ACTA MEXICANA DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
Vol. IV, Núm. 15, Julio-Septiembre, 1986
págs. 7-10



# DETERMINACIÓN DE LAS SERIES DE POTENCIAS DE ALGUNAS FUNCIONES

OSCAR CHAVOYA ACEVES*
Sección de Graduados, Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM)
Instituto Politécnico Nacional. México, D.F.

**Resumen:** Se considera el problema general de obtener el desarrollo en potencias de $x$ de la antiderivada de la función:

$$f(x) = \sqrt[n]{R(x)}$$

donde $R$ es una función racional. Admitimos que $R(0) > 0$, de manera que $f$ es analítica en una vecindad de $x = 0$. Para ello se determina el desarrollo de $f$ en serie de McLaurin y luego integramos término a término para resolver el problema original.

**DETERMINATION OF THE POWER SERIES OF SOME FUNCTIONS**

**Abstract:** It is considered the general problem of obtaining the power series in $x$ of the integral the function:

$$f(x) = \sqrt[n]{R(x)}$$

where $R$ is a rational function. It is supposed than $R(0) > 0$ such as $f$ is an analytical function in the vicinity of $x = 0$. In order to do it $f$ in McLaurin power series is obtained, and then integrated term by term to solve the original problem.

## 1. DESARROLLO TEÓRICO

Sea $f(x) = \sqrt[n]{R(x)}$, donde $R$ es una función racional tal que $R(0) > 0$. Así, existe una vecindad del 0 donde $f$ es analítica. Para determinar su desarrollo en potencias de $x$, observemos que $f$ es solución de una ecuación diferencial

$$P(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0. \qquad (1.1)$$

con $P(0) \neq 0$, siendo $P$ y $q$ polinomios; esto permite determinar una relación de recurrencia para los coeficientes de su desarrollo en potencias de $x$.

En efecto, si $f(x) = \sqrt[n]{R(x)}$ tendremos

$$\frac{f(x)}{\sqrt[n]{R(x)}} = 1 \qquad (1.2)$$

en la vecindad del 0 donde $f$ es analítica.

Derivando la igualdad (1.2) una vez, se encuentra

$$\frac{1}{R(x)}\frac{df}{dx} - \frac{R'(x)}{n\,R^{1+1/n}(x)}f = 0 \qquad (1.3)$$

*También en UAM-Azcapotzalco.

es decir

$$\frac{df}{dx} - \frac{R'(x)}{n\,R(x)} f = 0$$

La función $g(x) = -\dfrac{R'(x)}{n\,R'(x)}$

es el cociente de dos polinomios $q(x)$ / $P(x)$ con $P(0) \neq 0$, de manera que la solución del problema con condiciones iniciales

$$P(x)\frac{df}{dx} + q(x)f = 0\,;\; f(0) = R(0) \qquad (1.4)$$

determina unívocamente a $f$ en una vecindad del 0.

Si se hace

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1.5)$$

en (1.4) se obtiene una relación de recurrencia para los coeficientes del desarrollo en serie (1.5), igualando a 0 el coeficiente resultante para cada potencia de $x$. El radio de convergencia de la serie resultante se determina fácilmente, pues se sabe que es el desarrollo en potencias de $x$ de la función $R(x)$.

Sea ahora

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad (1.6)$$

Puesto que $F$ satisface

$$\frac{dF}{dx} = f\;;\; F(0) = 0 \qquad (1.7)$$

(1.4) se puede escribir como un problema con condiciones iniciales de segundo orden para $F$.

$$\begin{gathered} P(x)\frac{d^2F}{dx^2} + q(x)\frac{dF}{dx} = 0 \\ F(0) = 0\;;\; F'(0) = R(0) \end{gathered} \qquad (1.8)$$

## 2. DESARROLLO EN SERIE DE POTENCIAS DE LAS INTEGRALES ELÍPTICAS DE PRIMERA ESPECIE

Si $R(x) = \dfrac{1}{(1-\varepsilon^2 x^2)(1-x^2)}$ (2.1)

y $n = 2$ en (1.1), la ecuación (1.4) toma la forma:

$$(1 - \sigma x^2 + \varepsilon^2 x^4)\frac{df}{dx} + (2\varepsilon^2 x^3 - \sigma x)f = 0 \qquad (2.2)$$

donde $\sigma = 1 + \varepsilon^2$

Puesto que $f$ es par, se propone directamente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} \qquad (2.3)$$

Sustituyendo en (2.2), se obtiene:

$$\begin{gathered} \sum_{n=0}^{\infty} 2_n a_n x^{2n-1} - \sigma \sum_{n=0}^{\infty} (2_n + 1)\, a_n x^{2n+1} \\ + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, a_n X^{2n+3} = 0. \end{gathered} \qquad (2.4)$$

Rearreglando los términos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2(n+1)\, a_{n+1} - \sigma(2n+1)\, a_n]\, x^{2n+1}$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, a_n x^{2n+3} = 0$$

Así

$$2a_1 - \sigma a_0 = 0 \qquad (2.5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2(n+2)\, a_{n+2} - (\sigma)(2n+3)\, a_{n+1}$$

$$+ \varepsilon^2 (2n+1)\, a_n]\, x^{2n+3} = 0$$

Por la condición inicial

$$a_0 = 1\,,$$

se tiene $a_1 = \dfrac{\sigma}{2}$, además, para todo $n$

$$2(n+2)\, a_{n+2} - \sigma(2n+3)\, a_{n+1} + \varepsilon^2(2n+1)\, a_n = 0.$$

O sea

$$a_{n+2} = \frac{\sigma(2n+3)\, a_{n+1} - \varepsilon^2(2n+1)a_n}{2(n+2)}$$

Tenemos así el siguiente esquema:

| |
|---|
| $f(x) = \{(1-\varepsilon^2 x^2)(1-x^2)\}^{-1/2}$ |
| $f(x) = 1 + \dfrac{1+\varepsilon^2}{2}x^2 + \ldots + a_n x^{2n}$ <br> $a_{n+2} = \dfrac{\sigma(2n+3)\, a_{n+1} - \varepsilon^2(2n+1)\, a_n}{2(n+2)}, \sigma = 1 + \varepsilon^2$ |

Radio de convergencia:

$$R = \text{mín}\{\varepsilon^{-2}, 1\}$$

Ahora puede obtenerse el desarrollo en serie de McLaurin de la función

$$f(x) = \int f(t)\,dt \tag{2.7}$$

en la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n+1} \tag{2.8}$$

donde

$$b_n = \frac{a_n}{2n+1}$$

A partir de la relación de recurrencia para los coeficientes $a_n$, puede obtenerse la relación de recurrencia para los coeficientes $b_n$, sustituyendo $a_n$ por su igual a partir de las relaciones (2.7) y (2.8).

Así, resulta $b_0 = 1$; $b_1 = \dfrac{\sigma}{6}$

$$b_{n+2} = \frac{\sigma(2n+3)^2 b_{n+1} - \varepsilon^2 (2n+1)^2 b_n}{2(n+2)(2n+5)}$$

El radio de convergencia es el mismo que antes.

## 3. INTEGRALES ELÍPTICAS DE SEGUNDA ESPECIE

Hagamos ahora $R(x) = \dfrac{1-\varepsilon^2 x^2}{1-x^2}$ y $n = 2$ en (1.1). Sustituyendo, (1.4) toma la forma:

$$(1 - \sigma x^2 + \varepsilon^2 x^4)\frac{df}{dx} + (\varepsilon^2 - 1)xf = 0 \tag{3.1}$$

donde, como antes, $\sigma = 1 + \varepsilon^2$.

Nuevamente $f$ es par y podemos proponer de inicio que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} \tag{3.2}$$

Sustituyendo en (3.1) se obtiene la igualdad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2_n a_n x^{2n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \{(2n+1) + (2n-1)\varepsilon^2\} a_n x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2n\,\varepsilon^2 a_n x^{2n+3} = 0 \tag{3.3}$$

Después de un poco de álgebra se tiene

$$2a_1 - (1-\varepsilon^2)a_0 = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{2(n+2)a_{n+2} - |(2n+3) + (2n+1)\varepsilon^2| a_{n+1} + 2n\,\varepsilon^2 a_n\} x^{2n+3} = 0 \tag{3.4}$$

Por la condición inicial $a_0 = 1$,

entonces $\quad a_1 = \dfrac{(1-\varepsilon^2)}{2}$

Resumiendo, tenemos el esquema:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2 x^2}{1-x^2}}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$$

$$a_0 = 1\ ;\ a_1 = \frac{1-\varepsilon^2}{2}$$

$$a_{n+2} = \frac{|(2n+3) + (2n+1)\varepsilon^2| a_{n+1} - 2_n \varepsilon^2 a_n}{2(n+2)}$$

$$R = \text{mín}\{\varepsilon^{-2}, 1\}$$

Para la función

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

se obtiene el desarrollo

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n+1}$$

con $b_0 = 1$ ; $b_1 = \dfrac{1-\varepsilon^2}{6}$

$$b_{n+2} = \frac{|(2n+3) + (2n+1)\varepsilon^2|(2n+3) b_{n+1} - 2n(2n+1)\varepsilon^2 b_n}{2(n+2)(2n+5)}$$

$$R = \text{mín}\{\varepsilon^{-2}, 1\}$$

## 4. OTROS DESARROLLOS

La posibilidad de resolver los problemas anteriores, según se puede observar fácilmente, depende sólo del hecho de que

$$\frac{d}{dx} \ln \sqrt[n]{R(x)} \tag{4.1}$$

sea una función racional. Así, este método se puede hacer extensivo al caso en que la función $f$ es el producto de varios factores del tipo (1.1).

En su caso, como se sabe de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, la función $f$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}[\ln f(x)]\, y = 0 \tag{4.2}$$

$$y(0) = f(0)$$

Utilizando esto se puede obtener, por ejemplo, el desarrollo en serie de McLaurin de la integral elíptica de tercera especie

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1 + n^2 x^2)\sqrt{(1 - \varepsilon^2 x^2)(1 - x^2)}}$$

Los cálculos, análogos a los anteriores, no se presentan.

### BIBLIOGRAFÍA

1. **Godunov, S. K.:** *Ecuaciones de la Física Matemática.* Ed. MIR, Moscú, 1971.
2. **Margenau, H. y G. Moseley Murphy:** *The mathematics of physics and chemistry.* D. Van Nostrand, Co. Inc. Princeton, 1968.