BANH, Tomo LXXXVI, No. 343-344. Julio-Diciembre 2003. Págs. 113-119.

LA OBRA MATEMÁTICA DE CAGIGAL*

*F. J. Duarte***

Creo que una contribución adecuada para conmemorar el centenario de le desaparición de Cagigal, el ilustre fundador de los estudios matemáticos en Venezuela, es la de dar a conocer las obras que dejó, haciendo ver al mismo tiempo cuál era el estado de la ciencia matemática en el momento que a él le tocó vivir. El valor científico de un hombre no puede juzgarse por meras conjeturas o por lo que hayan dicho de él los que vinieron después, si este juicio no estuviere fundado en sus obras. Es evidente, en efecto, que el único medio seguro para determinar ese valor consiste en el examen de sus escritos.

Cagigal dejó solamente, que sepamos, tres trabajos matemáticos: la *Memoria sobre las integrales limitadas*, que se publicó en 1929, gracias a que Vicente Lecuna, el gran historiador, poseía una copia de ella, tomada de la que a su vez había hecho Manuel María Urbaneja del original enviado por Cagigal a la Escuela militar de West Point. Lecuna me entregó en aquel año su copia con el fin de examinarla y corregirla para su publicación, la que fue ejecutada con prefacio y notas de F. J. Duarte. Las otras dos memorias están inéditas. Una de ellas *Sobre el movimiento del péndulo*, de puño y letra de Cagigal, sin fecha, y la otra, *Sobre cálculo de variaciones,* copia de Angel María Aguerrevere, con fecha 13 de marzo de 1838. Además, he visto citados en el estudio acerca de Cagigal, de Luis Correa, un *Tratado de Mecánica elemental* y un *Curso de Astronomía*. No conozco estos libros que son probablemente obras didácticas elementales.

Cagigal llegó a París en 1823. No sé si estudió en la Facultad de Ciencias o en alguno de los grandes liceos de París. No he encontrado datos seguros acerca de esto y lo que dice Luis Correa sobre sus maestros, fue sin duda tomado de un estudio de Jesús Muñoz Tébar, de 1897, sobre Cagigal publicado en la revista *El Ingeniero*, según un artículo de Olegario Meneses, de 1856. Me parece muy dudoso que Legendre y Laplace hayan sido maestros de Cagigal. En efecto, en 1823, estos grandes matemáticos contaban 71 años Legendre, y 74 Laplace, y si ambos fueron profesores en la Facultad —de lo cual no he encontrado confirmación y más bien hechos que hacen

---

* Conferencia leída el 10 de febrero de 1956 por el Doctor F. J. Duarte en la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales con motivo de la conmemoración del primer centenario de la muerte de Juan Manuel Cagigal.

** Ilustre ingeniero y matemático venezolano (Maracaibo 1883-Caracas 1972), miembro fundador de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales.

dudarlo— estarían en la época citada ya retirados por límites de edad. De Legendre, sé que fue profesor de la Escuela Normal en 1795. Respecto de los otros científicos citados por Correa, Lacroix tenía entonces 58, años, Poisson 42, Navier 38 y Cauchy 34, y habrían podido ser maestros de Cagigal[1]. Es muy extraño, sin embargo, que Cagigal, al citar muchas veces a Cauchy en su *Memoria sobre las integrales,* no lo nombra nunca como su maestro, y, por el contrario, el juicio que de él, al cual me refiero en el prefacio de esa Memoria y del que hablaré más adelante, no hace válida la hipótesis de que fuera discípulo del gran geómetra. Como en Francia en esa época las fuentes del saber matemático eran las obras de Lacroix y de Cauchy en Análisis, las de Navier y de Poisson en Mecánica y era muy reciente la publicación de la tercera edición de la *Théorie des Probabalités* de Laplace, quizás sea éste el origen o el motivo de considerar a estos grandes científicos como los maestros de Cagigal. De todos modos, si no lo fueron personalmente, lo fueron por sus obras.

Veamos ante todo cuál era el estado de la Matemática cuando Cagigal estudiaba en París, es decir, entre 1823 y 1828, ya que regresó a Venezuela en los comienzos de 1829. Como es bien sabido, la inmensa transformación de las matemáticas data del siglo XVII, sobre todo con Descartes, Newton y Leibniz. Los nuevos métodos trajeron la síntesis de los innumerables métodos particulares que eran antes necesarios para estudiar las tangentes a las curvas y las diferentes propiedades de éstas. Síntesis debida al progreso de la ciencia —como lo hice notar en otra ocasión— y no por esfuerzo deliberado del hombre. Tan extraordinarios fueron los resultados del nuevo análisis que se creyó terminado el desarrollo de la Matemática y que los científicos podrían emplear todo su tiempo en estudiar las leyes de la Naturaleza aplicando la Matemática y el estudio de la Física quedaría así también terminado. Como he dicho en un articulo sobre Cauchy, publicado hace muchos años, esta creencia era utópica, porque la Matemática no tiene por único objeto estudiar las leyes del mundo físico y, además, la Matemática, como creación de la inteligencia, no puede tener límite y para que la Física pudiera llegar a su término, sería preciso que el hombre pudiera conocer todos los fenómenos de la Naturaleza y sus causas. Esto parece imposible y quizás el hombre no pueda llegar nunca a ello porque esta ignorancia le da un objeto a la existencia: el anhelo de conocer la verdad aun cuando no se pueda alcanzarla, como decía Lessing.

Casi un siglo después de la creación del Análisis, apareció en las *Institutionis Calculi*, de Euler, en cinco volúmenes, el conjunto de sus métodos. Al matemático francés, S. F. Lacroix, se debe el haber estudiado y compendiado todos los trabajos aparecidos hasta entonces —principios del siglo XIX— y publicó entre 1810 y 1819 su gran *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*. Esta gran obra, en tres volúmenes, tiene un interés histórico considerable. Puede considerársela como el resumen del Análisis antiguo, es decir, el estado del análisis en el siglo XVIII. Los grandes descubrimientos del siglo precedente, lo extraordinario de los resultados, hizo que se descuidara mucho el rigor.

1. En 1823 Cauchy era profesor en la Escuela Politécnica. Desde 1826 era además profesor adjunto en la Facultad do Ciencias.

Dos años después de haber visto la luz el tercer tomo de la gran obra de Lacroix, apareció, en 1821, el *Analyse algébrique* de Cauchy, el gran reformador del Análisis. Comparando esta obra con el Tratado de Lacroix —dice Borel— "se mide toda la distancia que separa las matemáticas del siglo XVIII de las del siglo XIX". En esta notable obra se establecen por primera vez nociones precisas sobre límites y continuidad adoptadas en los libros modernos. Hizo que el empleo de las series fuera riguroso con la creación de criterios para la convergencia y dio un sentido claro a los cálculos con cantidades imaginarias. Citaremos algunas frases del prólogo de esta obra célebre que contribuyó a transformar las Matemáticas, porque ellas indican claramente lo esencial de esta transformación. Dice Cauchy:

> *"En cuanto a los métodos, he tratado de darles todo el rigor que se exige en geometría, de modo de no recurrir nunca a razones fundadas en la generalidad del álgebra. Las razones de esta especie, aun cuando se las admite comúnmente, sobre todo en el paso de las series convergentes a las series divergentes y de las cantidades reales a las expresiones imaginarias, no pueden ser consideradas, me parece, sino como inducciones propias para hacer presentir a veces la verdad, pero que están en desacuerdo con la exactitud tan alabada de las ciencias matemáticas. Se debe aún observar que ellas tienden a hacer atribuir a las fórmulas algebraicas una extensión indefinida, mientras que, en realidad, casi todas esas fórmulas subsisten únicamente bajo ciertas condiciones y para ciertos valores de las cantidades que encierran. Determinando esas condiciones y esos valores y fijando de manera precisa el sentido de las notaciones que empleo, hago desaparecer toda incertidumbre; y entonces las diferentes fórmulas no presentan sino relaciones entre cantidades reales, relaciones que es siempre fácil verificar por la substitución de los números a las mismas cantidades. Es cierto que, para ser constantemente fiel a esos principios, me he visto forzado a admitir varias proposiciones que quizás parecerán algo duras de aceptar a primera vista. Por ejemplo, enuncio en el capítulo VI que* una serie divergente no tiene suma*; en el capítulo VII, que* una ecuación imaginaria es solamente la representación simbólica de dos ecuaciones entre cantidades reales*; en el capítulo IX, que,* si constantes a variables, después de haber sido supuestas reales se convierten en imaginarias, la notación con ayuda de la cual se expresaba la función, no puede ser conservada en el cálculo sino en virtud de nueva convención propia para fijar el sentido de esta notación en la última hipótesis, *etc. Pero los que leerán mi obra reconocerán, lo espero, que las proposiciones de esta naturaleza, al acarrear la feliz necesidad de exponer con mayor precisión las teorías y de aportar restricciones útiles a aserciones demasiado amplias, concurren a beneficiar el análisis y suministran varios temas de investigación que no dejan de tener importancia. Así, antes de efectuar la suma de ninguna serie, he debido examinar en qué casos las series pueden ser sumadas, o, en otros términos, cuáles son las condiciones de su convergencia; y, a este respecto, he establecido reglas generales que me parece merecen alguna atención."*

Cauchy quería decir, en suma, que debían subtituirse ideas al simple formulismo.

Después del *Análisis Algebraico* publicó Cauchy, en 1823, sus *Lecciones de Cálculo diferencial y de Cálculo integral*, y, en 1826, las lecciones sobre *Aplicaciones del Análisis Infinitesimal a la Geometría.* Fue sin duda en estas obras donde Cagigal adquirió sus conocimientos matemáticos. En la época en que Cagigal estaba en París, era esta ciudad el gran centro matemático del mundo y las más altas inteligencias matemáticas estaban allí reunidas. Uno de los más grandes matemáticos, el noruego Abel, llegó a París en julio de 1826, y partió en diciembre. No asistió a las lecciones de Cauchy y apenas tuvo ligero contacto con él. Pero, como auditores de Cauchy se veían los hombres más ilustres en las ciencias matemáticas, como Ampere, Sturm, Coriolis, Lamé y otros venidos del extranjero, como Lejeune-Dirichlet, de Berlín; José Mariano Vallejo, de Madrid; Ostrogradsky y Bouniakousky, de la Academia de San Petersburgo, sabios que eran ya ilustres por trabajos personales de gran valor y que la reputación de Cauchy había reunido alrededor de su cátedra.[2]

Tal era el ambiente matemático en aquellos años. Además de Cauchy intervinieron en la campaña de rigor Abel y Gauss. El primero era muy joven —murió antes de cumplir veintisiete años— y fue en realidad en 1839, diez años después de su muerte, cuando se conocieron sus trabajos. Gauss era entonces el gran solitario de Gotinga. Sus trabajos de Análisis eran poco conocidos en Francia, pero sí los de Teoría de Números, pues las *Disquisitionis Arithmeticae* habían sido traducida en 1807. Sin embargo, esta clase de estudios no interesaba sino a un número reducido de matemáticos, entre ellos principalmente a Legendre. Cagigal vivió pues en París, puede decirse, en el momento de transición entre el análisis antiguo y el moderno.

Vamos ahora a analizar los tres trabajos matemáticos que conocemos de Cagigal. La Memoria sobre el movimiento del péndulo consta de 52 páginas. Considera un punto material obligado a moverse sobre una curva dada de simple o de doble curvatura. Trata el problema según el método clásico, es decir, considera que la resistencia que opone la curva al movimiento del punto equivale a una fuerza que actuara sobre el móvil en dirección normal a la trayectoria. Así, se puede hacer abstración de la curva y considerar el punto material como libre en el espacio, añadiendo a las otras fuerzas dadas, una fuerza aceleratriz equivalente a la resistencia que opone la curva. Resistencia que es igual y directamente opuesta a la presión que experimenta la curva en cada uno de sus puntos. Considerando el punto material como libre y sometido simultáneamente a las fuerzas que actúan sobre él, se tendrán las tres ecuaciones del movimiento. Estas ecuaciones contienen siete incógnitas: las coordenadas del punto móvil, la resistencia de la curva y los ángulos que la dirección de ésta forma con los ejes coordenados. Para completar el número de ecuaciones necesarias para despejar las siete incógnitas, se añaden: la ecuación que expresa que la tangente en cada punto de la trayectoria es normal a la resistencia de la curva; la ecuación que liga los cuadrados de los cosenos de los ángulos de la resistencia con loa ejes y las dos ecuaciones

2. C. A. Valson, *La vie el les travaux du Baron Cauchy*, París, 1868, pág. 66.

de la curva dada. Se obtienen así siete ecuaciones para resolver el problema. Se llega de este modo a la llamada ecuación de las fuerzas vivas, la cual hace ver que el incremento del cuadrado de la velocidad, cuando se pasa de un punto a otro de la trayectoria, depende únicamente de las coordenadas; de estos puntos y de la función resultante de la integración, y es independiente de la naturaleza de la curva sobre la cual se mueve el punto material.

Considera el efecto de la fuerza centrífuga y luego el movimiento de un punto material sometido únicamente a la pesantez. Después se ocupa del péndulo en el vacío y en un medio resistente y del péndulo compuesto en el vacío.

La Memoria sobre el cálculo de variaciones es un cuaderno de veinte páginas. Establece una fórmula para resolver las cuestiones más importantes del cálculo de variaciones, es decir, las de máximo y de mínimo. Cuando las variables son únicamente las coordenadas x, y, z, estas cuestiones se resuelven como es sabido por el simple cálculo diferencial. Pero, cuando se hacen variar los parámetros que entran en la ecuación hay que servirse de los métodos del cálculo de variaciones. Cagigal se inspira en los trabajos de Euler. Estudia los casos en que puede simplificarse la ecuación general. Como aplicación, trata el problema de Bernoulli sobre la braquistócrona o curva del más veloz descenso, que es un arco de cicloide. Trata también el problema de encontrar entre todas las curvas isoperimétricas la que engendra girando en torno del eje de las x una superficie de revolución de área mínima.

El trabajo más extenso y más importante de Cagigal fue la *Memoria sobre las integrales limitadas*, o integrales definidas, como se dice hoy. En esta Memoria, impresa como se dijo en 1929, en 16° (23,5 cm. x 16 cm.), de 90 págs. Cagigal expone una teoría elemental de la integral de una función continua de una variable que conserva siempre un valor finito entre los límites de la integración. Luego demuestra varias proposiciones generales sobre descomposición de una integral definida en suma de otras varias y, en particular, el teorema llamado del valor medio. Después establece la ecuación de Laplace en la investigación de la atracción que ejerce un esferoide sobre un punto exterior. En el parágrafo siguiente estudia los valores de las integrales definidas que pueden deducirse del valor de la integral general. Considera el caso en que la función pasa por el infinito cuando la variable coincide con uno de los límites o cuando esto ocurre entre los límites de la integración.

Deduce después los valores de varias integrales definidas en las cuales no es posible hallar la integral general. Encuentra así varios resultados de Euler, de Laplace, de Legendre, etc., y emplea el método de formar ecuaciones diferenciales entre las integrales definidas y los parámetros que ellas encierran. En el parágrafo siguiente estudia las fórmulas generales que dio Cauchy, deducidas por este gran geómetra de la relación que existe entre las integrales definidas cuando se invierte el orden de las integraciones en el caso en que la función pasa por el infinito entre los límites de la integración. En este parágrafo y en los siguientes estudia varias fórmulas generales que conducen a un gran número de integrales muchas de ellas determinadas por Cauchy y otras ya encontradas por Laplace y Euler. La Memoria termina por la diferenciación bajo el signo integral y halla la fórmula de Poisson en la teoría del potencial en el caso de la atracción sobre un punto interior a la masa atrayente. Cagigal supone conocidos del lector todos los métodos elementales de integración y las integrales de las funciones elementales.

Cauchy había deducido de su estudio sobre las integrales entre límites imaginarios su famoso cálculo de los residuos. Este método, considerado como el más gran progreso del análisis matemático, después de su creación, no fue inmediatamente apreciado por los contemporáneos de Cauchy. Dice Cagigal al hallar la fórmula que da la diferencia entre las integrales cuando la función adquiere valor infinito entre límites: "El método de que nos hemos servido para obtener este valor es análogo, aunque algo más sencillo, al que empleado M. Cauchy en una memoria presentada al Instituto en 1814. No debemos pasar en silencio que este gran geómetra la reproduce en sus Ejercicios matemáticos deduciéndola del cálculo de los residuos; pero como este cálculo, no obstante los esfuerzos que ha hecho su autor para extender su uso, no ha merecido aceptación, hemos creído no deber emplear otras consideraciones que las que se derivan de las nociones del Cálculo infinitesimal. Bien sabemos cuán grande es la influencia de una notación feliz, no ya para originar ideas, porque el Análisis es sólo un instrumento que sólo devuelve las que se le confían, sino para facilitar sus combinaciones, abreviando considerablemente el discurso; y en verdad que no es de esta clase la propuesta por M. Cauchy, puesto que hasta ahora ninguna cuestión se ha resuelto por el cálculo de los residuos, que merezca el nombre de nueva, que exceda las fuerzas del cálculo ordinario. Aun pudiéramos decir que el cálculo de los residuos no es más que el cálculo diferencial enmascarado; que el signo que lo designa sólo sirve para ocultar las operaciones comunes de aquel cálculo, y que el valor precedente (de la diferencia de las integrales) es el que ha sugerido la idea de él; valor que M. Cauchy había obtenido mucho antes de que le viniese el deseo, laudable sin duda, de aparecer como inventor de una nueva rama del Análisis".

Como he dicho en el prefacio de la Memoria de Cagigal debe leerse con indulgencia este juicio de nuestro matemático sobre uno de los más grandes descubrimientos del Análisis. Cauchy se adelantó tanto a su época que fue mucho después cuando los matemáticos se dieron cuenta de sus geniales concepciones. Cagigal escribía hace más de un siglo, en la época de transición, repito, entre el análisis antiguo y el moderno, que fue creación sobre todo de Cauchy y de Abel. Tampoco puede subscribirse a la opinión de Cagigal cuando expresa que en una fórmula sólo existe lo que en ella se ha introducido. Sería ésta una concepción muy restringida del lenguaje matemático. Una fórmula matemática es la condensación simbólica simple de una serie de razonamientos, a veces muy complicados, y el poder del Análisis viene de la facilidad de manejar las ideas, por decirlo así, mediante la simple transformación o combinación de sus símbolos y, precisamente, estas transformaciones pueden sugerir generalizaciones que cambien completamente el primitivo concepto y extiendan considerablemente la idea que sirvió de punto de partida. Efectivamente, nociones idénticas en el fondo pueden presentarse bajo formas muy diferentes y a veces la forma es esencial, como dice el célebre matemático Emile Picard cuando recuerda el ejemplo de la Mecánica celeste en la que se llega a explicar, mediante innumerables transformaciones de cálculo, casi todas las particularidades de los movimientos de los astros, partiendo únicamente de la fórmula de la gravitación universal y de constantes que se han determinado experimentalmente.

El análisis de la Memoria sobre las integrales limitadas hace ver —a pesar de la divergencia en lo que respecta al cálculo de los residuos— que Cagigal seguía los métodos de Cauchy. ¿Fue Cagigal alumno de Cauchy inscrito en su curso, o asistía a él sólo como oyente? Es muy probable que fuera como oyente, ya que para la misma época Vallejo, maestro y amigo de Cagigal, a quien llevaba 24 años, asistía a las lecciones del gran matemático como auditor. Vallejo había ofrecido a Cagigal cátedras de Matemáticas en la Universidad de Alcalá de Henares en 1828, lo que prueba que para esa fecha lo consideraba suficientemente preparado. Esto hace más verosímil pensar que Cagigal hubiera escuchado las lecciones de Cauchy por recomendación de su antiguo maestro Vallejo.

Podemos concluir del estudio de los tres trabajos de Cagigal que él conocía el Análisis matemático de su época. Como en toda época de transición, era difícil asimilar inmediatamente todas las reformas introducidas por el genio de Cauchy. Fueron los matemáticos de las siguientes generaciones quienes pudieron sacar todo el partido posible de los nuevos métodos.

Pero Cagigal tendrá siempre el mérito de haber fundado los estudios matemáticos y de haber enseñado los conocimientos de aquel tiempo en Venezuela, en vez de haber aceptado la proposición de Vallejo de quedarse en España, en una Universidad célebre y donde el ambiente científico era muy superior al que existía en la Venezuela de 1830. Merece el reconocimiento de la Patria.