciones propias de cada economía sujeta de análisis; además, su existencia es conceptualmente posible independientemente de la fuerza

determinante del crecimiento económico, en términos teóricos. Por este motivo, para el desarrollo del modelo de crecimiento propuesto (MCP), se analizan los ingresos y la demanda por separado y se examinan las condiciones bajo las cuales los cambios salariales tienen relación directa, neutra o inversa con el crecimiento económico.

Elaboración del modelo de crecimiento propuesto (MCP)

A continuación, se presentan definiciones de dos tipos de tasas de crecimiento utilizadas en la exposición del modelo: las tasas de crecimiento con base inicial y aquellas con base final.

Tasas de crecimiento con base inicial

Se denotan con la representación de la variable seguida de un punto. Estas tasas representan el cambio en una variable como porcentaje de su valor inicial:

$$V_{\cdot} = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

Donde:

V_0 es el valor inicial de la variable

V_1 es el valor final de la variable

Tasas de crecimiento con base final

Se denotan con la representación de la variable seguida de dos puntos seguidos. Estas tasas representan el cambio en una variable como porcentaje de su valor final:

$$V_{\cdot\cdot} = \frac{V_1 - V_0}{V_1}$$

Donde:

V_0 es el valor de la variable en su estado inicial

V_1 es el valor de la variable en su estado final

Axiomas del modelo de crecimiento propuesto

El MCP se fundamenta en los siguientes axiomas:

1. El crecimiento económico puede presentarse en condiciones de competencia imperfecta en los mercados de los factores.
2. Las remuneraciones de los factores productivos se relacionan con sus correspondientes productividades marginales, aunque exista una desviación entre ambos cuando no haya competencia perfecta en los mercados de los factores.
3. El ingreso nacional se reparte entre los asalariados y capitalistas.
4. El consumo total de la economía se compone del consumo de los trabajadores y el de los capitalistas.
5. El nivel de importaciones está determinado por el ingreso total.
6. No hay inflación.

La función Cobb-Douglas y el ingreso nacional

En el MCP, el ingreso nacional se toma como eje de conexión entre la oferta y la demanda agregada. Por el teorema de Euler, a partir de la función Cobb-Douglas, tradicionalmente aceptada, se obtiene la identidad de ingreso nacional:

$$Y = L^\alpha K^{1-\alpha} \rightarrow Y = wL + rK \quad (1)$$

Donde:

w equivale a la productividad marginal del trabajo

r es la productividad marginal del capital

α representa la participación de la remuneración de los asalariados dentro del ingreso total (por tanto, $1 - \alpha$ representa la de los capitalistas)

Esta relación entre la función Cobb-Douglas y la identidad del ingreso nacional es válida, en términos teóricos, siempre que exista perfecta competencia en los mercados de los factores. Sin embargo, esta condición de competitividad no se presenta plenamente en la economía, sino que pueden existir asimetrías en la información y relaciones de poder en los mercados que impiden la equidad entre las productividades marginales de los factores y sus remuneraciones. Debido a esto, se ajusta la función Cobb-Douglas que representa la combinación de factores en términos de no competencia perfecta, la cual tiene la siguiente forma:

$$Y = L^{Cl} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}} \quad (2)^1$$

De esta forma, si se mantiene que α y $1 - \alpha$ son las participaciones de las remuneraciones de trabajo y capital dentro del ingreso nacional, entonces, los salarios y las ganancias no son exactamente la productividad marginal de los factores², sino que vienen determinados como se muestra a continuación:

$$w = Cl \frac{\partial Y}{\partial L} \quad (3)$$

$$r = \left(\frac{1-\alpha}{1-\frac{\alpha}{Cl}} \right) \frac{\partial Y}{\partial K} \quad (4)^3$$

¹ Esta forma funcional se asume dado que, por la demostración que se presenta en el apéndice "De la función de producción a la ecuación de ingreso nacional", es útil para obtener un coeficiente de desviación entre los precios de los factores y sus correspondientes productividades marginales.

² Esto implica un escenario de no competencia perfecta en los mercados de los factores productivos.

³ En el apéndice "De la función de producción a la ecuación de ingreso nacional" se describe al proceso de análisis matemático para obtener las ecuaciones (3) y (4).

Donde:

Cl es el coeficiente de desviación de eficiencia del salario medio, es decir la razón salario-productividad marginal del trabajo⁴.

De ese modo, si Cl es igual a uno, los factores productivos están siendo remunerados por sus correspondientes productividades marginales. Si $Cl > 1$, el salario es superior a la productividad marginal del trabajo mientras la ganancia, inferior a la productividad marginal del capital. Este mismo razonamiento puede hacerse, de manera inversa, para el caso en que $Cl < 1$. Debido a esto, un aumento eventual del salario medio aumentaría el valor de Cl si la productividad marginal del trabajo es constante o decrece.

La función Cobb-Douglas modificada representa la competencia imperfecta, dado que de ella deriva una función de ingresos en la cual los precios de los factores productivos se desvían de sus productividades marginales. Por definición, bajo la existencia de competencia perfecta en los mercados de factores productivos, los precios de estos se igualan a sus productividades marginales. Si existe alguna desviación entre estos valores, hay presencia de poder de monopolio o monopsonio (Nicholson, 2001).

El valor de Cl puede despejarse de la función de producción propuesta y representarse como:

$$Cl = \alpha \frac{\ln\left(\frac{L}{K}\right)}{\ln\left(\frac{Y}{K}\right)} \quad (5)$$

Ahora, con el fin de obtener el crecimiento del ingreso a partir de la función propuesta, se deriva totalmente y se divide entre la función sin derivar, con lo cual se obtiene:

$$Y. = \frac{\alpha}{Cl} L. + \left(1 - \frac{\alpha}{Cl}\right) K. + \ln\left(\frac{L}{K}\right) \frac{1}{Cl} (\partial\alpha - \alpha Cl.) \quad (6)^5$$

Esta tasa de crecimiento refleja que el efecto de Cl en $Y.$ es ambiguo, pues, dependiendo de las tasas de crecimiento del capital, la mano de obra y la contribución de la remuneración de los asalariados al ingreso nacional, el impacto puede ser directo o inverso. De forma más precisa, el cambio que experimenta el crecimiento económico por cambios en Cl está dado por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial Y.}{\partial Cl} = \frac{1}{Cl^2} \left(\alpha (Cl. - 1 + K. - L.) - \ln\left(\frac{L}{K}\right) \partial\alpha \right) \quad (7)$$

⁴ Dado que estos dos son positivos entonces Cl también es positivo.

⁵ En el apéndice "Obtención de la tasa de crecimiento de la producción" se describe al proceso de análisis matemático para obtener la ecuación (38).

De esta forma, el signo de $\frac{\partial Y}{\partial Cl}$ depende de la relación entre Cl y $\left(1 + \ln\left(\frac{L}{K}\right)\alpha + L - K\right)$.

En la Tabla 1 se indica el signo de $\frac{\partial Y}{\partial Cl}$, según el cumplimiento de determinadas condiciones.

Adicionalmente, a medida que el valor de Cl aumente, el resultado de $\frac{\partial Y}{\partial Cl}$ tenderá a cero. Por lo cual, el efecto de Cl sobre Y será cada vez menor. Del mismo modo, en la medida que Cl decrezca, el resultado de $\frac{\partial Y}{\partial Cl}$ se alejará de cero. Esto implica que los aumentos salariales tienen cada vez menos influencia sobre el crecimiento económico, pues a medida que aumentan, se apartan de su productividad marginal (Tabla 1).

Tabla 1.

Valor de $\frac{\partial Y}{\partial Cl}$ – óptica ingreso

	$Cl > 1 + \ln\left(\frac{L}{K}\right)\alpha + L - K$	$Cl = 1 + \ln\left(\frac{L}{K}\right)\alpha + L - K$	$Cl < 1 + \ln\left(\frac{L}{K}\right)\alpha + L - K$
Valor de $\frac{\partial Y}{\partial Cl}$	> 0	$= 0$	< 0

Un aspecto fundamental sobre la función Cobb-Douglas propuesta es que no puede ser una representación de la agregación de las funciones de producción de las empresas en la economía. Es posible el escenario en el que todas las empresas tengan una remuneración al factor trabajo equivalente a su productividad marginal y, aun así, el valor de Cl , a nivel agregado, diferiría de la unidad. Por lo cual, en el nivel agregado no es posible saber si los salarios se pagan o no por la productividad marginal de los trabajadores. Sin embargo, sí pueden analizarse las dinámicas o el comportamiento de los salarios y la productividad marginal del trabajo, asumiendo que la participación de las empresas en el mercado permanece relativamente constante.

El uso de una función Cobb-Douglas está motivado en que, tal como demuestran Díaz y Giral (2011), esta representa la mejor aproximación algebraica de la ecuación de ingreso nacional. Así pues, en realidad no se pretende representar cómo se está creando la producción a través de una Cobb-Douglas, sino que se busca tener otra forma funcional del ingreso nacional, para poder analizar la razón salario-productividad marginal del trabajo.

La remuneración de los factores y la demanda agregada

Partiendo de la óptica de la demanda agregada se tiene que:

$$Y = C + I + G + X - M \quad (8)$$

Donde:

C es el consumo de las familias

I es la inversión

G es el gasto del Gobierno

X es las exportaciones brutas

M es las importaciones brutas

Ahora, teniendo en cuenta que el consumo de las familias es ejecutado por los trabajadores y capitalistas, se puede definir que:

$$C = C_A + awL + brK \quad (9)$$

Donde:

C_A es el consumo autónomo

a es la propensión marginal a consumir de los trabajadores

b es la propensión marginal a consumir de los capitalistas⁶

Del mismo modo, puede indicarse que el nivel de importaciones depende de los ingresos totales de la economía, es decir:

$$M = M_A + dY \quad (10)$$

Por otra parte, dado que el salario está definido como $w = Cl \frac{\partial Y}{\partial L}$, y ∂Y en esta ecuación del salario, no corresponde al cambio total del producto sino al cambio producido por cambios en la mano de obra, entonces se puede redefinir w así:

$$w = Cl \frac{\beta(\partial Y_{total})}{(\partial L)} \quad (11)$$

Donde:

∂Y_{total} corresponde a la variación total del producto

β representa la participación de los cambios del producto causados solo por los cambios en la mano de obra dentro del cambio total del producto

Así pues, la ecuación de demanda agregada queda de la siguiente forma:

$$Y = C_A + \frac{a\beta(\partial Y_{total})}{L..} Cl + b \left(Y - \frac{\beta(\partial Y_{total})}{L..} Cl \right) + I + G + X - M_A - dY \quad (12)$$

⁶ Teniendo en cuenta que estas propensiones representan el nivel de consumo adicional al aumentar el ingreso en una unidad monetaria, entonces deben ser positivas y menores a uno.

Dividiendo la ecuación entre el valor del PIB en el periodo anterior y despejando la tasa de crecimiento de la demanda, se obtiene:

$$Y = \frac{c_A + i + g + x - m_A + b - d - 1}{1 - b + d - \frac{\beta(a-b)}{L..} Cl} \tag{13}^7$$

Donde: C_A , i , g , x y m_A son los valores del consumo autónomo, la inversión, el gasto público, las exportaciones y el componente autónomo de las importaciones, correspondientemente, divididos por el nivel de PIB del periodo anterior.

Para el caso de la demanda, Cl también tiene efectos ambiguos sobre la tasa de crecimiento económico. El cambio que experimenta la demanda por la variación de Cl está dado por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial Y}{\partial Cl} = \frac{\beta(a-b)(c_A + i + g + x - m_A + b - d - 1)}{L.. \left(1 - b + d - \frac{\beta(a-b)}{L..} Cl\right)^2} \tag{14}$$

Así, el cambio en la tasa de crecimiento de la demanda es independiente de los cambios en Cl siempre que se cumpla que $(a = b)$ o bien $\left[\alpha(b-a) = \frac{-\Delta(I+G+X)}{Y_0}\right]$.

En la Tabla 2 se indica el signo de $\frac{\partial Y}{\partial Cl}$ según el cumplimiento de determinadas condiciones.

Tabla 2.

Valor de $\frac{\partial Y}{\partial Cl}$ – óptica demanda

Valor de $\frac{\partial Y}{\partial Cl}$		$\alpha(b-a) < \frac{-\Delta(I+G+X)}{Y_0}$	$\alpha(b-a) = \frac{-\Delta(I+G+X)}{Y_0}$	$\alpha(b-a) > \frac{-\Delta(I+G+X)}{Y_0}$
$b > a$	$L.. > 0$	> 0	$= 0$	< 0
	$L.. = 0$	Indeterminado	Indeterminado	Indeterminado
	$L.. < 0$	< 0	$= 0$	> 0
$b = a$		$= 0$	$= 0$	$= 0$
$b < a$	$L.. > 0$	< 0	$= 0$	> 0
	$L.. = 0$	Indeterminado	Indeterminado	Indeterminado
	$L.. < 0$	> 0	$= 0$	< 0

⁷ En el apéndice “Obtención de la tasa de crecimiento de la demanda” se describe el análisis matemático para obtener las ecuaciones (12) y (13).

APROXIMACIÓN EMPÍRICA DE LA PROPUESTA DE NUEVO MODELO

Para la aproximación empírica se utiliza la información disponible en la Penn World Table 9.0 para la economía colombiana durante el periodo 1980-2014. De allí, se toman las siguientes variables:

1. Número de personas empleadas.
2. *Stock* de capital a precios constantes de 2011⁸ (en millones de dólares estadounidenses).
3. PIB ópticas gasto y producción a precios constantes de 2011 (en millones de dólares estadounidenses).
4. Participación de la remuneración a los asalariados en el PIB.
5. Participación de los componentes del gasto (consumo, inversión, gasto público, importaciones y exportaciones) en el PIB.

De allí, se calcula el coeficiente de desviación de eficiencia del salario medio, por medio de la ecuación (5). Las propensiones marginales a consumir de los capitalistas y trabajadores, así como la propensión marginal a importar, son estimadas a través de mínimos cuadrados ordinarios con las ecuaciones (9) y (10).

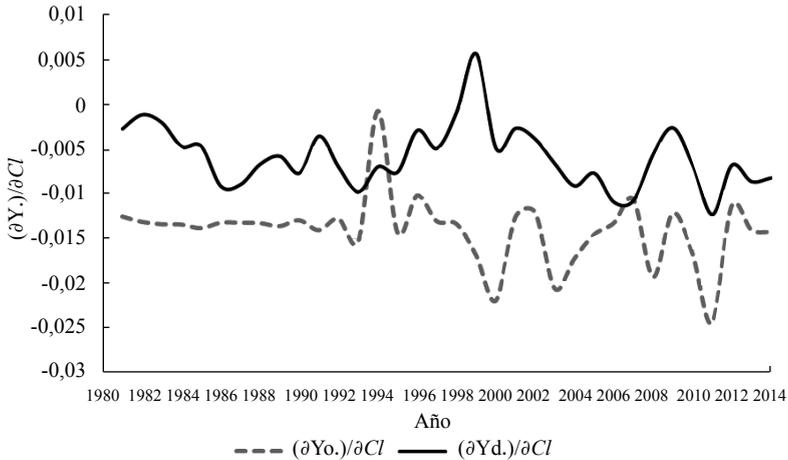
Resultados

Las propensiones marginales a consumir para trabajadores y capitalistas son 0,810 y 0,177, respectivamente, mientras la propensión marginal a importar es 0,193. Estos resultados, al igual que el consumo y las importaciones autónomas, son obtenidos a través de MCO con evidencia de cointegración entre las variables involucradas en la estimación⁹. Con estos valores, puede estimarse el efecto del cambio en *Cl* sobre las tasas de crecimiento del ingreso y la demanda, aplicando las ecuaciones (7) y (14).

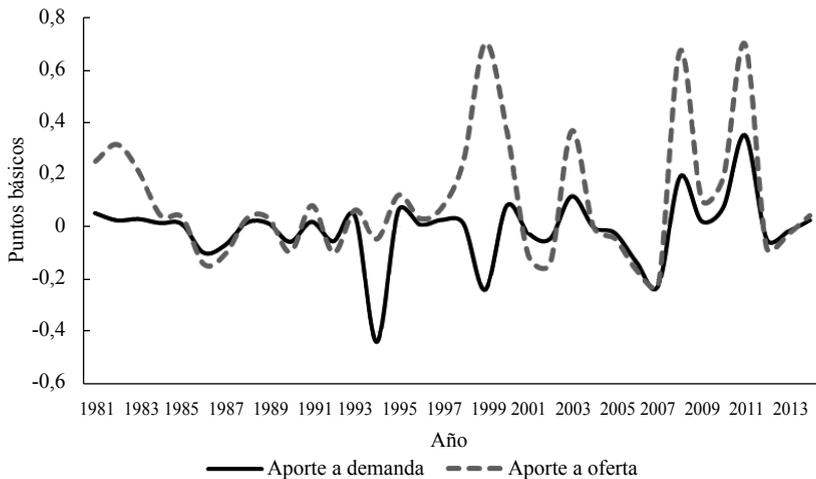
Como se observa en la Figura 1, para el periodo de referencia, el indicador $(\partial Y.)/\partial Cl$ es negativo, para la mayoría de los periodos. Es decir, la relación entre *Cl* y la tasa de crecimiento económico colombiana es fundamentalmente inversa. De forma complementaria, en la Figura 2 se observa que el efecto final de los cambios en *Cl* sobre los cambios en las tasas de crecimiento no son despreciables, pues alcanzaron a representar una variación en las tasas de crecimiento de oferta y demanda de 70 y 35 puntos básicos, respectivamente.

⁸ En el apéndice del documento "The next generation of the Penn World Table" se explica la metodología de estimación del *stock* del capital en la PWT (Feenstra, Inklaar y Timmer, 2015).

⁹ Los resultados de las regresiones y las pruebas de raíz unitaria, para las variables y los errores de los modelos estimados, se pueden observar en el apéndice de este documento.

Figura 1.Evolución $(\partial Y.)/\partial CI$ para oferta y demanda**Figura 2.**

Aporte en puntos básicos de los cambios en CI a las tasas de crecimiento oferta y demanda



Ahora bien, observando la Figura 3, se evidencia un marcado decrecimiento de CI desde 1994 hasta 2014. Eso explica la tendencia de $(\partial Y.)/\partial CI$ a hacerse más negativo, con el paso de los años. Teniendo en cuenta estas tendencias, sería válido esperar que los cambios en CI generen mayor aporte, en términos de puntos básicos, a las tasas de crecimiento de oferta y demanda y que el valor de aporte en puntos básicos sea positivo.

Figura 3.
Evolución de Cl 1980-2014

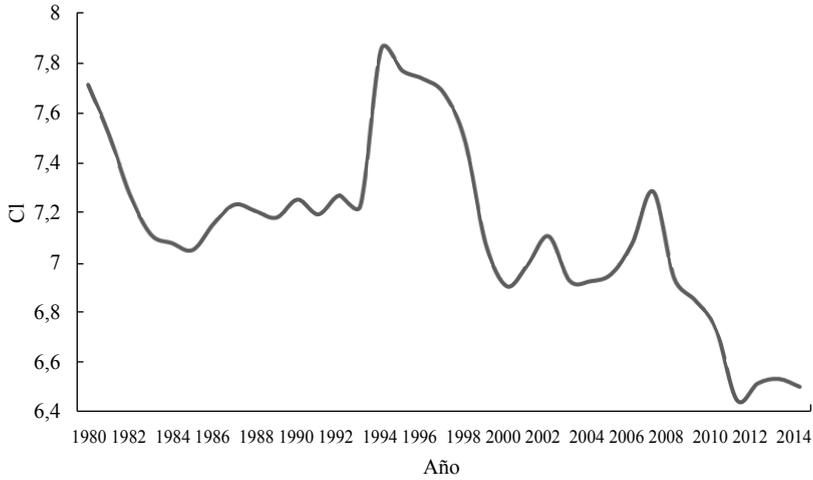
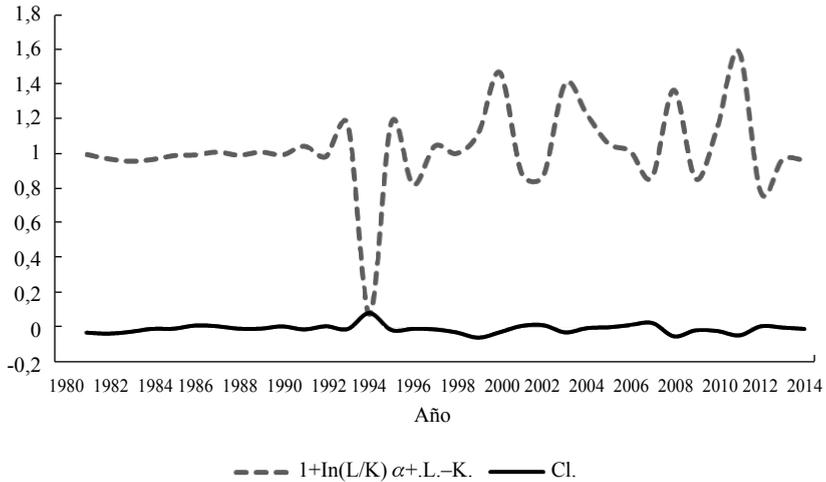


Figura 4.
Evolución variables Cl . y $(1 + \ln(L/K) \alpha + L.-K.)$



Realizando un acercamiento sobre la oferta, es de esperar que la relación negativa entre la tasa de crecimiento económico y el coeficiente de desviación de eficiencia del salario medio se mantenga. Como se observa en la Figura 4, no hay una tendencia a que la brecha entre Cl . y $(1 + \ln(L/K) \alpha + L.-K.)$ se cierre. Esta brecha, como puede evidenciarse en la Tabla 2, determina el signo de $\frac{\partial Y}{\partial Cl}$.

Para conocer las condiciones requeridas para que la brecha entre $Cl.$ y $(1 + \ln(L/K) \alpha + L - K.)$ se cierre, es necesario calcular el valor de la tasa de crecimiento del capital que satisface la condición $(Cl. = 1 + \ln\left(\frac{L}{K}\right) \alpha + L - K.)$. El valor obtenido corresponde a la tasa de crecimiento del capital, a partir de la cual los cambios de Cl empiezan a tener impacto positivo sobre la tasa de crecimiento económico de la producción. Para obtener el valor de $Cl.$ en función de $K.$ se calcula la derivada total de Cl en la ecuación (5) y se divide entre la misma ecuación, con lo cual se obtiene que:

$$Cl. = \alpha + \frac{L}{\ln\left(\frac{L}{K}\right)} + K \cdot \left[\frac{1}{\ln\left(\frac{Y}{K}\right)} - \frac{1}{\ln\left(\frac{L}{K}\right)} \right] - \frac{Y}{\ln\left(\frac{Y}{K}\right)} \quad (15)$$

Así pues, reemplazando la ecuación (15) en la condición $(Cl. = 1 + \ln\left(\frac{L}{K}\right) \alpha + L - K.)$ y despejando $K.$, se obtiene la siguiente expresión:

$$K. = \frac{1 + \alpha \left[\ln\left(\frac{L}{K}\right) - 1 \right] + L \left[1 - \frac{1}{\ln\left(\frac{L}{K}\right)} \right] + \frac{Y}{\ln\left(\frac{Y}{K}\right)}}{1 + \frac{1}{\ln\left(\frac{Y}{K}\right)} - \frac{1}{\ln\left(\frac{L}{K}\right)}} \quad (16)$$

Si se asume que la participación de la remuneración a los asalariados en el PIB se mantiene constante y que la tasa de crecimiento económico mantiene un promedio de 3,47 %¹⁰, entonces se requeriría que el *stock* de capital reportado en 2015 hubiera sido 6,4 veces el del 2014 y mantener tasas de crecimiento del capital por encima del 100 % a partir de 2016. La Figura 5 muestra la evolución estimada de la tasa de crecimiento del capital requerida para cambiar el signo de $\frac{\partial Y}{\partial Cl}$ durante el periodo 2016-2060 con base en la ecuación (16).

En el caso de la demanda, también se espera que $\frac{\partial Y}{\partial Cl}$ se mantenga negativo.

En la Figura 6 se evidencia la amplia brecha entre los componentes $\alpha(b - a)$ y $-\frac{\Delta(I + G + X)}{Y_0}$, que son los que definen el signo de $\frac{\partial Y}{\partial Cl}$ en el caso colombiano, pues según la Tabla 3, Colombia se encuentra en el estado en que $b < a$ y la tasa de crecimiento de la mano de obra se ha mantenido positiva desde 1980.

Teniendo en cuenta que el valor de $\alpha(b - a)$ en 2014 fue -0,393, si, además, se supone que la participación de la remuneración a los asalariados en el ingreso nacional, en términos reales, se mantiene constante, se requeriría que el aumento

¹⁰Este valor de referencia se obtiene estimando la tasa de crecimiento de la producción durante 1994-2014, a través de MCO con la forma funcional $\ln(Y) = \beta_0 + \beta_1 (\text{Año})$ donde β_1 corresponde a la tasa de crecimiento media estimada. Los resultados de la regresión se encuentran en el apéndice.

Figura 5.
 Valor estimado K. que satisface $\frac{\partial Y}{\partial Cl} = 0$

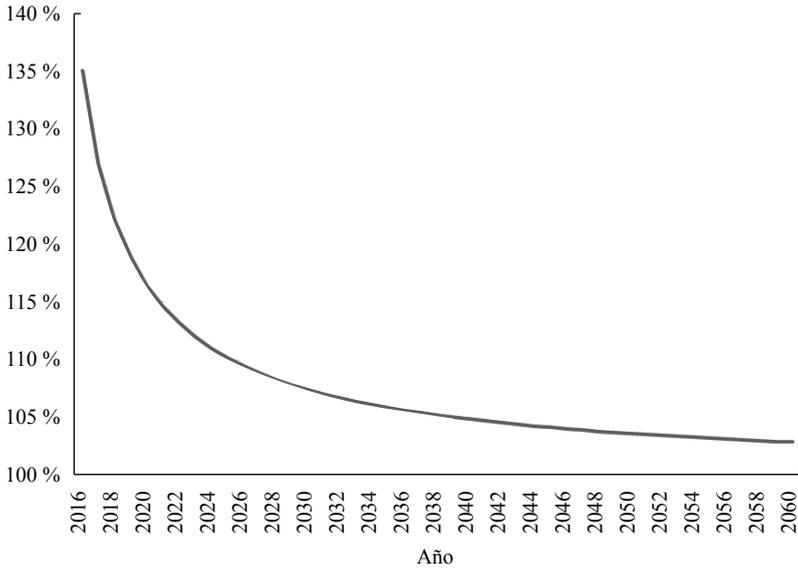
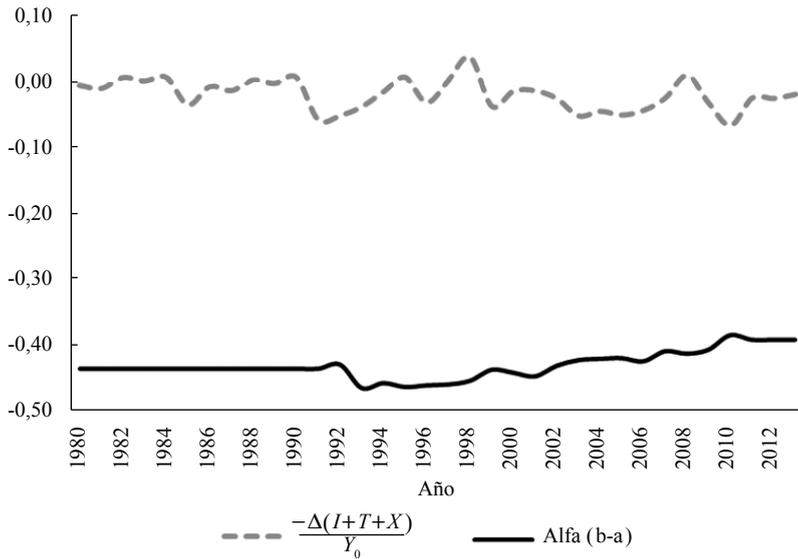


Figura 6.
 Evolución variables $\alpha(b - a)$ y $\frac{-\Delta(I+G+X)}{Y_0}$



anual de la inversión, el gasto público y las exportaciones brutas represente más del 39,3 % del PIB para cerrar la brecha presentada en la Figura 6.

CONCLUSIÓN

La relación entre la razón salario-productividad marginal del trabajo y el crecimiento económico puede ser positiva, nula o negativa, según el MCP, dependiendo de lo siguiente:

1. Las propensiones marginales a consumir tanto de trabajadores como de capitalistas.
2. La participación de la remuneración a los asalariados en el ingreso nacional.
3. La tasa de crecimiento de la mano de obra contratada.
4. El crecimiento de la inversión, el gasto público y las exportaciones.
5. La tasa de crecimiento del capital.

Una vez realizada la aproximación empírica del MCP se evidencia que ha existido una relación relevante entre la razón salario-productividad marginal del trabajo y el crecimiento económico en Colombia durante el periodo 1980-2014. La relación entre estas variables ha sido negativa y se espera que se mantenga así, teniendo en cuenta que no se han observado escenarios donde la inversión en Colombia se duplique de un año a otro ni crecimientos de la inversión, el gasto público ni las exportaciones brutas que representen más del 6,7 % del PIB.

No es posible satisfacer las condiciones de tasas de crecimiento de capital superiores al 100 % ni incrementos en la inversión, el gasto público y las exportaciones brutas superiores al 39,3 % del PIB para cambiar el sentido de la relación entre Cl y el crecimiento económico.

REFERENCIAS

1. Díaz, W. A., & Giral, D. A. (2011). Comparación de la solución analítica de la función de producción COBB-DOUGLAS con la obtenida por el método de mínimos cuadrados. *Revista Tecnura*, 15(28), 134-141.
2. Feenstra, R., Inklaar, R., & Timmer, M. (2015). The next generation of the Penn World Table. *American Economic Review*, 105(10), 3150-3182.
3. Harrod, R. F. (1939). La teoría dinámica. En A. Sen, *Economía del crecimiento* (pp. 43-62). México: Fondo de Cultura Económica.
4. Kaldor, N. (1955). Teorías alternativas de la distribución del ingreso. *Review of Economic Studies*, 46(18), 209-236.

5. Kalecki, M. (1935). A macrodynamic theory of business cycles. *Econometrica*, 3(3), 327-344.
6. Kalecki, M. (1956). *Teoría de la dinámica económica - Ensayo sobre los movimientos cíclicos y a largo plazo de la economía capitalista*. México: Fondo de Cultura Económica.
7. Lavoie, M. (2005). El corto plazo: demanda efectiva y mercado de trabajo. En M. Lavoie, *La economía postkeynesiana. Un antídoto del pensamiento único* (pp. 91-110). Barcelona: Icaria editorial S.A.
8. Nicholson, W. (2001). Fijación de precios en los mercados de insumos. En W. Nicholson, *Microeconomía intermedia y sus aplicaciones* (pp. 422-444). Bogotá: McGraw-Hill.
9. Pasinetti, L. (1962). Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic Growth. *The Review of Economic Studies*, 31(2), 267-279.
10. Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economic*, 70(1), 65-94.
11. Solow, R. M. (1957). Technical change and the aggregate production function. *Review of Economics and Statistics*, 39(3), 312-320.

APÉNDICE

Test de Dickey-Fuller aumentado rezagos (0) – Variables de ecuación de demanda

Ho: la serie tiene raíz unitaria

Valor P para Z(t)		Consumo	rk	wl	PIB demanda	Importaciones
En nivel	Con deriva	0,9897	0,9973	0,9469	1,0000	0,9703
	Con tendencia	0,9968	0,9951	0,9483	1,0000	0,9732
En primera diferencia	Con deriva	0,0017	0,0000	0,0003	0,0047	0,0002
	Con tendencia	0,0371	0,0000	0,0084	0,0268	0,0012

Resultados de la regresión – Ecuación de consumo

Variables	(Ecuación 1)
	Consumo
Rk	0,177*
	(0,0502)
Wl	0,810*
	(0,0352)
v1991	19017*
	(5159)
Constant	33368*
	(3635)
Observations	35
R-squared	0,995

Error estándar entre paréntesis. *p < 0,01.

Test de Dickey-Fuller aumentado rezagos (0) – Errores de ecuación de consumo

Ho: la serie tiene raíz unitaria

Valor P para Z(t)		Errores ecuación consumo
En nivel	Sin intercepto	0,0000

Resultados de la regresión – Ecuación de importaciones

Variables	(Ecuación 1)
	importaciones
PIB Gasto	0,193*
	(0,00734)
Constant	-29 144*
	(2697)
Observations	35
R-squared	0,954

Error estándar entre paréntesis. * $p < 0,01$.

Resultados de la regresión – Ecuación de crecimiento económico

Variables	(Ecuación 1)
	Ln (Y)
Año	0,034*
	(0.0019)
Constant	-56 587*
	(3847)
Observations	21
R-squared	0.945

Error estándar entre paréntesis. * $p < 0,01$.

Test de Dickey-Fuller aumentado rezagos (0) – Errores de ecuación importaciones

Ho: la serie tiene raíz unitaria

Valor P para Z(t)		Errores ecuación importaciones
En nivel	Sin intercepto	0,0350

De la función de producción a la ecuación de ingreso nacional

Sea la función de producción

$$Y = L^{Cl} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}} \quad (17)$$

Donde:

α corresponde a la participación de la remuneración a los trabajadores en el ingreso nacional, $\alpha = \frac{wL}{Y}$

$(1 - \alpha)$ corresponde a la participación de la remuneración a los capitalistas en el ingreso, $(1 - \alpha) = \frac{rK}{Y}$

L es la mano de obra

K es el *stock* de capital

Cl es el coeficiente de desviación de eficiencia del salario medio

Y es el nivel de producto

Si se deriva parcialmente la función de producción con respecto a L y K , se obtiene:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\alpha}{Cl} \frac{L^{\frac{\alpha}{Cl}-1} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}}}{L} = \frac{\alpha}{Cl} \frac{Y}{L} = PmgL \quad (18)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \left(1 - \frac{\alpha}{Cl}\right) \frac{L^{\frac{\alpha}{Cl}} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}-1}}{K} = \left(1 - \frac{\alpha}{Cl}\right) \frac{Y}{K} = PmgK \quad (19)$$

De las ecuaciones (17) y (18) se obtiene que:

$$\alpha Y = \frac{\partial Y}{\partial L} Cl L \quad (20)$$

$$(1 - \alpha) Y = \left(1 - \frac{\alpha}{Cl}\right) \frac{\partial Y}{\partial K} K \quad (21)$$

Sumando las ecuaciones (19) y (20) se obtiene:

$$\alpha Y + (1 - \alpha) Y = Y = \frac{\partial Y}{\partial L} Cl L + \left(1 - \frac{\alpha}{Cl}\right) \frac{\partial Y}{\partial K} K \quad (22)$$

Así pues:

$$w = Cl \frac{\partial Y}{\partial L} \quad (23)$$

$$r = \left(\frac{1-\alpha}{1-\frac{\alpha}{Cl}} \right) \frac{\partial Y}{\partial K} \quad (24)$$

Por tanto:

$$Y = w L + r K \quad (25)$$

Obtención de la tasa de crecimiento de la producción

Sea la función de producción:

$$Y = L^{\left(\frac{\alpha}{Cl}\right)} K^{\left(1-\frac{\alpha}{Cl}\right)} \quad (26)$$

Donde:

α corresponde a la participación de la remuneración a los trabajadores en el ingreso nacional, $\alpha = \frac{wL}{Y}$

$(1 - \alpha)$ corresponde a la participación de la remuneración a los capitalistas en el ingreso, $(1-\alpha) = \frac{rK}{Y}$

L es la mano de obra

K es el *stock* de capital

Cl es el coeficiente de desviación de eficiencia del salario medio

Y es el nivel de producto

Si se deriva la función de producción con respecto a cada variable se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\alpha}{Cl} \frac{L^{\frac{\alpha}{Cl}-1} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}}}{L} = \frac{\alpha}{Cl} \frac{Y}{L} = PmgL \quad (27)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \left(1 - \frac{\alpha}{Cl}\right) \frac{L^{\frac{\alpha}{Cl}} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}-1}}{K} = \left(1 - \frac{\alpha}{Cl}\right) \frac{Y}{K} = PmgK \quad (28)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = \frac{\frac{\alpha}{Cl} L^{\frac{\alpha}{Cl}-1} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}} \ln(L) - L^{\frac{\alpha}{Cl}} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}-1} \ln(K)}{Cl} = \frac{Y}{Cl} (\ln(L) - \ln(K)) \quad (29)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial Cl} = \frac{\alpha}{Cl^2} L^{\frac{\alpha}{Cl}} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}} \ln(K) - \frac{\alpha}{Cl^2} L^{\frac{\alpha}{Cl}} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}} \ln(L) = \alpha \frac{Y}{Cl^2} (\ln(K) - \ln(L)) \quad (30)$$

Multiplicando cada derivada parcial por el cambio de la variable con respecto a la cual se derivó el producto para luego sumar todos los resultados, se puede obtener el cambio total del producto así:

$$\partial Y = \frac{\alpha Y}{ClL} \partial L + \left(1 - \frac{\alpha}{Cl}\right) \frac{Y}{K} \partial K + \frac{Y}{Cl} (\ln(L) - \ln(K)) \partial \alpha + \alpha \frac{Y}{Cl^2} (\ln(K) - \ln(L)) \partial Cl \quad (31)$$

Al dividir la ecuación (31) entre Y se obtiene la tasa de crecimiento de la producción, así:

$$\frac{\partial Y}{Y} = Y \cdot \left[\frac{\alpha}{Cl} L + \left(1 - \frac{\alpha}{Cl}\right) \frac{1}{K} + \ln\left(\frac{L}{K}\right) \frac{1}{Cl} (\partial \alpha - \alpha Cl) \right] \quad (32)$$

Obtención de la tasa de crecimiento de la demanda

Sea la demanda agregada:

$$Y = C_A + \alpha Y + b(1 - \alpha)Y + I + G + X - M_A - dY \quad (33)$$

Donde:

Y es el valor de la demanda agregada

C_A es el consumo autónomo

α corresponde a la participación de la remuneración de los asalariados dentro del ingreso nacional

a y b son a las propensiones marginales a consumir de los trabajadores y capitalistas correspondientemente

I , G y X son la inversión, el gasto público y las exportaciones brutas correspondientemente

M_A son las importaciones autónomas

d es la propensión marginal a importar

Al agrupar Y al lado izquierdo de la ecuación (33) se obtiene:

$$Y(1 + \alpha(b - a) - b + d) = C_A + I + G + X - M_A \quad (34)$$

Teniendo en cuenta que $\alpha Y = wL$ se utiliza la ecuación (11) para obtener α , por lo cual:

$$\alpha = Cl \frac{\beta Y..}{L..} \quad (35)$$

Donde:

β es la proporción que representa el cambio en el producto, efecto de cambios en la mano de obra, dentro de la variación total del producto

Cl es el coeficiente de desviación del ingreso medio con respecto a la productividad marginal del trabajo

Reemplazando la ecuación (35) en la (34) se obtiene:

$$Y \left(1 + \frac{\beta Y_{..}}{L_{..}} Cl(b-a) - b + d \right) = C_A + I + G + X - M_A \quad (36)$$

Al dividir la ecuación (36) entre Y_0 se obtiene:

$$Y_{..} + 1 + \beta Cl \frac{Y_{..}}{L_{..}} (b-a) - Y_{..} b - b + Y_{..} d + d = c_A + i + g + x - m_A \quad (37)$$

Al sacar factor común Y de la ecuación (37) se tiene:

$$Y \left(1 - \beta Cl \frac{(a-b)}{L_{..}} - b + d \right) - b + d + 1 = c_A + i + g + x - m_A \quad (38)$$

Finalmente, de la ecuación (38) se despeja la tasa de crecimiento de la demanda, por lo cual:

$$Y_{..} = \frac{c_A + i + g + x - m_A + b - d - 1}{1 - b + d - \frac{\beta(a-b)}{L_{..}} Cl} \quad (39)$$