http://dx.doi.org/10.5007/1982-5153.2016v9n2p249

Levantando Aspectos, Formulando Pressupostos e Matematizando em Modelagem Matemática

(Raising Aspects, Formulating Assumptions and Mathematizing in Mathematical Modeling)

CÁSSIO VIDIGAL[1] e DALE BEAN[2]

[1] Instituto Federal de Minas Gerais – Campus Ouro Preto (cassio.vidigal@ifmg.edu.br)
[2] Universidade Federal de Ouro Preto (dale@iceb.ufop.br)

Resumo. Este artigo apresenta uma atividade de modelagem matemática intitulada "a questão da conta de água" realizada com uma turma do curso de Licenciatura em Geografia do Instituto Federal de Minas Gerais – *Campus* Ouro Preto. A atividade teve como objetivo conduzir os estudantes para o desenvolvimento de uma compreensão dos significados de aspectos, pressupostos e matematização em relação à modelagem matemática, entendidos como elementos nem sempre explícitos para os estudantes na construção de modelos, embora comumente implícitos na atividade. A análise mostra que os estudantes modeladores tenderam a enunciar pressupostos em linguagem matemática e a elaborar conceituações e procedimentos de modelagem embasados em pensamento aritmético. Por isso, ao considerar uma modelagem em que os estudantes explicitem seus juízos sobre aspectos a considerar, formulem pressupostos e matematizem, uma interferência pelo professor pode ser importante para que eles atribuam significados a essas três ações, assim como para utilizar álgebra para generalizar elaborações aritméticas.

Abstract. This paper presents a mathematical modeling activity entitled "the issue of the water bill" conducted with an undergraduate class of future Geography teachers at the Instituto Federal de Minas Gerais – Campus Ouro Preto. The activity had as objective the guidance of the students toward the development of a comprehension of the significance of aspect, assumption and mathematization as related to mathematical modeling, understood as elements not always explicit for students in the construction of models, although commonly implicit in the activity. The analysis shows that student modelers tended to state assumptions in mathematical language and to conceptualize and realize modeling procedures based on arithmetic thinking. Thus, when considering modeling in which students make explicit their judgments on aspects to consider, formulate assumptions and mathematize, interference by the teacher may be important for them to assign meanings to these three actions, as well as to use algebra to generalize arithmetic elaborations.

Palavras chave: modelagem matemática, aspectos, pressupostos, matematização
Keywords: mathematical modeling, aspects, assumptions, mathematization

Introdução

O artigo apresenta uma análise de elementos de uma atividade de modelagem intitulada "a questão da conta de água" realizada como parte integrante de uma pesquisa (VIDIGAL, 2013) sobre modelagem no contexto da disciplina de Matemática do curso de Licenciatura em Geografia do Instituto Federal de Minas Gerais – *Campus* Ouro Preto, ministrada pelo primeiro autor.

A proposta da pesquisa, como um todo, consistiu em utilizar a modelagem matemática sob a concepção de premissas e pressupostos (BEAN, 2007; 2009; 2012a; 2012b) em consonância com a Geografia Crítica (LACOSTE, 1988; MORAES, 2007; CRAMPTON; KRYGIER, 2008) para que os estudantes pudessem construir mapas, entendidos como modelos, que permitiram o desenvolvimento de uma compreensão de problemas ou situações de incômodo vivenciadas pelos próprios estudantes no *campus* onde estudam.

Na atividade de construir mapas, foi previsto que os estudantes teriam que considerar características do *campus* que julgassem relevantes às problemáticas abordadas, além de interpretá-las e qualificá-las em forma de pressupostos que, por sua vez, remeteriam aos objetivos subjacentes às construções dos mapas específicos. Como o levantamento de aspectos e a formulação de pressupostos não era uma prática usual dos estudantes, antes da construção dos mapas foram realizadas cinco atividades de modelagem sobre uma variedade de situações problemáticas para realçar o papel de pressupostos na construção de modelos. Essas atividades visaram preparar os estudantes para atribuir significados aos conceitos de aspecto e pressuposto utilizados implícita e explicitamente como ferramentas na construção dos mapas, bem como para a matematização.

O presente artigo examina uma dessas cinco atividades preliminares, "a questão da conta de água", com ênfase na conscientização dos estudantes para o levantamento de aspectos, formulação de pressupostos e matematização envolvidos na modelagem matemática. Das cinco atividades, esta foi escolhida por fornecer uma maior variedade de aspectos considerados e pressupostos formulados entre os grupos de estudantes, ou seja, uma variedade maior de modelagens. Para contextualizar a atividade, na segunda seção do artigo, será abordada a concepção de modelagem assumida, vista no âmbito de Educação Matemática como a construção de modelos similar às construções feitas por matemáticos que aplicam a matemática em uma variedade de situações e contextos. Para modelagem na Educação Matemática foram utilizados os conceitos aspecto, pressuposto e matematização de maneira coerente ao seu entendimento na Matemática Aplicada; embora em graus de complexidade diferenciados devido às experiências específicas dos modeladores de cada área. Na terceira seção será detalhado o que se entende por aspecto, pressuposto e matematização no contexto da literatura na Educação Matemática. Na quarta seção será apresentado o cenário da atividade "a questão da conta de água" para as modelagens realizadas pelos estudantes e os métodos e procedimentos utilizados para seu planejamento, realização e análise. Na sequência, na quinta seção, será relatada e discutida a construção de modelos realizada por dois grupos participantes, destacando a análise dos modelos em termos de aspectos, pressupostos e matematização. Na última seção, as considerações finais, será feito um balanço da análise da atividade.

Modelagem entendida como a construção de modelos

Vários são os estudiosos (BLUM; NISS, 1991; BASSANEZI, 2002; BEAN, 2007; 2012a; CIFUENTES; NEGRELLI, 2012) que entendem modelagem como a construção de modelos; ou seja, um entendimento próximo ao dos matemáticos que trabalham com aplicações da matemática em situações concebidas em quadros conceituais que não sejam matemáticos.

Blum e Niss (1991) entendem que a modelagem matemática ou a construção de modelos significa todo o processo desde o problema inicial até a chegada ao modelo matemático. Na ótica desses autores, ao fazer a modelagem matemática, os modeladores partem de uma situação problema para conceituar para, e em seguida, matematizá-la. Bassanezi (2002) concorda com Blum e Niss (1991), enfatizando que a situação é problematizada em termos de linguagens e conceitos da área na qual está sendo abordada, por exemplo, biologia, física, etc.

Cifuentes e Negrelli (2012, p. 25) se apoiando em Bassanezi (2002) analisam essa dinâmica enfatizando a passagem da situação inicial para a “construção de um recorte, que é um ato de interpretação, promovido por meio da elaboração de hipóteses que realizam simplificação na situação inicial”. A partir dessa construção interpretativa, chamada pseudo-realidade pelos autores, um modelo matemático é elaborado. Bean (2012a) corrobora com estes autores ao entender que a modelagem começa com uma situação problemática que é interpretada por meio de uma ou de várias linguagens e quadros conceituais de comunidades distintas. Acentua que os interesses e objetivos dos modeladores estão embutidos nos modelos, ou seja, as conceituações ou interpretações remetem tanto às linguagens, conceitos e tecnologias quanto aos interesses e *backgrounds* socioculturais dos modeladores que fazem parte da problemática.

A concepção de modelagem assumida (BEAN, 2007, 2012a) para a pesquisa (VIDIGAL, 2013) caracteriza-se como uma atividade de construir modelos por meio da adoção de premissas e a formulação de pressupostos. Como as premissas não são destaque neste artigo é suficiente descrevê-las como sendo ideias-guia, princípios ou teorias que embasam a maneira global que uma situação é concebida. Ou seja, as premissas de modo geral, determinam como o modelador compreende uma situação, e assim, influenciam no levantamento dos aspectos a serem considerados e em como estes aspectos são qualificados (pressupostos).

Aspectos, pressupostos e matematização

Na nomenclatura da Matemática Aplicada, aspectos são comumente chamados de variáveis. Neste trabalho o termo aspecto é utilizado por ser considerado um termo mais genérico, e assim adequado tanto para descrever modelagens que utilizam a linguagem matemática quanto modelagens que não empregam conceituações matemáticas. Por sua vez, um pressuposto é a maneira que um aspecto ou relações entre aspectos são qualificados. Por matematização entende-se "organizar de uma perspectiva matemática" (GRAVEMEIJER; DOORMAN, 1999, p. 116, tradução nossa)[1], utilizar a linguagem matemática para conceituar situações sob consideração.

Para ilustrar o uso dos conceitos aspecto, pressuposto e matematização em uma modelagem, toma-se como exemplo o estudo de Melillo (2011) que considera a construção de um modelo que atribui probabilidades aos resultados de jogos de futebol a serem realizados. Nesse caso, ao objetivar o cálculo de uma probabilidade do resultado de um jogo, o aspecto *local do jogo* pode ser considerado entre vários outros aspectos possíveis de entrar na determinação da probabilidade. Um pressuposto possível referente a esse aspecto seria *o time que joga nos seus próprios domínios possui uma vantagem para ganhar o jogo*, qualificando assim como o local do jogo interfere no resultado. Em seguida, a matematização desse pressuposto pode ser feita de várias maneiras e de acordo com uma variedade de critérios. Por exemplo, podem ser atribuídas as seguintes probabilidades ao time que joga em seu domínio: 0,50 para vitória; 0,30 para empate; e 0,20 para derrota. Ainda podem ser incorporados outros aspectos na modelagem, por exemplo, posição do time na tabela de classificação, cartões vermelhos e desenvolvimento econômico da cidade sede do time (MELILLO, 2011). Consequentemente outros pressupostos podem ser formulados e inter-relacioná-los na construção do modelo.

Os pressupostos formulados na construção de um modelo são afirmações que envolvem detalhes de uma dada situação no contexto da problemática, incluindo os objetivos dos modeladores. Galbraith e Stillman (2001) identificaram três momentos da modelagem nos quais os pressupostos emergem: 1) associados com a *formulação do problema*, ou seja, na conceituação da situação problemática na linguagem de uma ou

---

[1] Do original: *organizing from a mathematical perspective*. Gravemeijer e Doorman são entre estudiosos que atuarem em Educação Matemática Realística (*Realistic Mathematics Education – RME*) em que *matematização* é um conceito chave. Reconhecemos os significados deste conceito dentro da Educação Matemática Realística possuem subsídios para compreender matematização para a modelagem matemática. Ver, por exemplo, Silva e Almeida (2014).

várias comunidades. De acordo com os autores, se os modeladores objetivarem a construção de um modelo matemático, pressupostos são formulados de forma a admitir conceituações matemáticas; 2) associados com o *processamento matemático*, ou seja são essencialmente voltados para as técnicas e procedimentos matemáticos utilizados no desenvolvimento do modelo; e 3) associados com *escolhas estratégicas no processo de solução*. Por exemplo, na matematização, resultados intermediários podem levar a uma conceituação dificilmente matematizável. Assim, uma reavaliação dos pressupostos e conceituações iniciais deve ser considerada, bem como uma reformulação de alguns destes pressupostos.

É importante ressaltar que a formulação de pressupostos não é uma questão de veracidade na modelagem (BEAN, 2007; 2012a; CIFUENTES; NEGRELLI, 2011; GRIGORAŞ, 2012); podendo ser formulados até de forma contraditória. Essa diversidade ou incongruência na formulação de pressupostos pode ser atribuída a entendimentos diferentes em relação aos aspectos da situação, gerando assim, formas diferentes de qualifica-los. Às vezes, pressupostos são formulados por conveniência com intuito obter uma saída matemática já prevendo um possível modelo matemático (GALBRAITH; STILLMAN, 2001; NISS, 2013).

A matematização, por sua vez, é uma conceituação ou estruturação matemática de uma situação considerada. Pode tratar aspectos particulares da situação como ilustrado no pressuposto do caso das probabilidades ao aferir que *o time que joga nos seus próprios domínios possui uma vantagem para ganhar o jogo*. Pode também ser de forma global ou integrada.

Em se tratando da estruturação matemática globalizada, Silva e Almeida (2014) e Freitas (2013) abordam situações em que há uma interpretação global do comportamento de um conjunto de dados numéricos. Esses dados, que comumente referem-se ao comportamento de fenômenos em relação ao tempo, são representados em forma de um gráfico de dispersão. Na sequência, o gráfico é interpretado com intuito de estabelecer uma associação com uma função conhecida que possa ser ajustada aos dados no contexto das situações em questão.

Pode ser argumentado que a matematização já começou quando aspectos da situação foram concebidos em termos numéricos, como no caso em que dados são representados como pontos de um gráfico de dispersão. Ao fazer um ajuste de uma curva conhecida aos dados, obtém-se um retrato algébrico global do comportamento destes. Nestes casos, geralmente é afirmado que a tendência dos dados retratada pela curva pode servir para fazer previsões que até podem extrapolá-los. As decisões a respeito de quais dados serão trabalhados e quais técnicas empregar no desenvolvimento de uma curva de ajuste influenciam no seu comportamento, e assim, nas interpretações e inferências a respeito da situação.

Bean (2012a) ilustra uma matematização integrada com a lógica de concepções dos quadros conceituais da Física ao descrever uma elaboração do modelo galileano para a queda livre. Neste caso, os pressupostos sobre aspectos concebidos em termos físicos são formulados para admitir um tratamento matemático da situação. Galileu relacionou as grandezas de velocidade e tempo da queda em termos de proporcionalidade: a velocidade de um corpo em queda livre é proporcional ao tempo da queda (ou, equivalentemente a aceleração do objeto em queda é constante). Se foi suposto que a força devido à gravidade é constante (contrariando o entendimento que a força varia de acordo com a altura do objeto acima da Terra) e que não existe resistência do ar para o objeto em queda, a proporcionalidade é coerente com a situação. Pode ser argumentado que a proporcionalidade foi empregada por conveniência, pois Galileu (1988, p. 160, ênfase do autor) refletiu, “Quando, portanto, observo uma pedra que cai de uma certa altura a partir de repouso e que adquire pouco a pouco novos acréscimos de velocidade, por que não posso acreditar que tais acréscimos de velocidade não ocorrem segundo a proporção mais simples e mais obvia?” – ou seja, diretamente proporcional.

Ao considerar a literatura, a organização de uma situação por meio de matemática pode acontecer de várias maneiras. Apontamos três tipos de matematização: 1) ao formular pressupostos em isolamento, matematizando cada um. Aspectos são tomados independentemente e podem ser incluídos ou excluídos dos modelos de acordo com os entendimentos dos modeladores; 2) a consideração de um conjunto de dados para em seguida ajustar uma função conhecida a esses dados. Nesse caso as características e propriedades da função possuem interpretações que são, de uma maneira global, consideradas relevantes à situação em questão; e 3) um inter-relacionamento conceitual dos quadros conceituais de uma ou mais comunidades com aqueles da matemática em que a lógica da interdependência de ideias constrói uma compreensão da situação como é o caso do modelo galileano para a queda livre.

Como mencionado anteriormente, entende-se que a matematização é a organização de uma situação por meio de matemática (GRAVEMEIJER; DOORMAN, 1999) e que pela concepção de modelagem assumida, a matematização, em si, não significa a modelagem, que é uma construção conceitual por meio da adoção de premissas e a formulação de pressupostos.

Em se tratando da "questão da conta de água" a ser apresentada, os estudantes formularam pressupostos para a construção de seus modelos; sendo ao mesmo tempo propícia para a matematização uma vez que necessariamente há divisão da conta entre os condôminos.

"A questão da conta de água": O cenário, métodos e procedimentos

Para o desenvolvimento da atividade "a questão da conta de água" a turma de 35 alunos foi dividida em grupos de quatro a seis componentes. Foram distribuídas folhas com o enunciado da atividade e as informações da folha foram lidas pelo professor em conjunto com os alunos. Explicações foram dadas à medida que as dúvidas surgiam, para que a atividade pudesse ser realizada a contento pelos estudantes com foco nos objetivos.

A situação fictícia[2] proposta envolvia um prédio de 12 apartamentos e as especificidades de cada um deles (a quantidade de moradores e alguns dos seus costumes além de fato de dois apartamentos possuírem quintal) foram apresentadas para os estudantes. Além disso, foi informado que o condomínio não possuía um medidor de água para cada apartamento. Desta forma, a companhia de abastecimento de água do município envia uma conta única que habitualmente era dividida pelo síndico em parcelas iguais para cada dono de cada apartamento.

No quadro 1 estão as características de cada apartamento no que diz respeito ao quintal, à quantidade de moradores e alguns costumes. Este quadro é o mesmo que foi apresentado aos estudantes na folha que foi entregue em sala.

[2] Esta atividade foi desenvolvida tomando como base uma experiência do primeiro autor e professor da turma que, por algum tempo, manteve sozinho, um apartamento numa cidade diferente daquela que residia e era obrigado a pagar, pela conta de água, um valor igual ao dos demais condôminos.

Quadro 1 – Especificidades dos apartamentos como foi apresentado aos estudantes.

No apartamento 1, mora um casal e seus dois filhos pequenos. A situação se repete nos apartamentos 6, 11 e 12. No apartamento 2 moram oito pessoas entre pais, filhos e netos (4 adultos e 4 crianças). No apartamento 3 residem três amigos. No apartamento 4 mora uma família de cinco pessoas (3 adultos e 2 crianças). No apartamento 5 mora uma única pessoa que passa apenas os fins de semana. No apartamento 7, mora um casal. No apartamento 8, dois irmãos que ficam ali apenas de segunda a sexta-feira, pois passam os fins de semana na casa dos pais, em outra cidade. No apartamento 9, mora, sozinho, um padre. E no apartamento 10 residem sete estudantes universitários. Os apartamentos do primeiro andar (aptos 1 e 2) ainda possuem um quintal cada um.

Fonte: Elaboração do professor.

A figura 1 a seguir é um infográfico que possibilita descrever o prédio visualmente (exceto pela diferença de quintais dos apartamentos do primeiro andar). Esta figura também constava da folha com o enunciado que foi entregue aos alunos.

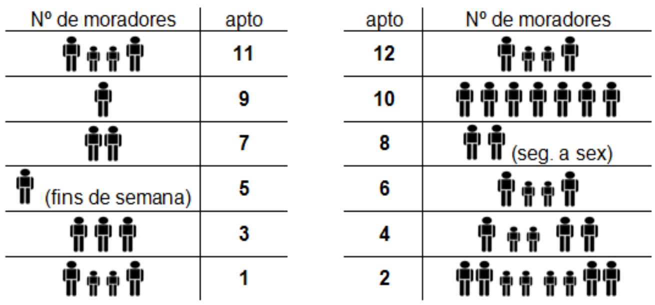

Figura 1 – Apresentação gráfica do prédio

Fonte: Elaboração do professor.

Nesse cenário foi relatada uma questão levantada em assembleia dos condôminos. Os moradores do apartamento 8 questionaram a prática da divisão da conta de água do condomínio em parcelas iguais para cada apartamento. Perguntaram se era justo eles pagarem pela água o mesmo que o apartamento 2, onde moram 8 pessoas. Alegaram inclusive que o maior prejudicado era o morador único do apartamento 5. Lembraram também que os apartamentos do primeiro andar (aptos. 1 e 2) tinham quintal e isto aumentava o consumo. Sugeriram, então, que houvesse um mediador de consumo por apartamento, mas foi constatado que a obra era inviável. Na continuidade do cenário, o síndico se dispôs a criar uma regra para dividir a conta de água de forma que fosse justa para todos.

A partir desse momento, os estudantes foram convidados a participar do cenário para auxiliar o síndico. Na folha que estava com os alunos aparecia o desafio: Proponha um modelo de divisão da conta de água entre os 12 apartamentos, que você julgue justo, apontando justificativa para cada ponto da solução apresentada. Também foi informado aos alunos que eles poderiam extrapolar as informações que constavam no cenário apresentado, porém sempre com o cuidado em lidar com dados que fossem pelo menos hipoteticamente possíveis de obter.

Um entendimento comum foi que o custo pelo consumo de água deve ser pago. A premissa para as modelagens, embora não discutida em aula, pode ser posta na seguinte maneira: aqueles que usufruírem de um serviço de fornecimento de uma necessidade básica devem recompensar o fornecedor do serviço.

Para auxiliar a compreensão dos estudantes a respeito da tarefa proposta, o professor apresentou três exemplos de como a divisão da conta poderia ser feita. No primeiro exemplo foi considerada a idade do morador como o único aspecto na modelagem. O pressuposto formulado foi que o consumo de água é maior quanto maior for a idade de uma pessoa. Essa matematização em termos da comparação de grandezas foi refinada afirmando que o consumo era diretamente proporcional à idade. Embora esse pressuposto e sua matematização em termos de proporcionalidade sejam dificilmente justificáveis, serviram para esclarecer a modelagem solicitada: o levantamento de aspectos, a formulação de pressupostos e a matematização. No segundo exemplo, o aspecto considerado foi a área de cada apartamento. Considerou-se que quanto maior a área, maior deve ser o consumo de água. Como no primeiro exemplo, este também foi matematizado em termos de proporcionalidade (consumo de água proporcional à área do apartamento). Por fim, no terceiro exemplo, com intuito de ilustrar a incorporação de mais de um pressuposto no modelo, foi elaborado um único modelo a partir dos dois pressupostos dos exemplos anteriores.

Depois da apresentação dos exemplos, os estudantes começaram discussões internas nos grupos a respeito das modelagens. Como forma de apoio, os grupos também receberam uma folha com os exemplos apresentados pelo professor para auxiliar no estabelecimento de relações entre aspecto, pressuposto e matematização. Enquanto os membros dos grupos discutiram quais aspectos considerar e como os considerar, o professor percorreu a sala fornecendo esclarecimentos a respeito de dúvidas e ajudando a matematizar os pressupostos considerados toda vez que os alunos sentiam dificuldades nessa tarefa.

Durante cerca de 60 minutos os alunos trabalharam no desenvolvimento de seus modelos; passado esse tempo foram convidados a socializar as soluções desenvolvidas e a debater entre si a respeito da adequação dos modelos ao problema. Os alunos socializaram "soluções" construídas apresentando a) os aspectos considerados; b) os pressupostos formulados; c) a matematização dos pressupostos; d) justificativas para: a inclusão dos aspectos, a maneira como foram qualificados (pressupostos) e o modo como foram matematizados e; e) o modelo elaborado, indicando como os vários pressupostos foram incorporados no modelo. Cabe ressaltar que um dos objetivos da atividade era desenvolver capacidade de argumentação frente a situações que exigem apresentação de modelos à crítica.

Os dados para a pesquisa foram recolhidos durante a realização das atividades por meio de notas de campo, das folhas das atividades realizadas pelos estudantes e de gravações em áudio e vídeo do desenvolvimento das atividades e das discussões. Foram utilizados métodos da análise de conteúdo (CHARMAZ, 2009) para a codificação de dados e categorias tanto *a priori* quanto *a posteriori*, que foram por sua vez elaboradas para desenvolver uma compreensão a respeito das modelagens feitas pelos estudantes em relação aos objetivos da pesquisa e à concepção de modelagem assumida.

Na próxima seção serão apresentadas as modelagens de dois dos seis grupos da turma para "a questão da conta de água" à luz de categorias de análise da pesquisa.

Modelos da atividade "a questão da conta de água"

Em termos gerais, alguns grupos conseguiram chegar a um modelo matemático com certa facilidade enquanto outros tiveram mais dificuldades. Alguns grupos utilizaram somente as informações fornecidas no enunciado da atividade; enquanto outros, seguindo a sugestão a respeito da possibilidade de se acrescentar aspectos sobre o apartamento, extrapolaram as informações apresentadas no enunciado da atividade. Por exemplo, houve um caso em que o gênero dos moradores foi levado em consideração, pressupondo que homens e mulheres consomem quantidades diferentes de água. Em todos os casos foi possível identificar além dos aspectos, pressupostos e matematização realizados na modelagem, explicitar as justificativas para inclusão ou não de aspectos nas discussões dentro dos grupos e no momento de socialização dos modelos na turma.

A seguir os modelos de dois dos grupos[3] que apresentaram características relacionadas a três das categorias de análise *a priori* da pesquisa de campo: aspectos, pressupostos e matematização. Entre os modelos dos seis grupos, esses dois foram escolhidos por serem representativos da construção de modelos a partir de aspectos e pressupostos diferentes que leva a modelos distintos.

O primeiro grupo era formado por cinco estudantes. Um membro do grupo, Arthur, ao apresentar os trabalhos da sua equipe disse, "A gente considerou o total de pessoas no prédio e os apartamentos com quintal a gente considerou como mais uma pessoa o quintal [...]". Isto é, em sua fala, Arthur clarificou os dois aspectos que eles consideram: morador e quintal.

Os membros do grupo demonstraram compreensão do conceito de aspecto. É relevante notar que durante o desenvolvimento desta atividade os conceitos aspecto e pressuposto foram assumindo significados ao exemplo do estudante que entendeu que um aspecto é o *que* considerar, enquanto o pressuposto é *como* considerá-lo. Ao considerar o aspecto morador, o grupo pressupôs implicitamente que o consumo de água em um apartamento depende do número de moradores, independentemente de ser adulto ou criança.

No excerto da fala do Arthur não fica claro como a quantidade de moradores e o consumo de água se relacionam, mas isto transparece na matematização. Para o grupo, o consumo de água é diretamente proporcional à quantidade de moradores.

Também no excerto foi formulado um pressuposto que considerou um quintal como uma pessoa. Essa conceituação do quintal como uma pessoa enquanto consumo de água é coerente com a ideia que o pressuposto trata-se de *como* considerar um aspecto (quintal) levantado no contexto da situação. Para a construção de um modelo, os dois aspectos – morador e quintal – devem ser relacionados de alguma forma. Neste sentido, o grupo conceituou um quintal *como* uma pessoa no que diz respeito ao consumo de água, ou seja, os dois aspectos foram relacionados de forma a serem reduzidos a um só.

A fim de explicar/entender o modelo, o grupo atribuiu um valor arbitrário à conta do condomínio. Desta forma, poderiam efetuar operações aritméticas e assim determinar o valor a ser pago por cada apartamento. Os estudantes arbitraram o valor de R$1.800,00 como sendo o da conta de água referente a um mês. Além disso, somaram o

[3] Os nomes citados nos excertos a seguir são pseudônimos adotados para se referir aos estudantes. As citações das falas de alunos são transcrições de áudio da atividade (VIDIGAL, 2013).

número de moradores do condomínio, acrescentando dois (os dois quintais dos apartamentos térreos). A tabela 1 a seguir, adaptada do trabalho do grupo, mostra a quantidade de moradores em cada apartamento, os quintais e, ao final, a soma dessas quantidades. Este valor foi utilizado na continuidade da elaboração do caso particular que propuseram.

Tabela 1 – Total de moradores mais os quintais.

Apto.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Quintais	Total
Quant. de moradores	4	8	3	5	1	4	2	2	1	7	4	4	2	47

Fonte: Adaptado do trabalho dos alunos

Depois de somados o número de moradores e quintais no condomínio, os alunos dividiram a conta total por esta soma (1.800 / 47 ≈ 38,29). O valor de R$38,29 equivale ao que deve ser pago por cada morador (e também por cada um dos dois quintais). Multiplicado pelo número de moradores em cada apartamento, considerando um morador a mais nos apartamentos do primeiro andar, é possível determinar a quantia devida relativa a cada unidade habitacional. Na tabela 2, também adaptada do trabalho dos alunos, estão apresentados a quantidade de moradores por residência e o valor da conta de água a ser paga referente a cada apartamento.

Tabela 2 – Valor devido por cada apartamento

Apto.	Moradores	Valor da conta	Observações
1	5*	R$ 191,45	* 4 moradores mais o quintal
2	9*	R$ 344,61	* 8 moradores mais o quintal
3	3	R$ 114,87	
4	5	R$ 191,45	
5	1	R$ 38,29	
6	4	R$ 153,16	
7	2	R$ 76,58	
8	2	R$ 76,58	
9	1	R$ 38,29	
10	7	R$ 268,03	
11	4	R$ 153,16	
12	4	R$ 153,16	
		≈ R$ 1.800,00	

Fonte: Adaptado do trabalho dos alunos.

O modelo apresentado atendeu à expectativa dos membros do grupo e quando socializado entre os colegas foi considerado factível e aceitável.

Foi notado que nesse grupo, como também na maioria dos outros, a passagem dos pressupostos para uma conceituação matemática passou por um caso particular de uma conta de água expressa como um valor numérico (R$1.800,00 foi o valor atribuído pelo primeiro grupo). Esta estratégia permitiu aos estudantes trabalhar com valores numéricos e operações aritméticas.

Considerando os mesmos aspectos levantados e os pressupostos já formulados, o grupo partiu, por sugestão do professor, para uma matematização algébrica. Com auxílio do professor, os alunos substituíram o número de moradores do apartamento 1 por M_{A1}, o número de moradores do apartamento 2 por M_{A2}, e assim até o 12º apartamento. Em seguida, foi desenvolvida uma expressão algébrica que facilitou o entendimento em termos de como representar todos os moradores. Na expressão, a variável M representa o número total de moradores já considerando os quintais como moradores dos apartamentos 1 e 2:

$$M = M_{A1} + M_{A2} + M_{A3} + \ldots + M_{A12}$$

Também foi sugerido que o valor da conta (que arbitraram R$1.800,00) fosse substituído por V_c. Em seguida, calcularam o que chamaram de V_{cp} (valor por cabeça, uma expressão utilizada por um estudante do grupo):

$$V_{cp} = V_c / M$$

Por fim, o valor a ser pago por cada apartamento (T_{apto}) foi expresso:

$$T_{apto} = V_{cp} \cdot M_{apto}$$

sendo M_{apto} o número de moradores de cada apartamento utilizado para cálculo do número total de moradores do condomínio.

Em resumo, a partir da premissa “pagar pelo serviço de fornecimento” de água, os estudantes desenvolveram um modelo para que a conta fosse rateada entre os condôminos; levantaram os aspectos a considerar; qualificaram esses aspectos (pressupostos) e matematizaram os pressupostos. Contando com ajuda instrumental do professor, chegaram ao modelo em linguagem algébrica. A atividade ainda proporcionou momentos de discussão onde os alunos tiveram que argumentar a fim de defender suas posições. Esses momentos aconteceram tanto durante os trabalhos de desenvolvimento do modelo quanto durante a socialização com colegas da turma.

O segundo grupo era formado por quatro alunos que consideraram os aspectos: moradores em cada apartamento e o tempo de permanência no apartamento. Na apresentação da modelagem a aluna Bruna falou pelo grupo:

> A gente considerou cada pessoa como uma pessoa mesmo, criança ou adulto, homem ou mulher, não consideramos também que os apartamentos 1 e 2 têm a área... tudo isso... consideramos o seguinte: que o total da conta seria ... o total da conta deveria ser dividido pelo número de habitantes de todos os apartamentos por permanência no mês.

Podemos notar nesse excerto que a aluna comentou aspectos como faixa etária dos moradores (criança ou adulto), gênero (homem ou mulher), tamanho do apartamento, quantidade de moradores e tempo de permanência no imóvel; aspectos estes já apresentados anteriormente por outros grupos. No entanto, ela destacou que apenas dois aspectos foram utilizados durante o processo de modelagem realizado pelo grupo: quantidade de moradores e tempo de permanência no imóvel. Embora os modeladores possam considerar diversos aspectos, para facilitar a matematização do problema, eles trabalham comumente com um número reduzido desses aspectos, principalmente com aqueles que eles consideram de maior relevância para atender ao propósito.

Essa pesquisa evidencia que um modelo para a divisão da conta de água pode ser feito de várias maneiras em termos dos aspectos utilizados, haja vista o tratamento diferenciado dado ao quintal pelos dois grupos. Se o primeiro grupo incorporou o quintal no modelo, com o pressuposto que os apartamentos com quintais utilizam uma quantidade de água maior, e ainda mais, que essa quantidade equivale à quantidade utilizada por uma pessoa; o segundo grupo pressupôs que considerar o quintal era insignificante em relação à divisão da conta de água do condomínio. E mais, esse grupo considerou significativo o tempo de permanência de cada morador no apartamento.

Em relação ao aspecto de “permanência no apartamento” o grupo formulou o pressuposto que maior tempo de permanência implica maior consumo de água. Esse pressuposto, que foi matematizado em termos de comparação de grandezas, teve sua matematização refinada em termos de proporcionalidade. O grupo assinalou que o valor a ser pago deve ser proporcional ao tempo de permanência de cada morador no apartamento.

No início da matematização, este grupo montou uma tabela para representar uma semana de consumo onde consideraram, para efeito de facilitação do entendimento por parte dos membros do grupo e dos demais colegas, que cada pessoa consome por dia 20 litros de água. Este valor poderia ser qualquer número e os 20 litros serviram apenas para que o grupo pudesse desenvolver e explicar o seu modelo e justificar a qualificação do aspecto tempo de permanência. Por exemplo, no apartamento 6 são quatro moradores que permanecem todos os dias da semana. Neste caso multiplica-se o número de pessoas no apartamento (4) pelos dias de permanência de cada pessoa (7), vezes 20 litros de água por dia por pessoa. Assim, são consumidos 560 litros de água por semana no apartamento 6. Já no apartamento 8 são dois moradores que ficam ali de segunda a sexta-feira. Então são 2 pessoas vezes 5 dias (por semana) vezes 20 litros de água por dia por pessoa. Assim, neste apartamento são consumidos 200 litros de água por semana.

Depois da explicação com o exemplo numérico e entendimento dos colegas, o grupo partiu para a apresentação de uma matematização, desenvolvida com auxílio do professor. Embora que os alunos primeiramente utilizaram o período de uma semana, passavam, em seguida, considerar dias por mês. Para elaborar o modelo, os alunos construíram uma tabela semelhante a tabela 3.

Tabela 3 – Produto da quantidade de moradores pelo número de dias que permanecem no apartamento.

Apto.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Quantidade de moradores	4	8	3	5	1	4	2	2	1	7	4	4
Permanência dos moradores (em dias por mês)	30	30	30	30	8	30	30	20	30	30	30	30
Número de pessoas multiplicado pela permanência no mês	120	240	90	150	8	120	60	40	30	210	120	120

Fonte: Adaptada do trabalho do grupo.

O passo seguinte foi somar os dados da última linha (120 + 240 + 90 + . . . + 120), obtendo 1308. Os alunos chamaram isto de “soma dos dias que cada um permanece”. A partir desta soma (1308) e de cada valor da terceira linha, os alunos construíram o modelo matemático que permitiu calcular o valor referente a cada apartamento. Na Tabela 4 estão três exemplos, onde T representa o valor total da conta recebido pelo síndico e D_i representa o valor devido pelo apartamento i.

Tabela 4 – Três exemplos do modelo para a divisão da conta. T é o valor total da conta e D_i é o valor devido pelo apartamento i.

Apartamento 1	Apartamento 5	Apartamento 10
$D_1 = 120 \cdot T/1308$	$D_5 = 8 \cdot T/1308$	$D_{10} = 210 \cdot T/1308$

Fonte: Adaptada do trabalho do grupo.

A aluna Bruna apresentou o modelo, de acordo com o que foi mostrado, da seguinte maneira: "[...] o valor da conta seria o número de pessoas... é... o número de pessoas [multiplicado] pela permanência no mês vezes o total da conta sobre a soma dos dias que cada um permanece... é... no apartamento".

Este grupo, assim como o primeiro, utilizou proporcionalidade para matematizar os pressupostos. É uma matematização comum tanto no cotidiano quanto nas ciências, quando se pretende relacionar grandezas. Estão implícitos no modelo os dois pressupostos matematizados: que o consumo de água é proporcional à quantidade de moradores e o tempo de permanência dos mesmos no apartamento.

Este modelo também foi bem aceito pelos colegas. Embora saindo do objetivo desse artigo, convém constatar que após a apresentação feita pelos membros do grupo, foi possível notar uma crítica por parte de um colega que questionou o aspecto "tempo de permanência" como sendo de difícil mensuração. Um aluno do grupo argumentou dizendo que se basearam em informações do enunciado da atividade e, se estava na folha, era possível ser medido. No entanto, o colega não estava questionando o aspecto de permanência como sendo significativo em termos de consumo e consequentemente sua relevância para o modelo, e sim a factibilidade de medir, ainda que aproximadamente, esse aspecto. Isto quer dizer que as modelagens não se restringem aos aspectos e aos pressupostos, mas transbordam para as informações e tecnologias disponíveis.

Considerações finais

A maneira que o cenário da "questão da conta de água" foi elaborado e encaminhado conduziu os estudantes a levantarem aspectos a respeito de características isoladas da situação, por exemplo, morador, quintal, permanência no apartamento, faixa etária (criança / adulto), gênero, etc.; qualificando estes aspectos individualmente de forma similar à atividade que Melillo (2011) realizou com um grupo de estudantes para construção de modelos para prever resultados de jogos de futebol. Os pressupostos foram explicitados considerando aspectos da situação-problemática dada e matematizados separadamente ou em conjunto ao exemplo do quintal conceituado como uma pessoa.

A atividade da "questão da conta de água" também ilustra a modelagem no âmbito educacional enquanto construção de modelos por meio da adoção de premissas e formulação de pressupostos (BEAN, 2012a). Em consonância com Blum e Niss (1991) e Bassanezi (2002), os estudantes partiram do problema proposto, conceituaram-no em termos de uma variedade de aspectos expressos em linguagem do cotidiano para em seguida, e às vezes ao mesmo tempo, matematizar os pressupostos. Conforme Cifuentes e Negrelli (2012), os estudantes construíram um recorte referente ao que pode ser considerado e qualificado, ou seja, eles interpretaram o que foi pertinente ao objetivo e ao mesmo tempo factível de incorporar ao modelo. Em suma, a atividade revelou que os estudantes modeladores, ao modelarem em uma situação problemática, empregaram informações julgadas úteis em conjunto com juízos de valores visando alcançar o objetivo da modelagem.

No contexto apresentado, os estudantes começaram a desenvolver uma compreensão a respeito do conceito de pressuposto, entendendo-o como o *como* qualificar um aspecto, ou seja, como qualificar o *que* está sendo considerado na modelagem. A subjetividade, tanto no *que* considerar quanto no *como* considerar, levou os estudantes ao início do entendimento de que a avaliação a respeito da adequação de modelos a situações remetem a uma crítica dos argumentos que sustentam os pressupostos, pois esses argumentos são elaborados utilizando uma variedade de conhecimentos, informações, tecnologias e até mesmo juízos de valor.

Em se tratando de matematização, a turma de participantes demonstrou, em alguns casos, habilidade para relacionar pressupostos para a construção de um modelo, como no caso do primeiro grupo que conceituou um quintal como uma pessoa em termos de consumo de água, "reduzindo" assim os aspectos a um só para poder utilizar proporcionalidade no modelo. O segundo grupo combinou os aspectos moradores e tempo de permanência na construção do seu modelo.

Observamos que era comum enunciar a matematização de um aspecto, principalmente em termos de proporcionalidade, sem verbalizar o pressuposto. Nesses casos, o pressuposto já conceituado matematicamente estabelece uma relação e um juízo de valor em que a matemática está no primeiro plano e o pressuposto, embutido em uma expressão matemática, permanece subjacente. Isto pode ser explicado por ser uma maneira comum de conceber situações que envolvem a partilha de algo entre várias pessoas. Por exemplo, o aspecto de moradores, foi de imediato considerado pelos dois grupos em termos de quantidade e da proporcionalidade em relação ao consumo de água.

Também ficou evidenciado nessa atividade o uso de valores numéricos pelos estudantes para realizar a modelagem. Nas duas modelagens apresentadas, os estudantes utilizaram um caso hipotético ao designar um valor numérico para a conta ou consumo de água. Entendemos que as tabelas construídas pelos estudantes com valores numéricos representam modelos matemáticos, e que a ideia do modelo está nas conceituações e procedimentos usados para calcular a conta para cada apartamento. Acreditamos que dada outra situação similar, os grupos podem usar os mesmos pressupostos relacionados da mesma maneira, ou seja, o mesmo modelo pode ser aplicado para realizar os cálculos para a divisão da conta. Parece que neste momento, em relação às experiências dos estudantes com conceitos matemáticos e suas aplicações, a base aritmética com valores numéricos arbitrários designados para construir modelos forneceu uma base firme para as modelagens.

Essa construção numérica foi desenvolvida em outras experiências com "a questão da conta de água" e em atividades similares propostas a outras turmas de graduação de cursos diferentes. Observamos também que alguns estudantes que têm facilidade em usar uma planilha de cálculos, construíram representações numéricas para casos específicos. Ou seja, é comum que os estudantes abordem uma situação como "a questão da conta de água" do condomínio utilizando valores numéricos para elaborar as relações.

Por outro lado, em um minicurso oferecido para professores e pesquisadores em Educação Matemática, os modelos apresentados pelos grupos para "a questão da conta de água" foram representados em termos algébricos. Ou seja, a pesquisa e outras experiências levantam uma questão a respeito de uma possível diferenciação entre a modelagem matemática a partir do pensamento aritmético e a do pensamento algébrico.

A respeito de modelagem matemática na Educação Matemática, entendemos que a modelagem possibilita contribuições para a compreensão de relações entre modelos e atividades socioculturais, como a exemplificada nesse artigo que trata da situação fictícia sobre "a questão da conta de água". Ainda que fictícia, a modelagem pode ser compreendida pelos estudantes e associada às suas experiências. A modelagem conscientiza sobre como modelos são utilizados para auxiliar na tomada de decisões com a finalidade de nortear ações. No exemplo explanado, a ênfase da tomada de decisão fica sobre como dividir o valor da conta de água. Nesse sentido, é relevante que estudantes desenvolvam capacidade de criticar os modelos, conscientizando-se da subjetividade embutida em sua construção que revela valores, interesses e objetivos dos modeladores. Parte dessa subjetividade transparece ao examinar aspectos incorporados no modelo, e como esses são qualificados (pressupostos), matematizados e inter-relacionados.

Referências

BASSANEZZI, R. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BEAN, D. Modelagem matemática: uma mudança de base conceitual. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2007, Ouro Preto – MG. *Anais*... Ouro Preto – MG, 2007. 1 CD-ROM.

BEAN, D. Modelagem: uma conceituação criativa de situações. In: ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE OURO PRETO – MG, 4., 2009, Ouro Preto – MG. *Anais*... Ouro Preto – MG, 2009. 1 CD-ROM.

BEAN, D. As premissas e os pressupostos na construção conceitual de modelos. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2012, Petrópolis – RJ. *Anais*... Petrópolis, 2012a. 1 CD-ROM.

BEAN, D. Modelagem se encontra por trás das contas. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2012, Toledo – PR. *Anais*... Toledo – PR, 2012b. 1 CD-ROM.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, v. 22, n. 1, p. 37-68, 1991.

CIFUENTES, J. C.; NEGRELLI, L. G. Uma interpretação epistemológica do processo de modelagem matemática: implicações para a matemática. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, v. 26, n. 43, p. 19-43, 2012.

CIFUENTES, J. C.; NEGRELLI, L. G. O processo de modelagem matemática e a discretização de modelos contínuos como recurso de criação didática. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Orgs.) *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática*: relatos de experiência e propostas pedagógicas. Londrina – PR: Editora da UEL, 2011. p. 123-140.

CHARMAZ, K. *A construção da teoria fundamentada*: guia prático para análise qualitativa. Tradução: Joice Elias Costa. Porto Alegre - RS: Editora Artmed, 2009.

CRAMPTON, J. W.; KRYGIER, J. Uma introdução à cartografia crítica. In: ACSELRAD, H. (Org.) *Cartografias Sociais e Território*. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Pesquisa e Planejamento Urbano e Regional, 2008. p. 85-111.

FREITAS, W. S. *A matematização crítica em projetos de modelagem.* Tese de doutorado em Educação – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte – MG, 2013

GALBRAITH, P.; STILLMAN, G.. Assumptions and context: pursing their role in modelling activity. In: MATOS, J. F.; BLUM, W.; HOUSTON, K.; CARREIRA, S. P. (Eds.) *Modelling and Mathematics Education:* ICTMA 9: Applications in Science and Technology. Chichester, UK: Horwood, 2001. p. 300-310.

GALILEI, G. *Duas novas ciências (*incluindo *Da Força de percussão).* Tradução e notas de Letizio Mariconda e Pablo R. Mariconda. Rio de Janeiro: Museu de Astronomia e Ciências Afins; São Paulo: Nova Stella, 1988.

GRAVEMEIJER, K.; DOORMAN, M. Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example. *Educational Studies in Mathematics*, v. 39, n. 1/3, p. 111-129, 1999. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/3483163>. Último acesso em: 21 ago. 2015.

GRIGORAŞ, R. Mathematising through hypotheses and Assumptions. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12., 2012, Seoul, Korea. *Anais...* Seoul, Korea, 2012. Disponível em: <http://icme12.org/upload/UpFile2/TSG/0658.pdf>. Último acesso em: 02 jan. 2015.

LACOSTE, Y. *A geografia – Isso serve, em primeiro lugar, para fazer a guerra.* Campinas – SP: Papirus, 1988.

MELILLO, C. R. *Modelagem matemática no futebol*: uma atividade de crítica e criação encaminhada pelo método de caso. Dissertação de mestrado em Educação Matemática – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto – MG, 2011.

MORAES, A. C. R. *Geografia*: pequena história crítica. 21ª ed. São Paulo – SP: Annablume, 2007.

NISS, M. Modeling a crucial aspect of students' mathematical modeling. In: LESH, R.; GALBRAITH, P.; HAINES, C. R.; HURFORD, A. (Eds.). *Modeling students' mathematical modeling competencies*: ICTMA. 13. Dordrecht: Springer, 2013. p. 43-59.

SILVA, H. C.; ALMEIDA, L. M. W. Sobre matematização e modelagem matemática. In: ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P. (Orgs.) *Modelagem matemática em foco.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2014. p. 23-48.

VIDIGAL, C. L. *Desenvolvendo criticidade e criatividade com estudantes de geografia por meio de modelagem.* Dissertação de mestrado em Educação Matemática – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto – MG, 2013.

CÁSSIO VIDIGAL. Mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Professor da área de Matemática no Instituto Federal de Minas Gerais – *Campus* Ouro Preto (IFMG-OP). Professor do curso de Especialização em Educação Matemática do IFMG-OP e membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelagem Matemática no Âmbito Educacional (GEPMMAE) certificado pela UFOP junto ao CNPq desde 2011.

DALE BEAN. Doutor pela Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas. Professor do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelagem Matemática no Âmbito Educacional (GEPMMAE) certificado pela UFOP junto ao CNPq desde 2011.

Recebido: 19 de novembro de 2015

Revisado: 08 de abril de 2016

Aceito: 12 de maio de 2016