

ACERCA DE LA TEORÍA DE CIRCUITOS CLÁSICA

ALEJANDRO GARCÍA AVILÉS

Sección de Graduados, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME)
Instituto Politécnico Nacional.

Resumen: Se empieza señalando que los conceptos tradicionales de fuente de voltaje y fuente de corriente dan lugar a contradicciones y limitaciones en la teoría de los circuitos. Se demuestra que para analizar una red no es necesario, ni en general conveniente, reducirla, mediante corrimientos de fuentes y el teorema clásico de intercambio de fuentes, a una red equivalente con sólo fuentes acompañadas o una red equivalente con un solo tipo de fuentes. Por el contrario, se demuestra que el uso de fuentes no acompañadas y los teoremas generalizados de intercambio de fuentes que se establecen para redes con acoplamientos magnéticos arbitrarios, pueden simplificar sustancialmente el análisis de una red. Se termina con las condiciones que deben satisfacerse para que i) los elementos en serie con una fuente de corriente puedan reemplazarse por un corto circuito y ii) los elementos en paralelo con una fuente de voltaje puedan reemplazarse por un circuito abierto. Estas condiciones incluyen los casos en que los elementos en cuestión están acoplados magnéticamente de manera arbitraria.

ON CLASSICAL NETWORK THEORY

Abstract: We begin by indicating that the traditional concepts of voltage source and current source give rise to contradictions and limitations in Circuit Theory. We show that to analyse a network it is neither necessary nor, in general, convenient to reduce it, by shifting the sources and applying the classical Theorem of Transformation of Sources, to an equivalent network with only accompanied sources or to an equivalent network with only one kind of sources. On the contrary, we show that the use of unaccompanied sources and the Generalized Theorems of Transformation of Sources, that we establish for networks with arbitrary magnetic couplings, may substantially simplify the analysis of a network. We finish by giving the conditions so that i) the elements in series with a current source may be replaced by a short circuit and ii) the elements in parallel with a voltage source may be replaced by an open circuit. These conditions include the cases in which the elements in question are magnetically coupled in an arbitrary manner.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos quince años se han publicado tantos textos de teoría de los circuitos que Lawrence Huelsman en su libro de 1984 *Basic Circuit Theory* (6)*, antes de justificar la publicación de su texto comenta en el prefacio: "Parece probable que si todos los libros de introducción a la teoría de los circuitos que se han escrito en la última década se juntaran en un solo estante, éste se desplomaría."

*Las referencias a la bibliografía se indicarán con un número entre paréntesis.

En general los autores modernos suponen que los fundamentos topológicos de la teoría de los circuitos ya quedaron perfectamente establecidos por los autores clásicos, tales como C.A. Guillemín (1), S. Seshu (2), N. Balabanian (3), M.E. Van Valkenburg (5) y C.A. Desoer (14). Se cree que cualquier desarrollo de la teoría de los circuitos debe necesariamente basarse en estos autores. Por esta razón continúan (y continuarán) apareciendo textos que difieren en lo fundamental, muy poco de los clásicos.

En este artículo se critican estos fundamentos topológicos de la teoría de los circuitos indicando dónde radican sus principales errores y limitaciones. Sin

embargo, el artículo no sólo se limita a criticar sino que da alternativas para que la teoría quede bien fundamentada y no dé lugar a errores teóricos y numéricos. El punto de vista que se toma es el introducido en la ESIME del IPN, por E. Bustamante (8) quien a su vez se basó en los trabajos originales de G. Kirchhoff (16), J.C. Maxwell (17), H. Poincaré (18) y H. Weyl (19) entre otros.

En el artículo sólo se critica lo escrito en diferentes libros de texto y no en artículos especializados, porque los textos son fáciles de conseguir y consultar pero no así los artículos que se encuentran esparcidos en muchas revistas de fechas diversas. Además, todo lo dicho en los artículos originales se repite, en forma más explícita, en los libros de texto escogidos.

2. ALGUNAS CONSIDERACIONES ACERCA DE LAS FUENTES

En la teoría de los circuitos clásica primero se consideran redes sin acoplamientos magnéticos y sin fuentes de voltaje o de corriente. Teniendo como base estas redes se establecen las leyes de Kirchhoff. En seguida se introducen las fuentes y se discuten los métodos de solución: método de mallas, de nodos, de cortes, etc. Algunos autores introducen los acoplamientos magnéticos antes de los métodos de solución, pero la mayoría lo hacen mucho más tarde y generalmente sólo para dos o tres bobinas. Por ejemplo, el conocido autor E. A. Guillemin (1) en su libro clásico de 1953, *Introducción a la Teoría de los Circuitos*, al considerar sólo redes resistivas sin fuentes, discute, en el capítulo II, las leyes de Kirchhoff y los métodos de mallas y de nodos. Más adelante, antes de introducir las fuentes, dice en la pág. 88: "En las discusiones precedentes el papel desempeñado por los manantiales de energía (fuentes de voltaje y de corriente) no ha sido tenido en cuenta en el cuadro de las redes, y en verdad su presencia no tenía razón de ser en los tópicos discutidos hasta entonces. Por tal razón, a sabiendas, los manantiales se dejaron de lado puesto que su presencia hubiera disminuido la eficiencia de las discusiones".

Prácticamente todos los autores posteriores a Guillemin adoptaron el mismo punto de vista. Por ejemplo, Seshu y Balabian (2) en su libro de 1959, dan, fuera del contexto de las leyes de Kirchhoff, en la página 20, las siguientes definiciones:

- i) "Una fuente de voltaje es un elemento de dos terminales cuyo voltaje en cualquier instante del tiempo es independiente de la corriente en sus terminales".
- ii) "Una fuente de corriente es un elemento de dos terminales cuya corriente en cualquier ins-

tante del tiempo es independiente del voltaje a través de sus terminales".

Es importante señalar que la gran mayoría de los autores más modernos, tanto en Estados Unidos como en Europa, dan, básicamente, las mismas definiciones. Entre los más conocidos se encuentran Balabian (3) (1972, p. 45), Kuo (4) (1966, p. 13), Van Valkenburg (5) (1974, p. 36), Huelsman (6) (1984, p. 26), Boite (7) (1971, p. 4), Hayt (15) (1962, p. 17).

Considérese la definición i) de fuente de voltaje. Como en dicha fuente el voltaje, digamos V , es "independiente de la corriente", digamos I , entre sus terminales, entonces no existe ninguna función (matemática) que describa a V y que contenga a I . Lo que implica que obviamente tampoco existe una función que describa a I y que contenga a V . Por lo tanto, en una fuente de voltaje la corriente también es independiente del voltaje. Consecuentemente, la definición i) implica que una fuente de voltaje satisface la definición ii) y que también es una fuente de corriente.

Análogamente se puede demostrar que la definición ii) implica que una fuente de corriente satisface la definición i) y, por lo tanto, también es una fuente de voltaje.

En resumen, las definiciones i) y ii) son redundantes debido a que no toman en cuenta que en matemáticas, ser "independiente de", es una relación simétrica: si A es independiente de B , entonces B es independiente de A .

Tomando como base la obra de Bustamante (8) (1964, p. 15) las fuentes se pueden definir correctamente como sigue:

- a) Una fuente de voltaje es un elemento de dos terminales con el cual hay asociada, relativa a una dirección de referencia arbitrariamente asignada, una función $V(t)$, del tiempo t , llamada su valor, tal que al tiempo t la caída de voltaje a través del elemento en la dirección de referencia está obligada a ser igual a $V(t)$, para todo t .
- b) Una fuente de corriente es un elemento de dos terminales con el cual hay asociada, relativa a una dirección de referencia arbitrariamente asignada, una función $I(t)$, del tiempo t , llamada su valor, tal que al tiempo t la corriente a través del elemento en la dirección de referencia está obligada a ser igual a $I(t)$, para todo t .

La definición a) implica trivialmente que el voltaje de una fuente de voltaje es independiente de la corriente en sus terminales. Sin embargo, se enfatiza que esta independencia es una consecuencia de la de-

finición y que de ninguna manera debe formar parte de ella.

Similarmente, en una fuente de corriente su corriente en cualquier instante del tiempo es independiente del voltaje a través de sus terminales. Pero este hecho es una consecuencia trivial de la definición y no debe formar parte de ella.

Otras consecuencias triviales pero importantes de las definiciones anteriores son:

Una fuente de voltaje de valor $V(t) \neq 0$ no debe conectarse en corto circuito porque esto da lugar a una contradicción. Por un lado el voltaje está obligado a seguir la función $V(t) \neq 0$, pero al mismo tiempo se está obligando a que el voltaje sea cero debido al corto circuito.

Análogamente, una fuente de corriente de valor $I(t) \neq 0$ no debe dejarse en circuito abierto porque la corriente a través de ella o bien sigue la función $I(t) \neq 0$ o toma el valor cero impuesto por el circuito abierto.

3. ELEMENTO GENERAL CLASICO Y CORRIMIENTO DE FUENTES

Un hecho importante que debe aclararse es que si una fuente de voltaje forma parte de un circuito, la corriente a través de ella es una incógnita por determinar. Análogamente, la caída de voltaje en una fuente de corriente de un circuito es una incógnita. Por el contrario, estas incógnitas se evitan en la teoría clásica utilizando elementos generales "mixtos" como el

mostrado en la Fig. 3.1. Este elemento general puede no tener fuentes, pero si el elemento contiene una fuente la impedancia $Z \neq 0$ debe estar presente. O, como a menudo se expresa, las fuentes deben de estar *siempre* "acompañadas".

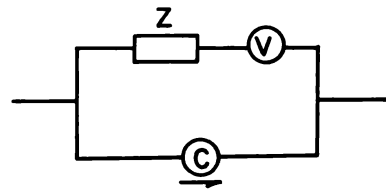


Fig. 3.1. Elemento general "mixto" de la teoría clásica.

Al considerar la red con fuentes no acompañadas de la Fig. 3.2, Balabanian (3, p. 96) argumenta: "Sin embargo, o se conoce la tensión (caída de voltaje) o se conoce la intensidad (corriente) de un generador (fuente). Así pues, no podrán darse enunciados generales referentes al número de incógnitas-en función del número de arcos si se tratan los generadores (fuentes) no acompañados como arcos. A tal fin convendrá utilizar ciertas equivalencias que vamos a estudiar ahora para poder dejar de considerar generadores no acompañados.

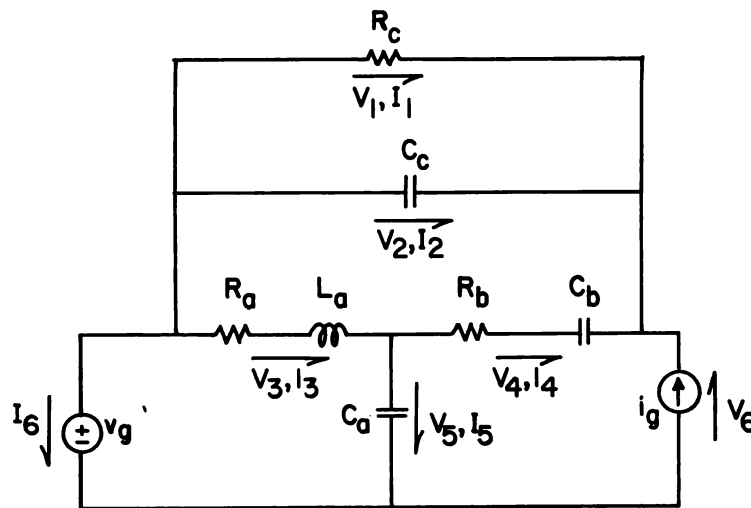


Fig. 3.2. Red con fuentes "no acompañadas".

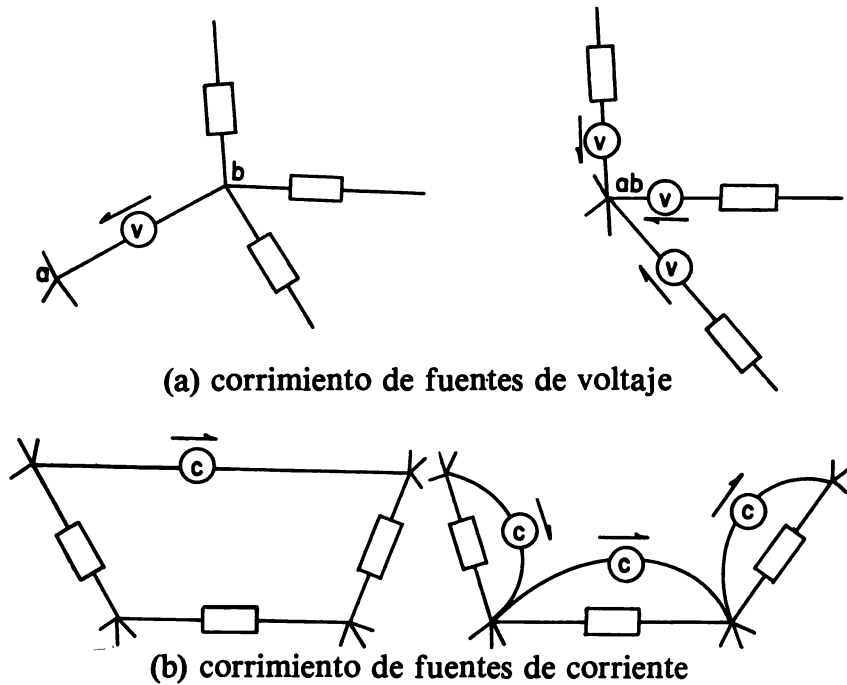


Fig. 3.3.

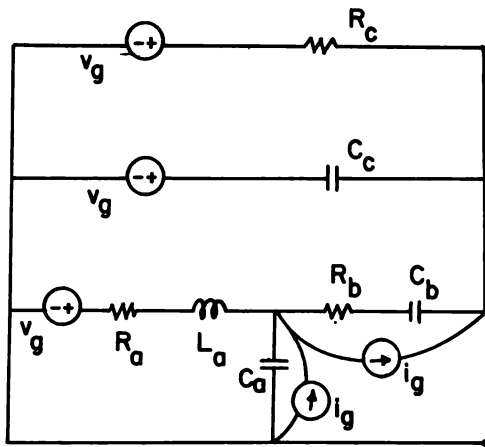


Fig. 3.4. Red obtenida de la Fig. 3.2, desplazando las fuentes.

Las equivalencias mencionadas arriba son los conocidos corrimientos o desplazamientos de fuentes que se ilustran en la Fig. 3.3, los cuales, aplicados a la red de la Fig. 3.2, dan lugar a la red equivalente de la Fig. 3.4, con sólo fuentes acompañadas.

Sin embargo, la afirmación de Balabanian de que no pueden darse enunciados generales cuando una

red contiene fuentes no acompañadas es falsa. Todo lo que se requiere es considerar las definiciones correctas de las fuentes a) y b) dadas antes. En una fuente de voltaje la corriente es una incógnita y en una fuente de corriente el voltaje es una incógnita. De esta manera, el número de ecuaciones de una red igualará al número de incógnitas y “los enunciados generales” de un circuito cualquiera “referentes al número de incógnitas en función del número de arcos” siempre pueden darse.

Lo dicho en el párrafo anterior puede demostrarse en forma completamente general. (Ver (8), (9) y (10).) Sin embargo, aquí sólo se considerará la red de la Fig. 3.2, que según Balabanian no puede considerarse sin antes modificarse. Las incógnitas son las corrientes y voltajes a través de los elementos pasivos: $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$, la corriente I_6 a través de la fuente de voltaje v_g , y el voltaje V_6 a través de la fuente de corriente i_g . Para determinar estas 12 incógnitas contamos con cinco relaciones (de la forma $V = ZI$) entre los voltajes y corrientes de los elementos pasivos, cuatro ecuaciones de Kirchhoff de voltaje (linealmente independientes) y tres ecuaciones de Kirchhoff de corriente (linealmente independientes). Es decir, la red da lugar a un sistema de 12 ecuaciones con 12 incógnitas.

4. TEOREMAS GENERALIZADOS DE INTERCAMBIO DE FUENTES (TGIF)

En los artículos (9) y (10) se establecieron las reglas para obtener por inspección las ecuaciones de cortes de redes arbitrarias. Los teoremas generalizados de intercambio de fuentes (TGIF) se establecieron y demostraron en (9) sólo para redes resistivas. Antes de establecer los TGIF para redes arbitrarias es necesario dar las siguientes definiciones (11):

Definición 4.1. Si con cada arco de una gráfica orientada G se asocia un elemento serie de la forma mostrada en la Fig. 4.1, se obtiene una red (de elementos tipo serie) RS .

Definición 4.2. Si con cada arco de una gráfica orientada G se asocia un elemento paralelo de la forma mostrada en la Fig. 4.2, se obtiene una red (de elementos tipo paralelo) RP .

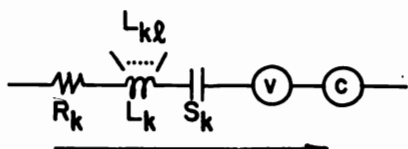


Fig. 4.1. Elemento general tipo serie.

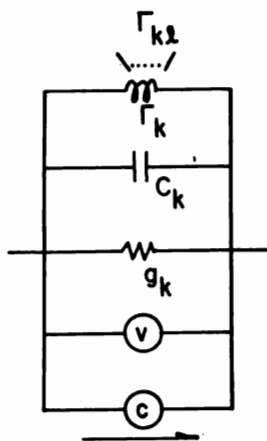


Fig. 4.2. Elemento general tipo paralelo.

En un elemento general serie o paralelo, algunos, pero no todos los elementos básicos, i.e. resistor, condensador, bobina, fuente de voltaje y fuente de corriente, pueden estar ausentes. Así que, en particular, un elemento general puede constar sólo de fuentes. En la red de la Fig. 3.2, tanto la fuente de voltaje v_r como la fuente de corriente i_r pueden considerarse como elementos generales serie o paralelo, según se considere a la red como RS o RP . En una red RS un "arco" será un elemento general tipo serie; pero en una red RP un arco será un elemento general tipo paralelo. Con las definiciones anteriores, los TGIF para el caso general, cuya demostración es idéntica a la dada en (9) para el caso resistivo, pueden establecerse como sigue:

Teorema 4.1. Considérese la red RS sin cortes de fuentes de corriente*. En RS los arcos con una fuente de corriente se pueden considerar como cuerdas de una selva**. Escogiendo dicha selva, se enumeran los arcos de RS empezando por los que tienen una fuente de corriente. Como cada cuerda define una malla fundamental, siempre es posible obtener un conjunto de mallas fundamentales de tal manera que las primeras, digamos g , estén definidas y orientadas por las cuerdas con una fuente de corriente. El teorema generalizado de intercambio de fuentes para redes RS (TGIFRS) establece que los arcos de RS con una fuente de corriente se pueden eliminar y así obtener un circuito equivalente, con tal de que en cada cuerda de las mallas fundamentales sin fuente de corriente se introduzca una fuente de voltaje de compensación dirigida como la malla. El valor V_i de la nueva fuente de voltaje introducida en la malla fundamental i , sin fuente de corriente, será

$$V_i = \sum_{j=1}^g z_{ij} I_j$$

donde z_{ij} es la impedancia mutua entre la familia i y la malla fundamental j definida por el arco con la fuente de corriente de valor I_j .

Teorema 4.2. Considérese la red RP sin mallas de fuente de voltaje. En RP los arcos con una fuente de voltaje se pueden considerar como ramas de una selva. Escogiendo dicha selva, se enumeran los arcos de

* Si una red tiene un corte de fuentes de corriente o una malla de fuentes de voltaje, la red es incompatible. Sin embargo, este tipo de incompatibilidades se pueden eliminar fácilmente. Esto se tratará en forma detallada en un artículo subsecuente.

** Los elementos de teoría de gráficas utilizados en este artículo pueden consultarse en (12) o (9).

RP empezando por los que tienen una fuente de voltaje. Como cada rama define un corte fundamental, siempre es posible obtener un conjunto de cortes fundamentales de tal manera que los primeros, digamos f , estén definidos y orientados por las ramas con una fuente de voltaje. El teorema generalizado de intercambio de fuentes para redes *RP* TGIFRP) establece que los arcos de *RP* con una fuente de voltaje se pueden encoger (cortocircuitar), y así obtener una red equivalente, con tal que en cada rama de los cortes fundamentales sin fuente de voltaje se conecte en paralelo una fuente de corriente de compensación, dirigida como el corte. El valor I_i de la nueva fuente de corriente introducida en el corte fundamental i , sin fuente de voltaje, será

$$I_i = \sum_{j=1}^f y_{ij} V_j$$

donde y_{ij} es la admitancia mutua entre el corte i y el corte j definido por el arco con la fuente de voltaje de valor V_j .

Es interesante comparar los TGIF con el teorema clásico de intercambio de fuentes que establece:

Una fuente de voltaje de valor V en serie con una estructura pasiva magnéticamente aislada con impedancia $Z \neq 0$ puede intercambiarse con una fuente de corriente de valor V/Z en paralelo con la misma estructura pasiva.

El teorema se ilustra en la Fig. 4.3.

Para ver que en realidad los TGIF generalizan el teorema clásico de intercambio de fuentes, considérense los comentarios del autor Gerez Greiser (13) en su libro *Circuitos y Sistemas Electromecánicos*, página 151:

“Si existen fuentes ideales de tensión (voltaje) en un circuito que no tengan alguna impedancia en serie, no se las puede transformar en fuentes reales de corriente empleando las relaciones ilustradas”, en la Fig. 4.3, “por lo que no se puede realizar un análisis por nodos o por secciones de corte”.

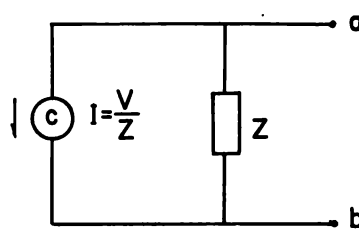
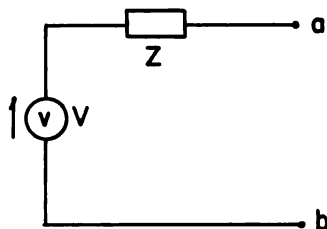


Fig. 4.3. Teorema clásico de intercambio de fuentes.

“Tampoco puede hacerse la transformación de fuentes ideales de corriente a fuentes reales de tensión que se requiere para un análisis por mallas o por lazos si no existe una impedancia en paralelo con la fuente de corriente.”

Tanto los TGIF como los métodos de mallas, nodos y cortes, tal como se exponen en (8), (9) y (10) son independientes de si la red considerada tiene o no fuentes ideales; i.e., fuentes de voltaje sin impedancia en serie y fuentes de corriente sin admitancia en paralelo. Por tanto los comentarios anteriores son falsos. (Ver ejemplos 5.1 y 5.3.)

Es fácil ver que el TGIFRS también se aplica cuando alguna o todas las fuentes de voltaje tienen en serie una bobina acoplada magnéticamente (ver ejemplo 5.4). Similarmente, el TGIFRP se aplica cuando algunas o todas las fuentes de corriente tienen en paralelo una bobina acoplada magnéticamente.

5. EJEMPLOS

Ejemplo 5.1. La red de la Fig. 5.1 se puede resolver, sin necesidad de recurrir a los corrimientos o desplazamientos de fuentes, estableciendo directamente un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas que fácilmente se reduce a tres ecuaciones con tres incógnitas.

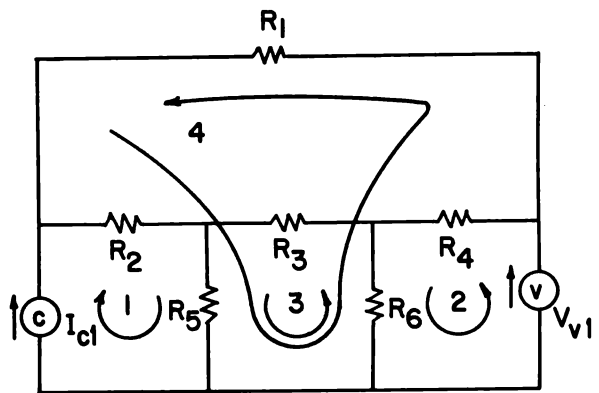


Fig. 5.1.

Para las mallas linealmente independientes mostradas en la figura, se tiene el sistema

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_5 & 0 & R_5 & R_2 + R_5 & 1 \\ 0 & R_4 + R_6 & -R_6 & -R_4 - R_6 & 0 \\ R_5 & -R_6 & R_3 + R_5 + R_6 & R_5 + R_6 & 0 \\ R_2 + R_5 & -R_4 - R_6 & R_5 + R_6 & R_1 + R_2 + R_4 + R_5 + R_6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ V_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -V_{v1} \\ 0 \\ 0 \\ I_{c1} \end{bmatrix}$$

donde V_c es la caída de voltaje en la fuente de corriente. Debido a que $J_1 = I_{c1}$, el sistema anterior se reduce como se ve a continuación:

$$\begin{bmatrix} R_4 + R_6 & -R_6 & -R_4 - R_6 \\ -R_6 & R_3 + R_5 + R_6 & R_5 + R_6 \\ -R_4 - R_6 & R_5 + R_6 & R_1 + R_2 + R_4 + R_5 + R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{v1} \\ -R_5 I_{c1} \\ -(R_2 + R_5) I_{c1} \end{bmatrix} (*)$$

La solución de este sistema (*), junto con $J_1 = I_{c1}$, da lugar a la solución completa de la red.

Ejemplo 5.2. El método tradicional de solución para la red de la Fig. 5.1 requiere el corrimiento de alguna de las fuentes (o ambas, según Balabanian (3)).

Así, desplazando la fuente de corriente y aplicando el teorema clásico de intercambio de fuentes se obtiene la red de la Fig. 5.2 cuyas ecuaciones, para las mallas mostradas en la figura, son las mismas ecuaciones (*) del ejemplo 5.1.

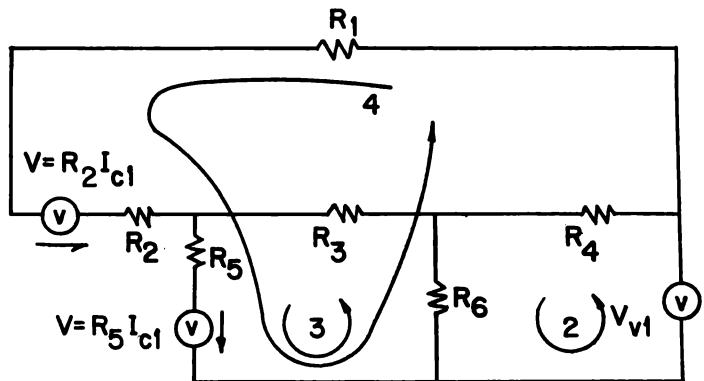


Fig. 5.2. Red obtenida de la de la figura 5.1 desplazando la fuente de corriente y aplicando el teorema clásico de intercambio de fuentes.

Ejemplo 5.3. Considerando la red de la Fig. 5.1 como una red RS , se pueden elegir las mallas fundamentales mostradas en su gráfica de la Fig. 5.3. Así, las mallas mostradas en la Fig. 5.1 son fundamentales con respecto al árbol de la Fig. 5.3. Es claro que las corrientes de mallas coinciden con las corrientes en las cuerdas del árbol:

$$J_1 = I_{c1}, J_2 = I_{v1}, J_3 = I_{R3}, J_4 = I_{R1}.$$

El TGIFRS transforma la red de la Fig. 5.1 en la red equivalente de la Fig. 5.4, donde $V_{v2} = R_5 I_{c1}$, $V_{v3} = (R_2 + R_3) I_{c1}$, $R_a = R_1 + R_2$.

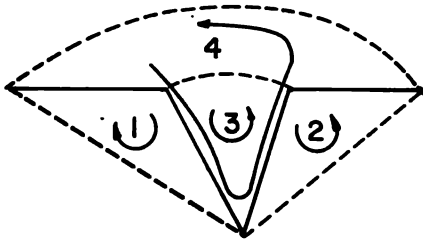


Fig. 5.3. Gráfica de la red de la figura 5.1.

Como para las mallas mostradas en la Fig. 5.4 nuevamente se obtienen las ecuaciones (*), aparentemente no se ha logrado nada nuevo. Sin embargo, ahora se puede considerar esta red como RP y tomar los cortes fundamentales mostrados en su gráfica de la Fig. 5.5. (y en la red).

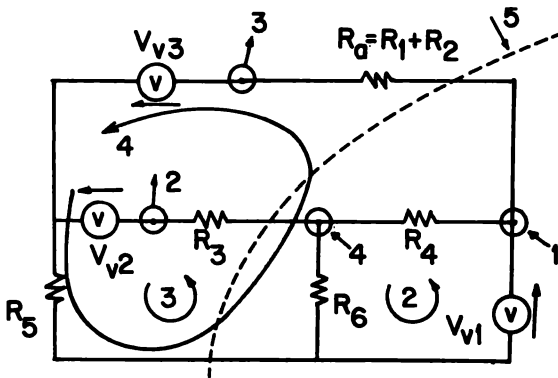


Fig. 5.4. Red obtenida de la red de la figura 5.1 aplicando el TGIFRS.

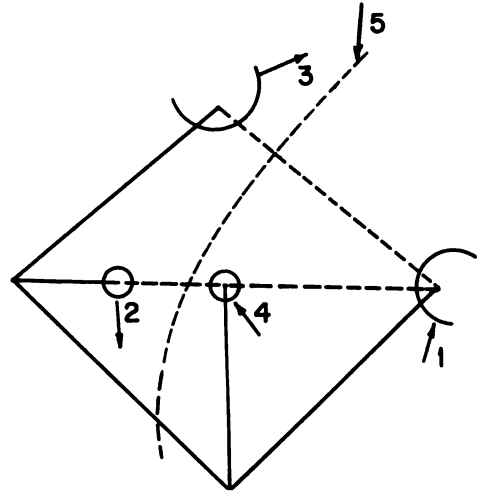


Fig. 5.5 Gráfica de la red de la figura 5.4 considerada como RP .

Los potenciales de cortes de la red (de la Fig. 5.4) están dados por las caídas de voltaje en las ramas del árbol. Entonces los potenciales de cortes U_1, U_2 y U_3 están dados por los valores conocidos V_{v1}, V_{v2} y V_{v3} . Así, la solución de esta red depende sólo de $U_4 = V_{R6}$ y $U_5 = V_{R5}$. Las siguientes relaciones, obtenidas de la Fig. 5.4, demuestran que la solución de la red original (Fig. 5.1), también depende sólo de U_4 y U_5 :

$$\begin{aligned} J_1 &= I_{c1} \\ J_2 &= I_{v1} = I_{R5} - I_{R6} = \frac{U_5}{R_5} - \frac{U_4}{R_6} \\ J_3 &= I_{R3} = -\frac{U_2 + U_4 + U_5}{R_3} \\ &= -\frac{V_{v2} + U_4 + U_5}{R_3} \\ J_4 &= I_{R_a} = -\frac{U_1 + U_3 + U_5}{R_a} \\ &= -\frac{V_{v1} + V_{v3} + U_5}{R_a} \end{aligned}$$

Para calcular U_4 y U_5 se aplica el TGIFRP a la red de la Fig. 5.4. Así, se obtiene la red equivalente de la Fig. 5.6

donde $R_b = \frac{R_a R_5}{R_5 + R_a}$, $R_c = \frac{R_4 R_6}{R_4 + R_6}$,

$$I_{c2} = -\frac{1}{R_4} V_{v1} + \frac{1}{R_3} V_{v2} \text{ y}$$

$$I_{c3} = \frac{1}{R_a} V_{v1} + \frac{1}{R_3} V_{v2} + \frac{1}{R_a} V_{v3}.$$

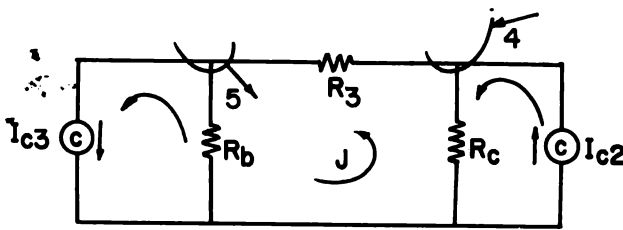


Fig. 5.6. Red obtenida de la figura 5.4 al aplicar el TGIFRP.

De esta red se obtienen las siguientes relaciones:

$$U_4 = V_{R_c} = R_c (J - I_{c2}) \text{ y } U_5 = V_{R_b} = R_b (J - I_{c3})$$

De aquí es claro que el problema de resolver la red de la Fig. 5.1 se ha reducido a calcular J en la última red. Pero ésta aún se puede reducir, transformando las fuentes, a la red de la Fig. 5.7 donde $R_d = R_3 + R_b + R_c$ y $V_{v4} = -R_b I_{c3} - R_c I_{c2}$.

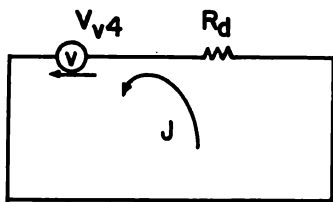


Fig. 5.7. La red de la figura 5.1 se reduce a ésta aplicando los TGIF.

De aquí se obtiene $J = -V_{v4}/R_d$ que substituida en las ecuaciones anteriores proporcionan los potenciales de cortes U_4 y U_5 que a su vez determinan las corrientes de mallas J_1, J_2, J_3, J_4 de la red original de la Fig. 5.1.

Obsérvese que los TGIF permitieron resolver la red de la Fig. 5.1 para valores arbitrarios de los parámetros reduciendo considerablemente el número de operaciones. Se invita al lector a comparar, aunque sea en forma aproximada, el número de operaciones necesarias para plantear y resolver el sistema (*) de la red de la Fig. 5.1 dado en el ejemplo 5.2 con el número de operaciones que se utilizaron en el ejemplo 5.3 para resolver la misma red. En particular, para los valores $R_i = 1, I_{c1} = 2, V_{v1} = 2$, la solución por medio de los TGIF requiere las siguientes operaciones:

$$R_a = 1 + 1 = 2, R_c = \frac{(1)(1)}{1 + 1} = \frac{1}{2},$$

$$R_b = \frac{(1)(2)}{1 + 2} = \frac{2}{3}$$

$$R_d = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{6 + 3 + 4}{6} = \frac{13}{6},$$

$$V_{v2} = (1)(2) = 2,$$

$$V_{v3} = (1 + 1)(2) = 4, I_{c2} = -\frac{2}{1} + \frac{2}{1} = 0,$$

$$I_{c3} = \frac{2}{2} + \frac{2}{1} + \frac{4}{2} = 5,$$

$$V_{v4} = -\left(\frac{2}{3}\right)(5) - \left(\frac{1}{2}\right)(0) = -\frac{10}{3},$$

$$J = \left(\frac{10}{3}\right) / \left(\frac{13}{6}\right) = \frac{20}{13}$$

$$U_4 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{20}{13} - 0\right) = \frac{10}{13},$$

$$U_5 = \frac{2}{3}\left(\frac{20}{13} - 5\right) = \frac{30}{13}$$

$$J_2 = \left(-\frac{30}{13}\right) / (1) - \left(\frac{10}{13}\right) / (1) = -\frac{40}{13}$$

$$J_3 = -\left(2 + \frac{10}{13} - \frac{30}{13}\right) / (1) - \frac{6}{13}$$

$$J_4 = -\left(2 + 4 - \frac{30}{13}\right) / 2 = -\frac{24}{13}$$

Es fácil verificar que los valores de J_2, J_3, J_4 satisfacen las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

obtenidas de (*) (ver ejemplo 5.1) substituyendo los valores $R_i = 1, i = 1,2,3,4,5,6, I_{c1} = 2, V_{v1} = 2$. Así, es claro que este sistema numérico y, lo que es más importante, el sistema literal (*) se resolvieron evitando todas las substracciones y cancelaciones a que da lugar la solución por determinantes.

Ejemplo 5.4. Considérese la red de corriente alterna de la Fig. 5.8 donde $\omega = 1, L_1 = 5, L_2 = 2, M = 3, R_3 = 1, R_4 = 2, R_5 = 3, V_{v1} = 1$ y $V_{v2} = 2$.

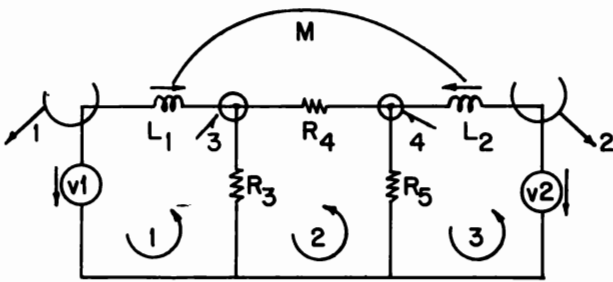


Fig. 5.8. El TGIFRP puede aplicarse a esta red.

Para las mallas mostradas se tienen las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 + 5i & -1 & -3i \\ -1 & 6 & -3 \\ -3i & -3 & 3 + 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

En lugar de resolver directamente el sistema anterior, se considera la red como *RP*. Las inercancias se calculan de las relaciones entre voltajes y corrientes en las bobinas:

$$V_1 = 5i I_1 + 3i I_2$$

$$V_2 = 3i I_1 + 2i I_2$$

De aquí se obtiene

$$I_1 = \frac{2}{i} V_1 - \frac{3}{i} V_2$$

$$I_2 = -\frac{3}{i} V_1 + \frac{5}{i} V_2$$

así que $\Gamma_1 = 2, \Gamma_2 = 5, \Gamma_M = -3$. Para los cortes fundamentales mostrados en la gráfica de la Fig. 5.9 (y en la red original) el TGIFRP da lugar a la red de la Fig. 5.10 donde

$$I_{c1} = \left(\frac{2}{i}\right)(1) + \left(-\frac{3}{i}\right)(2) = -\frac{4}{i},$$

$$I_{c2} = \left(-\frac{3}{i}\right)(1) + \left(\frac{5}{i}\right)(2) = \frac{7}{i} \text{ y}$$

$$g_i = 1/R_i, i = 3,4,5.$$

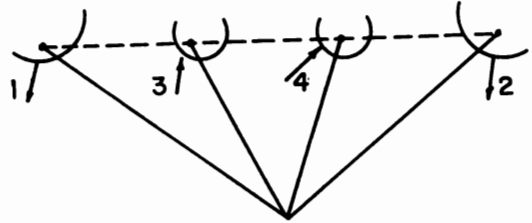


Fig. 5.9. Gráfica de la red de la figura 5.8 considerada como *RP*.

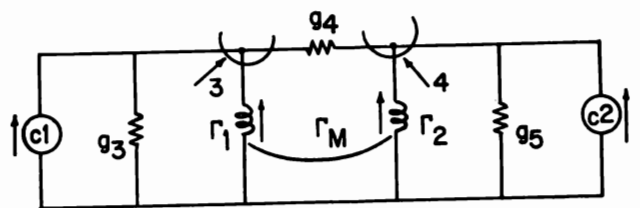


Fig. 5.10. El TGIFRP transforma la red de la figura 5.8 a ésta.

Para la última red se tiene el sistema

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} + \frac{2}{i} & -\frac{1}{2} - \frac{3}{i} \\ -\frac{1}{2} - \frac{3}{i} & \frac{5}{6} + \frac{5}{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{i} \\ -\frac{7}{i} \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema es $U_3 = -\frac{1}{37} + \frac{6}{37}i$, $U_4 = -\frac{51}{37} + \frac{12}{37}i$, que junto con $U_1 = 1$, $U_2 = 2$ proporciona la solución de la red original. En particular, de la Fig. 5.8 se tiene la solución de las ecuaciones de mallas:

$$J_1 = -\frac{2}{i}(U_1 + U_3) + \frac{3}{i}(U_2 + U_4) = \frac{24}{37} + \frac{3}{37}i$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(U_3 - U_4) = \frac{25}{37} - \frac{3}{37}i$$

$$J_3 = -\frac{3}{i}(U_1 + U_3) + \frac{5}{i}(U_2 + U_4) = \frac{42}{37} - \frac{7}{37}i$$

6. ALGUNAS CONSECUENCIAS DE LOS TGIF

Entre los muchos científicos que establecieron los diferentes métodos de la teoría de los circuitos se encuentra el Dr. Charles Desoer de la Universidad de California en Berkeley. En la página 412 de su conocido libro *Basic Circuit Theory* (14), propone el siguiente problema:

“Demostrar que exceptuando al elemento afectado las siguientes transformaciones no afectan los voltajes y corrientes en las ramas de la red: 1) si una rama* consiste de una fuente de corriente en serie con un elemento, el elemento puede reemplazarse por un corto circuito; 2) si una rama consiste de una fuente de corriente en serie con una fuente de voltaje, la fuente de voltaje puede reemplazarse por un corto circuito; 3) si una rama consiste de una fuente de voltaje en paralelo con un elemento, este elemento puede reemplazarse por un circuito abierto; 4) si una rama consiste de una fuente de voltaje en paralelo con una fuente de corriente, la fuente de corriente puede reemplazarse por un circuito abierto. Obsérvese que los casos 3) y 4) son los duales de 1) y 2), respectivamente.”

Los siguientes ejemplos demuestran que los casos 1) y 3) no se cumplen si los elementos en cuestión están acoplados magnéticamente.

Ejemplo 6.1. Considérense las redes *RS1* y *RS2* de la Fig. 6.1. Para las mallas fundamentales mostradas en la gráfica de la Fig. 6.2, el TGIFRS da lugar, en

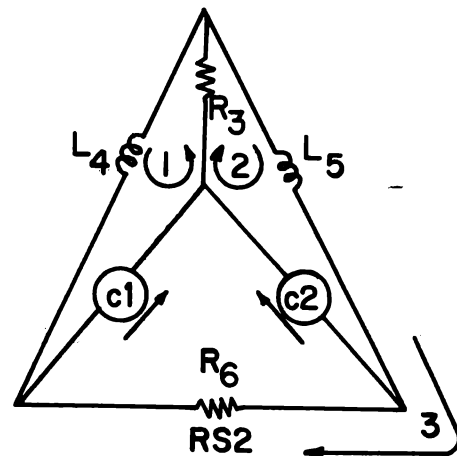
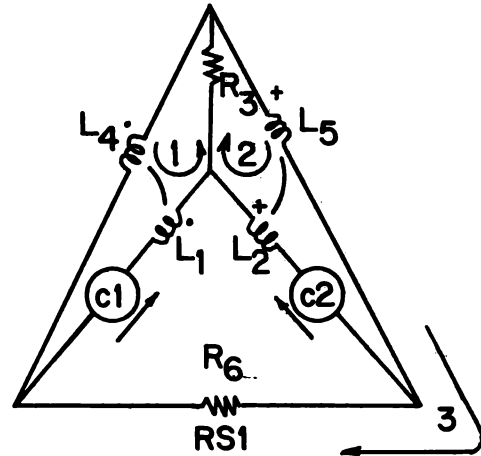


Fig. 6.1. *RS2* se obtiene de *RS1* cortocircuitando L_1 y L_2 .

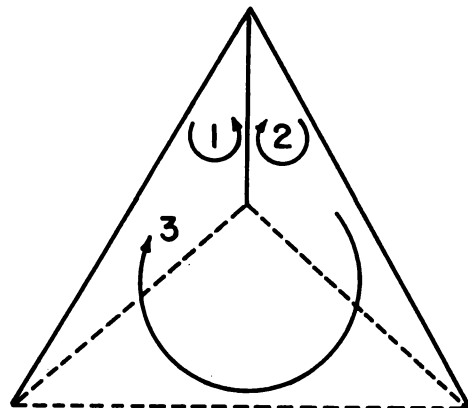


Fig. 6.2. Mallas fundamentales para *RS1* y *RS2*.

*Aquí “rama” significa un arco cualquiera entre dos vértices (nodos).

ambos casos, a la red de la Fig. 6.3. Sin embargo, para $RS1$ se tiene

$$V_{v_6} = (-L_4 + |L_{14}|)DI_{c_1} + (L_5 - |L_{25}|)DI_{c_2},$$

pero para RS_2 se tiene $V_{v_6} = -L_4 DI_{c_1} + L_5 DI_{c_2}$.

Por lo tanto, las redes $RS1$ y $RS2$ no se comportan en forma equivalente. Más precisamente, en $RS1$ las bobinas (con impedancias propias) L_1 y L_2 no se pueden reemplazar por corto circuitos sin afectar las corrientes y voltajes en el resto de la red.

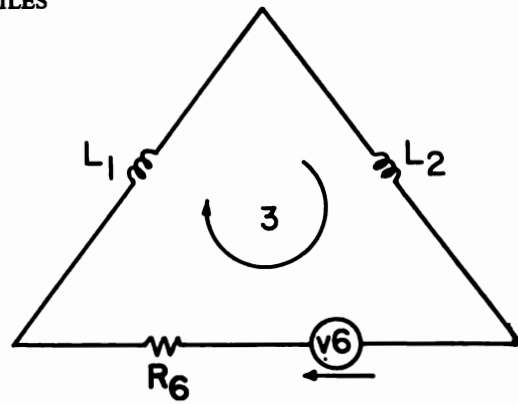


Fig. 6.3. Red obtenida de $RS1$ y $RS2$ al aplicar el TGIFRS.

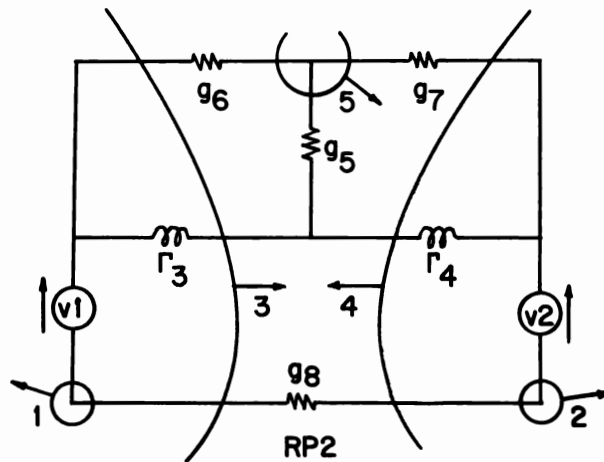
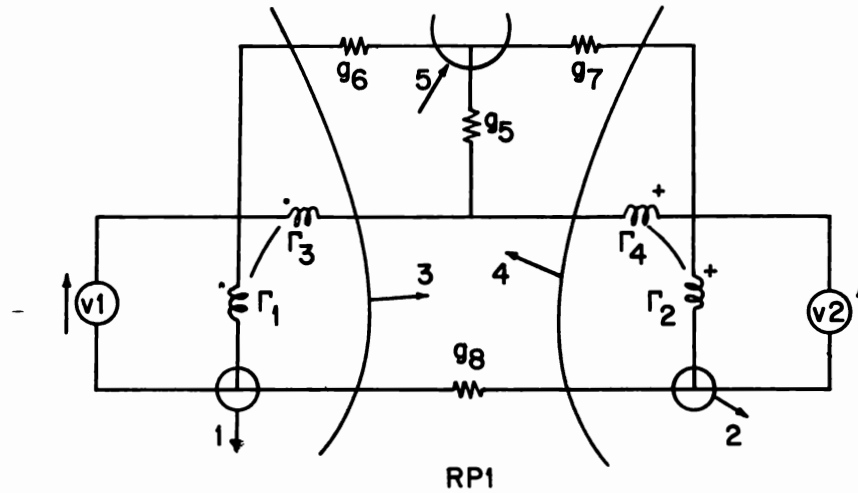


Fig. 6.4. $RP2$ se obtiene de $RP1$ reemplazando Γ_1 y Γ_2 por circuitos abiertos.

dos en la gráfica correspondiente de la Fig. 6.5, el TGIFRP da lugar, en ambos casos, a la red de la Fig. 6.6. Sin embargo, para $RP1$ se tiene $I_{c3} = (g_8 - |\Gamma_{13}| D^{-1}) V_{v1} - g_8 V_{v2}$ y $I_{c4} = -g_8 V_{v1} + (g_8 - |\Gamma_{24}| D^{-1}) V_{v2}$, pero para $RP2$ se tiene $I_{c3} = g_8 V_{v1} - g_8 V_{v2}$ y $I_{c4} = -g_8 V_{v1} + g_8 V_{v2}$.

Por lo tanto, las bobinas (con invertancias propias) Γ_1 y Γ_2 de $RS1$ no se pueden reemplazar por circuitos abiertos sin afectar las corrientes y voltajes en el resto de la red.

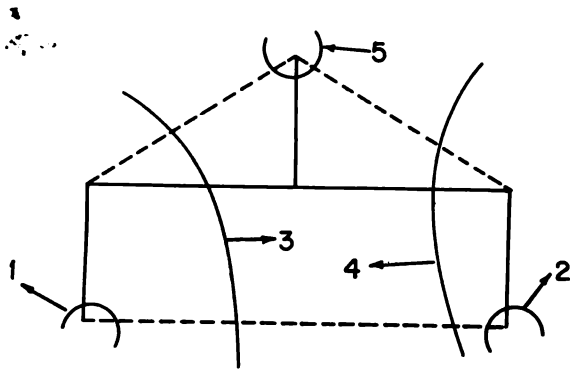


Fig. 6.5. Cortes fundamentales para $RP1$ y $RP2$.

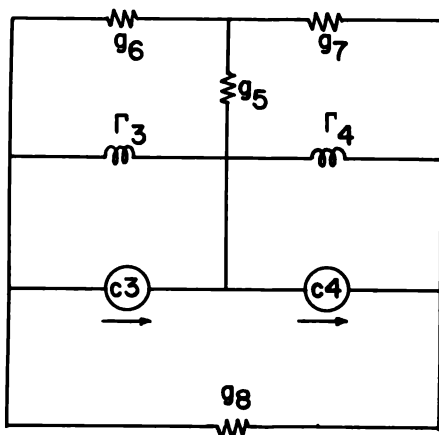


Fig. 6.6. Red obtenida de $RP1$ y $RP2$ al aplicar el TGIFRP.

Por lo tanto, la siguiente conclusión de Desoer (14, p. 412) referente a los corrimientos de fuentes y a las transformaciones del ejercicio de Desoer, es falsa si se consideran redes con acoplamiento magnético:

“En conclusión, usando estas transformaciones, se puede modificar cualquier circuito dado de tal mane-

ra que cada fuente de voltaje esté conectada en serie con un elemento que no sea una fuente y cada fuente de corriente esté en paralelo con un elemento que no sea una fuente.”

Los siguientes ejemplos muestran que en algunos casos sí es posible efectuar las transformaciones 1) y 3) del ejercicio de Desoer sin afectar los voltajes y corrientes en el resto de la red aunque los elementos en cuestión estén acoplados magnéticamente.

Ejemplo 6.3. La red $RS1'$ de la Fig. 6.7 se obtiene de la red $RS1$ de la Fig. 6.1 (ejemplo 6.1) cambiando los acoplamientos magnéticos. En $RS1'$ sólo los pares de bobinas con marcas de polaridad iguales están acopladas magnéticamente. Si en esta red se cortocircuitan las bobinas L_1 y L_2 , se obtiene la red $RS2'$ de la Fig. 6.7. Tomando las mallas fundamentales mostradas en la gráfica de la Fig. 6.2, el TGIFRS da lugar, tanto para $RS1'$ como para $RS2'$, a la red de

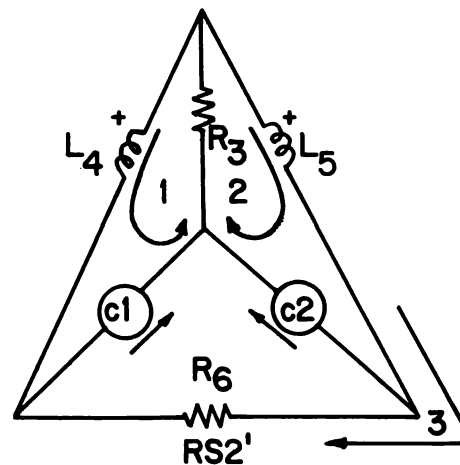
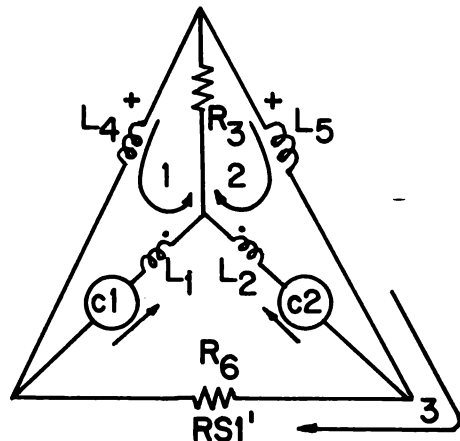


Fig. 6.7 $RS2'$ se obtiene de la $RS1'$ cortocircuitando L_1 y L_2 .

la Fig. 6.8 donde $V_{v6} = -L_4 DI_{c1} + L_5 DI_{c2}$. Es fácil verificar que las corrientes en los arcos correspondientes de $RS1'$ y $RS2'$ son idénticas y con excepción de los arcos modificados, las caídas de voltaje también coinciden en los arcos correspondientes de ambas redes.

Ejemplo 6.4. Considérese la red $RP1'$ de la Fig. 6.9 donde sólo los pares de bobinas con marcas de polaridad iguales están acopladas magnéticamente. Reemplazando las bobinas en paralelo con las fuentes de voltaje por circuitos abiertos se obtiene la red $RP2'$ de la Fig. 6.9. Para los cortes fundamentales mostrados en la Fig. 6.5, el TGIFRP da lugar, tanto

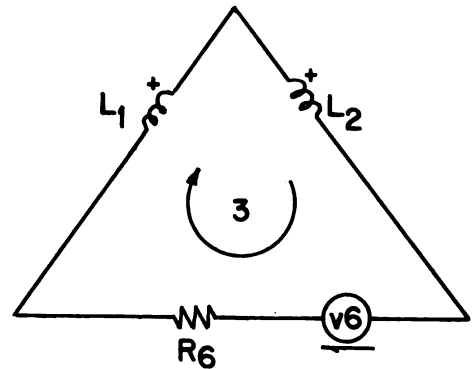


Fig. 6.8. Red obtenida de $RS1'$ y $RS2'$ al aplicar el TGIFRS.

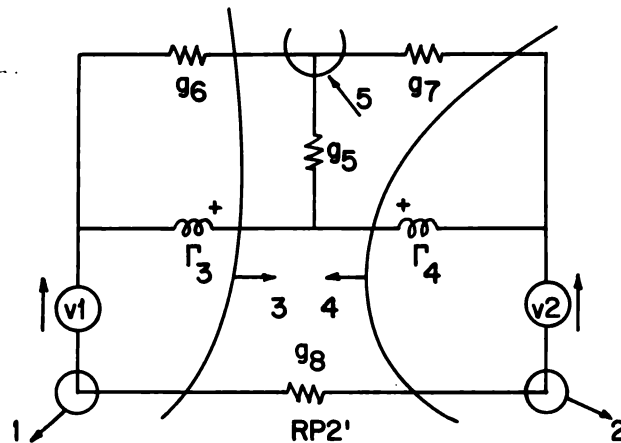
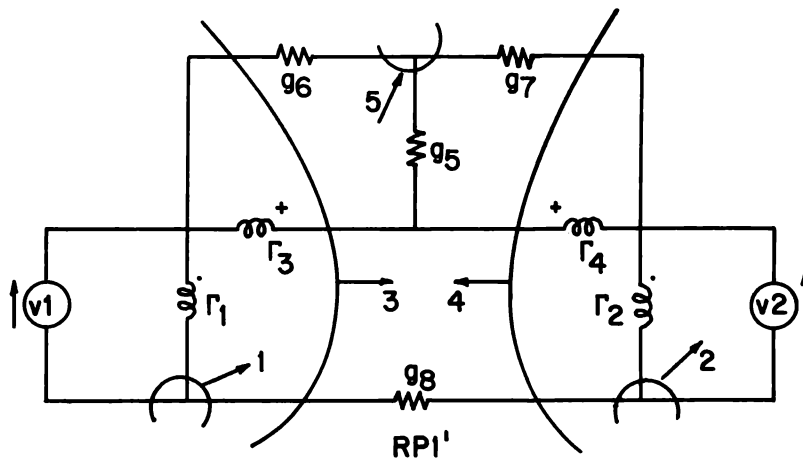


Fig. 6.9. $RP2'$ se obtiene de $RP1'$ reemplazando Γ_1 y Γ_2 por circuitos abiertos.

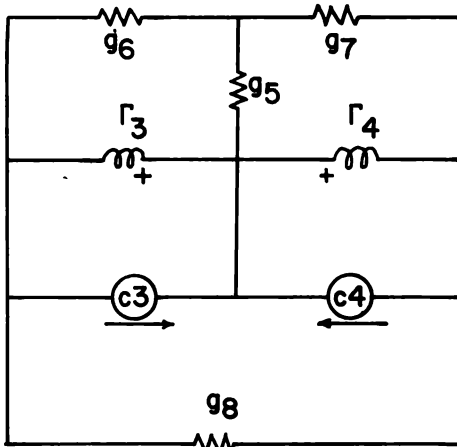


Fig. 6.10. Red obtenida de \$RP1'\$ y \$RP2'\$ al aplicar el TGIFRP.

para \$RP1'\$ como para \$RP2'\$ a la red de la Fig. 6.10 donde \$I_{c3} = g_8 V_{v1} - g_8 V_{v2}\$ y \$I_{c4} = -g_8 V_{v1} + g_8 V_{v2}\$. Por lo tanto, las bobinas \$\Gamma_1\$ y \$\Gamma_2\$ en \$RP1'\$ sí se pueden reemplazar por circuitos abiertos sin modificar las corrientes y voltajes en las ramas de la red, exceptuando las corrientes en las fuentes de voltaje.

Los ejemplos anteriores hacen evidente la necesidad de establecer las condiciones precisas que se deben satisfacer para poder eliminar: i) los elementos en serie con una fuente de corriente y ii) los elementos en paralelo con una fuente de voltaje. Estas condiciones deben incluir los casos con acoplamientos magnéticos arbitrarios. Así, se proponen los siguientes teoremas.

Teorema 6.1. Considérese la red \$RS\$ sin cortes de fuente de corriente. Entonces se puede escoger un sistema de mallas fundamentales de tal manera que las primeras, digamos \$g\$, estén definidas por los arcos con las fuentes de corriente. Sea \$RS'\$ la red obtenida de \$RS\$ encogiendo (cortocircuitando) i) los resistores, condensadores y fuentes de voltaje en serie con una fuente de corriente, ii) las bobinas en serie con una fuente de corriente que no estén acopladas magnéticamente con las bobinas en las mallas fundamentales sin fuentes de corriente. Entonces las corrientes en los elementos comunes de \$RS\$ y \$RS'\$ son idénticas y las caídas de voltaje son las mismas en los elementos comunes exceptuando las fuentes de corriente en los arcos modificados.

Demostración: El TGIFRS (teorema 4.1) establece que en la red \$RS\$ las fuentes de corriente se pueden reemplazar por circuitos abiertos con tal de que se introduzca una fuente de voltaje (en serie) en cada

cuerda de las mallas fundamentales sin fuentes de corriente. El valor \$V_i\$ de la nueva fuente de voltaje introducida en la malla fundamental \$i\$, sin fuentes de corriente será

$$V_i = \sum_{j=1}^g z_{ij} I_j$$

donde \$z_{ij}\$ es la impedancia mutua entre la malla fundamental \$i\$ y la malla fundamental \$j\$ definida por el arco con la fuente de corriente de valor \$I_j\$ (\$j = 1, 2, \dots, g\$). Como cada arco con una fuente de corriente pertenece a una y sólo una malla fundamental, los resistores, condensadores y fuentes de voltaje en serie con la fuente de corriente de valor \$I_j\$ dan una contribución nula a la impedancia \$z_{ij}\$ entre la malla \$i\$ y la malla \$j\$; además, una bobina en serie con la fuente de corriente dará una contribución nula a \$z_{ij}\$ si no tiene acoplamientos magnéticos con las bobinas en las mallas fundamentales sin fuentes de corriente. Esto significa que en \$RS'\$ el TGIFRS dará lugar a las mismas fuentes de voltaje \$V_i\$ y, por lo tanto, las corrientes de malla en \$RS\$ y \$RS'\$ son idénticas. De aquí se concluye que las corrientes en los elementos comunes de \$RS\$ y \$RS'\$ son las mismas. Además, es claro que las corrientes en \$RS\$ y \$RS'\$ darán lugar a las mismas caídas de voltaje en los elementos comunes, exceptuando las fuentes de corriente en los arcos modificados.

Teorema 6.2. En una red \$RS\$ los elementos generales de la forma mostrada en la Fig. 6.11 en paralelo con una fuente de voltaje pueden reemplazarse por circuitos abiertos sin afectar los voltajes en el resto de la red. Exceptuando las fuentes de voltaje en paralelo con los elementos que se reemplazan por circuitos abiertos, las corrientes en el resto de la red no se afectan. En cada elemento general, algunos pero no todos sus elementos básicos (resistor, condensador, bobina y fuente de corriente) pueden estar ausentes; además las bobinas en los elementos que se reemplazan por circuitos abiertos pueden estar magnéticamente acopladas entre sí pero no con las otras bobinas de la red.



Fig. 6.11. Elemento que generalmente se puede reemplazar por un circuito abierto cuando está en paralelo con una f.v.

Demostración. Supóngase que los n elementos mostrados en la Fig. 6.12 forman parte de la red RS con r arcos, s vértices y p componentes. Cada "caja" en paralelo con las fuentes de voltaje representa un elemento de la forma mostrada en la Fig. 6.11. Las bobinas en estos elementos pueden estar acopladas magnéticamente entre sí pero no con el resto de las bobinas de RS . Se consideran primero las n mallas mostradas en la Fig. 6.12 y se completa un conjunto de $\mu = r - s + p$ mallas linealmente independientes de tal manera que sólo las n primeras contengan a los arcos en paralelo con las fuentes de voltaje v_1, v_2, \dots, v_n . El método de demolición (ver (12), (8), (9), (16), (19)) demuestra que esta manera de escoger las mallas de RS siempre es posible. Es claro que las ecuaciones de mallas para las últimas $\mu - n$ mallas no dependen en absoluto de los elementos en paralelo con las fuentes v_1, v_2, \dots, v_n . Por lo tanto, estos elementos se pueden reemplazar por circuitos abiertos sin alterar las corrientes de las últimas $\mu - n$ mallas. Así que, con excepción de las corrientes en las fuentes de voltaje v_1, v_2, \dots, v_n , las últimas $\mu - n$ corrientes de malla determinan las corrientes y voltajes en los elementos de RS que quedan después de reemplazar por circuitos abiertos los elementos en paralelo con estas fuentes.

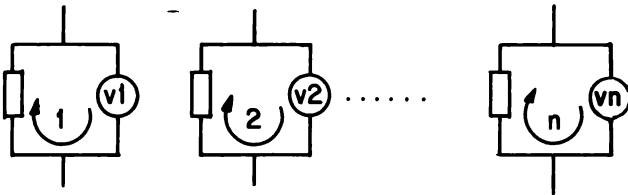


Fig. 6.12. Cada "caja" es un elemento de la forma mostrada en la figura 6.9.

Teorema 6.3. Considérese la red RP sin mallas de fuentes de voltaje. Entonces se puede escoger un sistema de cortes fundamentales de tal manera que los primeros, digamos estén definidos por los arcos con las fuentes de voltaje. Sea RP' la red obtenida de RP eliminando (abriendo) i) los resistores, condensadores y fuentes de corriente en paralelo con una fuente de voltaje, ii) las bobina en paralelo con una fuente de voltaje que no estén acopladas magnéticamente con las bobinas en los cortes fundamentales sin fuentes de voltaje. Entonces las caídas de voltaje en los elementos comunes de RP y RP' son idénticas y las corrientes son las mismas en los elementos comunes exceptuando las fuentes de voltaje en los arcos modificados.

Demostración. El TGIFRP (teorema 4.2) establece que en la red RP las fuentes de voltaje se pueden reemplazar por cortocircuitos con tal de que se introduzca una fuente de corriente (en paralelo) en cada rama de los cortes fundamentales sin fuentes de voltaje. El valor I_i de la nueva fuente de corriente introducida en el corte fundamental i sin fuentes de voltaje, será

$$I_i = \sum_{j=1}^f y_{ij} V_j$$

donde y_{ij} es la admitancia mutua entre el corte fundamental i y el corte fundamental j definido por el arco con la fuente de voltaje de valor V_j ($j = 1, 2, \dots, f$). Como cada arco con una fuente de voltaje pertenece a uno y sólo un corte fundamental, los resistores, condensadores y fuentes de corriente en paralelo con la fuente de voltaje de valor V_j dan una contribución nula a la admitancia y_{ij} entre el corte i y el corte j ; además, una bobina en paralelo con la fuente de voltaje dará una contribución nula a y_{ij} si no tiene acoplamientos magnéticos con las bobinas en los cortes fundamentales sin fuentes de voltaje. Esto significa que en RP' el TGIFRP dará lugar a las mismas fuentes de corriente I_i y, por lo tanto, los voltajes de corte en RP y RP' son idénticos. De aquí se concluye que las caídas de voltaje en los elementos comunes de RP y RP' son las mismas. Además, es claro que los voltajes en RP y RP' darán lugar a las mismas corrientes en los elementos comunes exceptuando las fuentes de voltaje en los arcos modificados.

Teorema 6.4. En una red RP los elementos generales de la forma mostrada en la Fig. 6.13 en serie con una fuente de corriente pueden reemplazarse por cortocircuitos, sin afectar las corrientes en el resto de la red. Exceptuando las fuentes de corriente en serie con los elementos que se cortocircuitan, las caídas de voltaje en el resto de la red no se afectan. En cada elemento general, algunos, pero no todos sus elementos básicos (resistor, condensador, bobina y fuente de voltaje), pueden estar ausentes; además, las bobinas en los elementos que se reemplazan por cortocircuitos pueden estar magnéticamente acopladas entre sí pero no con las otras bobinas de la red.

Demostración. Supóngase que los n elementos mostrados en la Fig. 6.14 forman parte de la red RP con r arcos s vértices y p componentes. Cada caja en

serie con las fuentes de corriente representa un elemento de la forma mostrada en la Fig. 6.13.

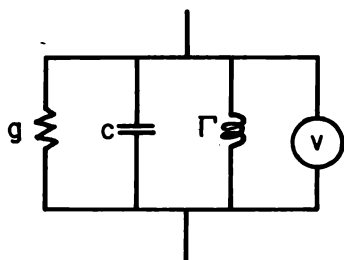


Fig. 6.13. Elemento que generalmente se puede cortocircuitar cuando está en serie con una f.c.

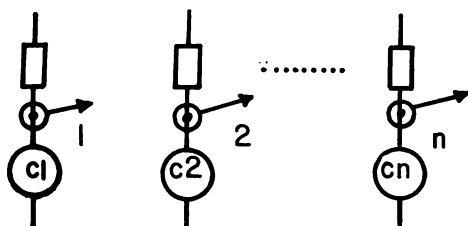


Fig. 6.14. Cada "caja" es un elemento de la forma mostrada en la figura 6.11.

Las bobinas en estos elementos pueden estar acopladas magnéticamente entre sí pero no con el resto de las bobinas de RP . Se consideran primero los n cortes mostrados en la Fig. 6.14 y se completa un conjunto de $P = s - p$ cortes linealmente independientes de RP de tal manera que sólo los n primeros contengan a los arcos en serie con las fuentes de corriente c_1, c_2, \dots, c_n . El método de encogimiento (ver (12), (9)) demuestra que esta manera de escoger los cortes de RP siempre es posible. Es claro que las ecuaciones de los $P - n$ cortes son linealmente independientes y no dependen en absoluto de los elementos en serie con las fuentes de corriente c_1, c_2, \dots, c_n . Por lo tanto, estos elementos se pueden reemplazar por cortocircuitos sin alterar los voltajes de corte de los $P - n$ cortes restantes en RP . Así que, con excepción de las caídas de voltaje en las fuentes de corriente c_1, c_2, \dots, c_n , estos $P - n$ voltajes de corte determinan

los voltajes y corrientes en los elementos de RP que quedan después de reemplazar por cortocircuitos los elementos en serie con estas fuentes.

BIBLIOGRAFIA

1. Guillemin, E.A.: *Introducción a la Teoría de los Circuitos*. Barcelona: Reverté, 1959. Traducción de la obra original del mismo autor, *Introductory Circuit Theory*. New York: Wiley, 1953.
2. Seshu, S. and Balabanian, N.: *Linear Network Analysis*. New York: Wiley, 1959.
3. Balabanian, N., Bickart, T.A. y Seshu, S.: *Teoría de Redes Eléctricas*. Barcelona: Reverté, 1972. Traducción de la obra original de los mismos autores, *Electrical Network Theory*. New York: Wiley, 1969.
4. Kuo, F.F.: *Network Analysis And Synthesis*. New York: Wiley, 1966.
5. Van Valkenburg, M.E.: *Network Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1974.
6. Huelsman, L.P.: *Basic Circuit Theory*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1984.
7. Boite, R. et Neirynek, J.: *Analyse des Circuits Linéaires*. Londres: Gordon and Breach, Science Publication Ltd, 1971.
8. Bustamante L.L., E.: *Alternating Current Networks*. México: Limusa Wiley, 1964.
9. García Avilés, A.: "Topología de circuitos resistivos con fuentes de voltaje, fuentes de corriente o ambas", *Acta Mexicana de Ciencia y Tecnología*, V. II, No. 6, abril-junio, 1984.
10. García Avilés, A.: "Topología de redes con acoplamientos arbitrarios", *Acta Mexicana de Ciencia y Tecnología*, V. III, No. 9, enero-marzo, 1985.
11. García Avilés, A.: "Networks NS and Networks NP". *Proceedings of the Third International Symposium on Network Theory* (E.T.A.N.), Split, Yugoslavia, Sep. 1-5, 1975.
12. García Avilés, A.: "Teoría de gráficas", *Acta Mexicana de Ciencia y Tecnología*, Vol. 1, No. 4, octubre-diciembre, 1983.
13. Gerez, V.: *Circuitos y Sistemas Electro-Mecánicos*, tomo I, México: Representaciones y Servicios de Ingeniería, 1974.
14. Desoer, C.A. and Kuh, E.S.: *Basic Circuit Theory*. Tokyo: McGraw-Hill, 1969. International Student Edition.
15. Hayt, W. and Kemmerly, J.: *Engineering Circuit Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1962.
16. Kirchhoff, G.: "On the Solution of the Equations Obtained from the Investigation of the Linear Distribution of Galvanic Currents". *IRE Transactions on Circuit Theory*, pp. 4-7, March, 1958. Traducción directa del artículo en alemán publicado en *Poggendorf Ann. Physik* 72, pp. 497-508, 1847.
17. Maxwell, J.C.: *Electricity and Magnetism*, 1, Chap. VI and Appendix, pp. 403-410. Oxford: Clarendon Press, 1892.
18. Poincaré, H.: "Analysis Situs". *J. Ecole Polytech.*, 1, (2nd ser.) 1-121, 1895.
19. Weyl, H.: "Repartición de Corriente en una Red Conductora". *Revista Matemática Hispano-Americana* 5, Madrid, 1923.